Fizika 1 Mechanika számolási gyakorlat zh2 pót 2014. máj. 19. megoldások

1. Adott a következő erőtér:

$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (xy - 3yz)\, \mathbf{i} + (x^2/2 - 3xz)\, \mathbf{j} - (3 xy + 5)\, \mathbf{k}$ [N]

a) Konzervatív a fenti erőtér?

b) Számoljuk ki, mekkora munkát végez az erőtér, miközben egy test a P_0 (0; –1; 1) pontból a P_1 (–1; –2; 2) pontba megy a két pontot összekötő egyenes mentén!

MO.

$$\textbf{a) rot F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy - 3yz & \frac{x^2}{2} - 3xz & -3xy - 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3x - (-3x))\,\mathbf{i} - (-3y - (-3y))\,\mathbf{j} + (x - 3z - (x - 3z))\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$$ **; konzervatív.**

b) Mivel az erőtér konzervatív ♠→

♠→ létezik potenciálfüggvény:

$\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} = -F_x = -(xy - 3yz)$ → $E_{pot} = 3xyz - \frac{x^2}{2}y + k_1(y,z)$

$\frac{\partial E_{pot}}{\partial y} = -F_y = -(\frac{x^2}{2} - 3xz)$ → $E_{pot} = 3xyz - \frac{x^2}{2}y + k_2(x,z)$

$\frac{\partial E_{pot}}{\partial z} = -F_z = -(-3xy - 5)$ → $E_{pot} = 3xyz + 5z + k_3(x,y)$

tehát a potenciálfüggvény $E_{pot} = 3xyz + -\frac{x^2}{2}y + 5z$; ezzel a munka

$W_{P0,P1} = -\Delta E_{pot} = E_{pot}(P_0) - E_{pot}(P_1) = E_{pot}(0;-1;1) - E_{pot}(-1;-2;2) = 5 - 23 =$ **–18 J**.

VAGY: ♠→ választhatunk egyszerűbb utat, mint a fenti két pontot összekötő szakasz, vagyis mehetünk 3 szakaszban a koordináta-tengelyekkel párhuzamosan:

$P_0\ (0; -1; 1) \overset{dx}{\rightarrow} P_2\ (-1;-1;1) \overset{dy}{\rightarrow} P_3\ (-1;-2;1) \overset{dz}{\rightarrow} P_1\ (-1; -2; 2)$

$$W_{P0,P1} = \int_{(0,-1,1)}^{(-1,-1,1)} F_x\, dx + \int_{(-1,-1,1)}^{(-1,-2,1)} F_y\, dy + \int_{(-1,-2,1)}^{(-1,-2,2)} F_z\, dz = \int_{(0,-1,1)}^{(-1,-1,1)} (xy - 3yz)\, dx + \int_{(-1,-1,1)}^{(-1,-2,1)} \left(\frac{x^2}{2} - 3xz\right) dy +$$
$$\int_{(-1,-2,1)}^{(-1,-2,2)} (-3xy - 5)\, dz = \int_0^{-1} (-x + 3)\, dx + \int_{-1}^{-2} (0{,}5 + 3)\, dy + \int_1^2 (-6 - 5)\, dz = \cdots = -18\ \mathrm{J}.$$

Természetesen kiszámolható a munka az eredeti úton vonalintegrállal is:

$t_0=0$ és $t_1=1$ választással $\mathbf{r}(t) = (-t)\mathbf{i} + (-1-t)\mathbf{j} + (1+t)\mathbf{k}$; $d\mathbf{r} = (-1\mathbf{i} - 1\mathbf{j} + 1\mathbf{k})\, dt$;

$$W_{P0,P1} = \int_0^1 \left\{ [(-t) \cdot (-1 - t) - 3 \cdot (-1 - t) \cdot (1 + t)] \cdot (-1) + \left[\frac{(-t)^2}{2} - 3 \cdot (-t) \cdot (1 + t)\right] \cdot (-1) - [3 \cdot (-t) \cdot (-1 - t) + 5] \cdot (1) \right\} dt = \int_0^1 -\{10{,}5t^2 + 13t + 8\}\, dt = \cdots = -18\ \mathrm{J}.$$

2. Egy 20 N/m rugóállandójú, 20 cm hosszú rugó végéhez rögzítünk egy 5 dkg-os testet, a rugót a plafonhoz rögzítjük, és a testet meglökjük $\sqrt{2}$ m/s kezdősebességgel felfelé abban a magasságban, ahol a rugó nyújtatlan állapotban van, vagyis a plafontól 20 cm-rel lejjebb, ezzel rezgésbe hozzuk a testet.

a) Hol lesz a rezgés egyensúlyi helyzete?

b) Mennyi lesz a rezgés periódusideje?

c) Mennyi lesz a rezgés amplitúdója?

d) Számoljuk ki az alábbi erőket, és adjuk meg az irányukat is:

	rugóerő	eredő erő
az egyensúlyi helyzetben		
a rezgés legfelső pontjában		
a rezgés legalsó pontjában		

MO.

a) az egyensúlyi helyzetben mg = kx → $\mathbf{x_{es}}$ = mg/k = **0,025 m = 2,5 cm**.

b) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ = 20 s^{-1}, **T** = 2π/ω ≈ **0,314 s**.

c) Ha az x tengelyt lefelé vesszük fel és x = 0 az egyensúlyi helyzetnél (a plafontól 22,5 cm-re), akkor x_0 = –0,025 m és $v_0 = -\sqrt{2}$ m/s.

$x_0 = A\cos\varphi_0$ és $v_0 = -A\omega\sin\varphi_0$ → $\mathbf{A} = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$ = **0,075 m = 7,5 cm**.

d) Ha a lefelé mutató irányt vesszük pozitívnak, akkor mg = 0,5 N;
a rugóerő nagysága $F_r = -k\cdot\Delta l$, ahol Δl-et a nyújtatlan állapottól mérjük.
Az egyensúlyi helyzetben Δl = 0,025 m → F_r = –0,5 N (felfelé) → F_e = 0 (mert egyensúlyi helyzet!)
A legfelső pontban Δl = –0,05 m → F_r = 1,0 N (lefelé) → F_e = 1,5 N (lefelé)
A legalsó pontban Δl = 0,10 m → F_r = –2,0 N (felfelé) → F_e = –1,5 N (felfelé)
(A szélső helyzetekben az eredő erő nagysága azonos, mivel $F_{e,\,max} = ma_{max} = m\omega^2 A$.)

	rugóerő	eredő erő
az egyensúlyi helyzetben	0,5 N felfelé	0
a rezgés legfelső pontjában	1,0 N lefelé	1,5 N lefelé
a rezgés legalsó pontjában	2,0 N felfelé	1,5 N felfelé

3. Egy 24°-os, 12 m hosszú csúszda tetejéről 3 m/s kezdősebességgel elrugaszkodik Yvette, aki 30 kg tömegű. Mivel a csúszda vízicsúszda, a súrlódás elhanyagolható. A csúszda vége egy kis ívvel vízszintesen egy sekély medencébe vezet, ahol a víz állandó, 300 N nagyságú erővel fékezi Yvettet.
a) Mekkora sebességgel érkezik Yvette a csúszda aljára?
b) Milyen messzire csúszik Yvette a vízben, amíg lefékeződik?
c) A következő csúszásnál Yvette a csúszda aljában pont összeütközik Zebulonnal, aki alulról próbált meg felmászni. Így együtt csúsznak a sekély medencében. Az ütközésük rugalmatlannak tekinthető, Zebulon 20 kg, a kettőjükre ható fékező erő ugyanannyi, mint külön Yvette-re volt, azaz 300 N. Milyen messzire csúsznak ketten a megállásukig?

MO.

a) energia-megmaradással: $\frac{1}{2}\cancel{m}\cdot {v_0}^2 + \cancel{m}\cdot g\cdot(s\cdot\sin\alpha) = \frac{1}{2}\cancel{m}\cdot {v_1}^2$, ahol v_0 = 3 m/s, s = 12 m, α = 24°
→ $\mathbf{v_1}$ **≈ 10,33 m/s**.

b) munkatétellel: $0 - \frac{1}{2} m\cdot {v_1}^2 = -F\cdot d_1$ $\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 10{,}33^2 = 300 d_1$ → $\mathbf{d_1}$ **≈ 5,33 m**.

c) rugalmatlan ütközés, impulzus-megmaradást felírva: $m\cdot v_1 = (m+M)\cdot v_2$ → v_2 ≈ 6,195 m/s,
majd a fentihez hasonlóan munkatétellel: $\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 6{,}195^2 = 300 d_2$ → $\mathbf{d_2}$ **≈ 3,20 m**.

4. A mérleghinta rúdja 3,2 m hosszú, homogén, 50 kg tömegű. Az alátámasztási pontja nem a rúd felénél van, hanem 10 cm-rel eltolva. A két végére ráül két gyerek, a rövidebb oldalára egy 30 kg-os, a hosszabb oldalára egy 20 kg-os.

a) Számoljuk ki, milyen távol van a rúd és a rajta ülő gyerekek tömegközéppontja az alátámasztástól!

b) Számoljuk ki a rúd és a rajta ülő gyerekek tehetetlenségi nyomatékát az alátámasztási ponton átmenő vízszintes tengelyre!

A rúd tehetetlenségi nyomatéka a felezőpontján átmenő tengelyre $\frac{1}{12}ML^2$.

c) Merre billen el a mérleghinta a gyerekekkel? Mekkora lesz a vízszintes helyzetből való kibillenéskor a szöggyorsulás?

MO.

a) Vegyük fel az x tengelyt úgy, hogy az origó az alátámasztásnál van és a pozitív irány a hosszabbik oldal felé mutat, ekkor a 20 kg-os gyerek 1,7 m-re van pozitív irányban, a 30 kg-os gyerek 1,5 m-re van negatív irányban, a rúd tömegközéppontja 0,1 m-re van pozitív irányban:

$x_s = \frac{50\cdot 0{,}1+20\cdot 1{,}7+30\cdot(-1{,}5)}{50+20+30}$ = –0,06 m = –6 cm, azaz **az alátámasztástól 6 cm-re a rövidebb vég felé**.

b) $\Theta = \left(\frac{1}{12}\cdot 50\cdot 3{,}2^2 + 50\cdot 0{,}1^2\right) + 20\cdot 1{,}7^2 + 30\cdot 1{,}5^2 \approx$ **168,5 kgm²**.

c) Mivel a mérleghinta + gyerekek együttes tömegközéppontja a rövidebb vég felé esik az alátámasztástól, a mérleghintának az az oldala fog lefelé billenni.

A forgatónyomatékot számolhatjuk testenként is (előjelre figyelve), de egyszerűbb az össztömeggel és a tömegközéppontnak az alátámasztástól vett távolságával számolni:

$\Theta\cdot\beta = M = \Sigma m_i\cdot g\cdot k = (50+20+30)\cdot 10\cdot 0{,}06 = 60$ Nm → $\beta = M / \Theta \approx$ **0,356 s⁻¹**.