Fizika 1 Mechanika   zh1 megoldások   2016. ápr. 1.

Az összes feladatban $g = 10\ m/s^2$.

1. Április 1-én éjfélkor elkezdett fújni a bolond lyukból a bolond szél olyan erősen, hogy kifújta a dugót, amivel tavaly bedugaszoltuk. Méréseink szerint a 4,01 dkg tömegű dugó sebességét az alábbi függvény írta le:

$$\mathbf{v}(t) = 15\cos(t/3)\,\mathbf{i} + (24 - 0{,}2t)\,\mathbf{j} + (3 - 60\cdot e^{-t/2})\,\mathbf{k}\quad [m/s]$$

a) Határozzuk meg a bolond szél által a dugóra kifejtett erő vektorát! (Ne hanyagoljuk el a nehézségi erőt!) 2,5 p.

b) A bolond lyuk koordinátái $x_0 = 2016$ m; $y_0 = 4$ m; $z_0 = 1$ m, a dugó a t = 0 -ban indult. Hol volt a dugó 4 perc 1 másodperc múlva? Milyen távolra jutott a bolond lyuktól? 3 p.

c) Mekkora szöget zár be egymással a kiindulási helyvektor és a 4 perc 1 másodperchez tartozó helyvektor? 1,5 p.

MO.

a) $\mathbf{a}(t) = -5\sin(t/3)\,\mathbf{i} - 0{,}2\,\mathbf{j} + 30\cdot e^{-t/2}\,\mathbf{k}\quad [m/s^2]$

$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{bolond szél}} - mg\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}_{\text{bolond szél}} = m\mathbf{a} + mg\mathbf{k} = 0{,}0401\cdot(-5\sin(t/3)\,\mathbf{i} - 0{,}2\,\mathbf{j} + 30\cdot e^{-t/2}\,\mathbf{k}) + 0{,}0401\cdot 10\,\mathbf{k}$

$\mathbf{F}_{\text{bolond szél}} = (-0{,}2005\sin(t/3)\,\mathbf{i} - 8{,}2\cdot 10^{-3}\,\mathbf{j} + (0{,}401 + 1{,}203\cdot e^{-t/2}\,\mathbf{k})$ [N]

b) $\mathbf{r}(t) = (2016 + 45\sin(t/3))\,\mathbf{i} + (4 + 24t - 0{,}1t^2)\,\mathbf{j} + (3t + 120\cdot e^{-t/2} - 119)\,\mathbf{k}\quad [m]$

$\mathbf{r}(241) = 1972{,}1\,\mathbf{i} - 20{,}1\,\mathbf{j} + 604\,\mathbf{k}\quad [m]$

$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(241) - \mathbf{r}(0) = (1972{,}1 - 2016)\,\mathbf{i} + (-20{,}1 - 4)\,\mathbf{j} + (604 - 1)\,\mathbf{k} = -43{,}9\,\mathbf{i} - 24{,}1\,\mathbf{j} + 603\,\mathbf{k}\quad [m]$

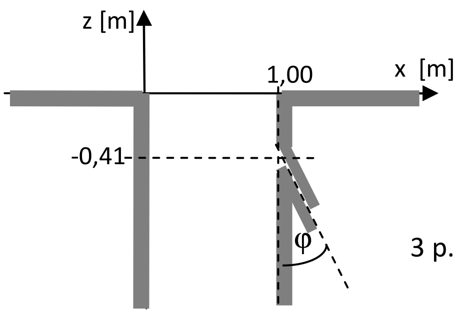
$d = |\Delta\mathbf{r}| \approx 605{,}08$ m.

c) $\mathbf{r}(241)\cdot\mathbf{r}(0) = 1972{,}1\cdot 2016 + (-20{,}1\cdot 4) + 604\cdot 1 = 3976277{,}2\ m^2$;

$|\mathbf{r}(241)| = 2062{,}629$ m; $|\mathbf{r}(0)| = 2016{,}0042$ m

$\cos\varphi = \mathbf{r}(241)\cdot\mathbf{r}(0) / (|\mathbf{r}(241)|\cdot|\mathbf{r}(0)|) = 0{,}956234 \quad\Rightarrow\quad \varphi = 17{,}014°$

2. „Egy bolond beledobja a kútba a követ, száz okos se veszi ki.” Utánajártunk, hogy lehet ez. Kiszivattyúztuk a kútból a vizet és megmértük a méreteit, a kút adatai az ábrán láthatók, $\varphi = 26{,}565°$. Kiderült, hogy azért nem tudják kivenni a kútból azt a követ, amit a bolond dobott bele, mert az nem a kút aljára, hanem az oldalfalából nyíló kis járatba esik bele. Hát hiába, bolondnak van szerencséje!



a) Honnan dobta a bolond a követ, ha az éppen érintő irányban érkezett az oldalsó járatba? A kő kezdősebessége 4,1 m/s volt 45°-os szögben ferdén felfelé. 3 p.

Az okosokra is rájött a bolondóra és elkezdtek követ dobálni a kútba. Ők közvetlenül a kút pereménél
1 m magasságból dobják el a követ szintén 4,1 m/s kezdősebességgel, de meredekebben, a függőlegessel 6°-os szöget bezárva. A kút 12 m mély.

b) Mennyi idő alatt ér a kút aljára a kő? Nekiütődik esés közben a kút falának? 2 p.

c) Mekkora a sebességének függőleges komponense a kút aljára érkezés pillanatában? 1 p.

A kútból ki van szivattyúzva a víz, szóval a közegellenállás elhanyagolható.

MO.

a) A kő sebességvektora az adott időben meg kell egyezzen a kis járat irányával: $v_z/v_x = -1/\mathrm{tg}\varphi = -2 \rightarrow v_z = -2v_x$.

$\cancel{v_x =}$ $v_z = v_0\cdot\sin\alpha - gt$ (itt α a kezdősebességnek a vízszintessel bezárt szöge)

$\Rightarrow\quad v_0\cdot\sin\alpha - gt^* = -2\cdot v_0\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad t^* = v_0\cdot(\sin\alpha + \cos\alpha) / g = 0{,}8697$ s.

$x(t) = x_0 + (v_0\cos\alpha)\cdot t$, $x(t^*) = 1{,}00$ m $\quad\Rightarrow\quad x_0 = x(t^*) - (v_0\cos\alpha)\cdot t^* = -1{,}521$ m;

$z(t) = z_0 + (v_0\sin\alpha)\cdot t - g/2\cdot t^2$, $z(t^*) = -0{,}41$ m $\quad\Rightarrow\quad z_0 = z(t^*) - (v_0\sin\alpha)\cdot t^* + g/2\cdot t^{*2} = 0{,}851$ m.

b) ferdén felfelé a függőlegessel 6°-ot bezáró szögben $\rightarrow$ vízszintessel 84°

$z(t) = z_0 + (v_0\sin\alpha)\cdot t - g/2\cdot t^2 = 1 + (4{,}1\cdot\sin 84°)t - 5t^2 = 1 + 4{,}078t - 5t^2$, $\cancel{= 0}$ $z(t_{lent}) = -12$ m $\quad\Rightarrow\quad t_{lent} = 2{,}071$ s.

$x(t) = x_0 + (v_0\cos\alpha)\cdot t = 0 + (4{,}1\cdot\cos 84°)t$, $x(t_{lent}) = 0{,}888$ m, azaz nem ütődik neki.

c) $v_z = v_0\sin\alpha - g\cdot t_{lent} = -16{,}63$ m/s.

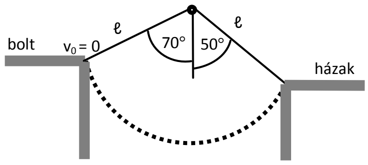
VAGY: Értelmezhető ferdén lefelé a függőlegessel 6°-ot bezáró szögben $\rightarrow$ vízszintessel –84°

$z(t) = z_0 + (v_0\sin\alpha)\cdot t - g/2\cdot t^2 = 1 + (4{,}1\cdot\sin(-84°))t - 5t^2 = 1 - 4{,}078t - 5t^2$, $z(t_{lent}) = -12 \quad\Rightarrow\quad t_{lent} = 1{,}255$ s.

$x(t) = x_0 + (v_0\cos\alpha)\cdot t = 0 + (4{,}1\cdot\cos(-84°))t$, $x(t_{lent}) = 0{,}538$ m, azaz nem ütődik neki.

$v_z = v_0\sin(-84°) - g\cdot t_{lent} = -16{,}63$ m/s.

3. A falu úgy épült, hogy a bolt és a házak között egy szakadék van. Van köztük út a völgyben, de hogy ne kelljen mindig lemenni, egy erős, magas póznára kikötöttek egy kötelet, és annak végéhez erősítve lendíti át a boltos egyik oldalról a másikra a csomagokat. A falu bolondja tegnap kipróbálta, milyen érzés csomaghoz hasonló módon átlendülni; sikerült neki, büszkén el is mesélte a többieknek. És mint tudjuk, egy bolond százat csinál – így aztán délután már egyszerre százan csimpaszkodtak a kötélre, hogy átlendüljenek. Le is szakadtak.



A falu bolondja 82 kg; százan összesen 6800 kg tömegűek; a kötél ℓ = 12 m hosszú, és 100 kN-nál szakad el.

a) Milyen erős kötél kellett volna, hogy ne szakadjanak le? 2 p.

b) Mekkora sebességgel érkezett a falu bolondja a túlsó oldalra? 1 p.

c) Mekkora volt a kötélerő abban a pillanatban, amikor a falu bolondja megérkezett a túloldalra? 1 p.

d) Mekkora volt a bolond gyorsulása a túloldalra való érkezés pillanatában? 2 p.

e) És itt van egy plusz kérdés a 25 ponton felül, ami a bolondnak is megéri:
Hol szakadt el a kötél a száz bolonddal? +3 p.

MO.

a) A legnagyobb kötélerő a legalsó pontban lép fel, ott

$ma_{cp,lent} = F_{k,lent} - mg \quad \Rightarrow \quad F_{k,lent} = ma_{cp,lent} + mg = mv_{lent}^2/\ell + mg$.

A sebességet energia-megmaradásból kapjuk meg: $mg\cdot(\ell-\ell\cdot\cos70°) = ½\, mv_{lent}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{lent}^2 = 2g\cdot\ell(1-\cos70°)$,

tehát $F_{k,lent} = 2mg\cdot(1-\cos70°) + mg = 6800\cdot10\cdot(3-2\cdot\cos70°) = 157{,}485$ kN.

b) Energia-megmaradásból

$mg\cdot(\ell-\ell\cdot\cos70°) = ½\, mv_{érk}^2 + mg\cdot(\ell-\ell\cdot\cos50°) \Rightarrow \quad v_{érk}^2 = 2g\cdot\ell(\cos50°-\cos70°) \quad \Rightarrow \quad v_{érk} \approx 8{,}496$ m/s .

c) Érkezéskor a radiális komponensek

$ma_{cp,érk} = F_{k,érk} - mg\cdot\cos50° \quad \Rightarrow \quad F_{k,érk} = ma_{cp,érk} + mg\cdot\cos50° = 2mg(\cos50°-\cos70°) + mg\cdot\cos50° \approx 1020{,}3$ N.

d) $a_{cp,érk} = 2g(\cos50°-\cos70°) = 6{,}015$ m/s², $a_t = \cancel{m}g\cdot\sin50° = 7{,}660$ m/s², $a = \sqrt{\ldots} = 9{,}740$ m/s².

e) A sebességnégyzet a függőlegessel bezárt φ szög függvényében energia-megmaradásból:

$mg\cdot(\ell-\ell\cdot\cos70°) = mg\cdot(\ell-\ell\cdot\cos\varphi) + ½\, mv^2 \quad \rightarrow \quad v^2 = 2mg\cdot\ell(\cos\varphi-\cos70°)$

$\rightarrow \quad a_{cp} = 2mg(\cos\varphi-\cos70°)$, és a kötélerő φ függvényében:

$F_k = ma_{cp} + mg\cdot\cos\varphi = 2mg(\cos\varphi-\cos70°) + mg\cdot\cos\varphi = mg(3\cos\varphi - 2\cos70°)$.

A kritikus szögnél $F_k = 100000$ N $\quad \rightarrow \quad \varphi_{krit} = 44{,}09°$ (4, 515 m-rel az indulási magasság alatt)

4. A sült bolond (SB) és a kötözni való bolond (KVB) fel akar jutni a hegycsúcsra. A 401 m magas csúcsra két út vezet: SB oldalán $\alpha = 31°$, KVB oldalán $\beta = 39°$ hajlásszögű lejtővel. A csúszási súrlódási együttható $\mu = 0{,}1$, a tapadási súrlódási együttható $\mu_t = 0{,}15$ mindkét oldalon. Mindketten olyan szántalpas rakétával vágnak neki az emelkedőnek, ami tetszőleges irányba állítható állandó 401 N nagyságú erőt tud kifejteni. SB a rakétát vízszintesen állítja, KVB pedig a lejtővel párhuzamosan állítja. SB 62 kg, KVB 52 kg.

Mikor lesz a két bolond egy pár? azaz: válaszoljuk meg, hogy

a) mekkora súrlódási erő hat SB-re ill. KVB-re; 3,5 p.

b) mekkora SB ill. KVB gyorsulása; 1,5 p.

c) mikor lesznek fenn mindketten a hegytetőn (ha egyszerre indulnak a lejtők aljából)? 1 p.

MO.

Sült bolond:

lejtőre merőleges komponensek: $F_{ny,SB} - F\cdot\sin\alpha - m_{SB}g\cdot\cos\alpha = F_{ny,SB} - 206{,}53 - 531{,}44 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{ny,SB} = 737{,}97$ N

$\Rightarrow \quad F_{s,SB} = 73{,}797$ N; $\quad F_{t,max,SB} = 110{,}70$ N;

lejtővel párhuzamos komponensek: $F\cdot\cos\alpha - m_{SB}g\cdot\sin\alpha - F_{t,SB} = 343{,}72 - 319{,}32 - F_{t,SB} = 24{,}40 - F_{t,SB} = 0$,

ha $F_{t,SB} = 24{,}40$ N; $\quad F_{t,SB} < F_{t,max,SB}$, tehát SB tapad.

Kötözni való bolond:

lejtőre merőleges komponensek: $F_{ny,KVB} - m_{KVB}g\cdot\cos\beta = F_{ny,KVB} - 404{,}12 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{ny,KVB} = 404{,}12$ N

$\Rightarrow \quad F_{s,KVB} = 40{,}412$ N; $\quad F_{t,max,KVB} = 60{,}617$ N;

lejtővel párhuzamos komponensek: $F - m_{KVB}g\cdot\sin\beta - F_{t,KVB} = 401 - 327{,}25 - F_{t,KVB} = 73{,}753 - F_{t,KVB} = 0$,

ha $F_{t,SB} = 73{,}753$ N lenne, de $F_{t,KVB} < F_{t,max,KVB}$, tehát KVB csúszik.

a) SB-re $F_{t,SB} = 24{,}40$ N tapadási súrlódási erő, KVB-re $F_{s,KVB} = 40{,}412$ N csúszási súrlódási erő hat.

b) $a_{SB} = 0$; $\quad m_{KVB}\cdot a_{KVB} = F - m_{KVB}g\cdot\sin\beta - F_{s,KVB} = 401 - 327{,}25 - 40{,}412 = 33{,}34$ N, $\quad a_{KVB} = 0{,}6411$ m/s².

c) SB nem jut fel, tehát soha nem lesz a két bolond egy pár ☹.