

Tömegközéppont (súlypont)

Pontrendszer esetén az m_i tömegű, \mathbf{r}_i helyvektorú tömegpontok tömegközéppontja a tömegekkel súlyozott átlagos helyvektor:

$$\mathbf{r}_s = \frac{\sum(m_i \mathbf{r}_i)}{\sum m_i} = \frac{\sum(m_i \mathbf{r}_i)}{M}, \quad \text{ahol } M = \sum m_i \text{ az össztömeg.}$$

Kiterjedt test esetén térfogati integrállal számolunk:

$$\mathbf{r}_s = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \mathbf{r} \rho dV}{\int \rho dV} = \frac{\int \mathbf{r} \rho dV}{M}, \quad \text{ahol } \rho \text{ a sűrűség (ami lehet helyfüggő is), és}$$

$$M = \int \rho dV \text{ az össztömeg.}$$

Impulzus, -tétel, -megmaradás tétele

m tömegű, \mathbf{v} sebességű test impulzusa $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ [kg·m/s] (vektor!)

Impulzustétel tömegpontra: $\mathbf{F}_e = \dot{\mathbf{p}}$

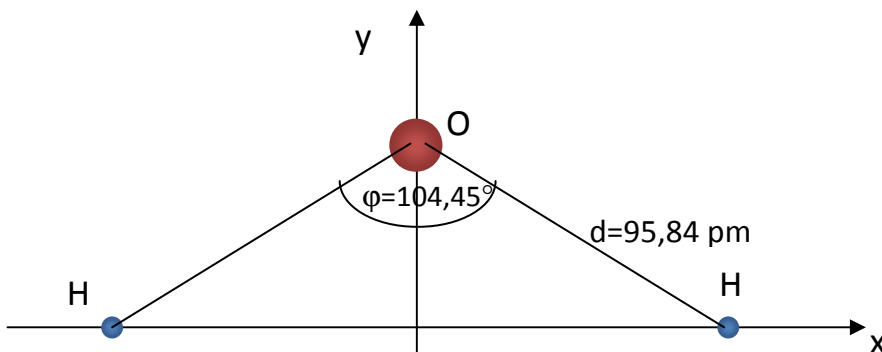
Az impulzus additív; pontrendszer impulzusa $\mathbf{p}_{\text{össz}} = \sum (m_i \mathbf{v}_i)$

Impulzustétel pontrendszerre: $\mathbf{F}_{e,\text{külső}} = \dot{\mathbf{p}}_{\text{össz}}$ (mivel a belső erők eredője zérus)

Impulzus-megmaradás tétele: zárt rendszerben (azaz ahol $\mathbf{F}_{e,\text{külső}} = 0$) $\mathbf{p}_{\text{össz}} = \text{konst.}$

9/1. Határozzuk meg a vízmolekula tömegközéppontját! A kötэшossz 95,84 pm, a kötэшszög $104,45^\circ$.

MO.



Helyezzük el így a vízmolekulát. Akkor

$$x_{H1} = d \cdot \sin(\varphi/2) = 95,84 \cdot \sin(104,45^\circ/2) = 75,75 \text{ pm} \quad y_{H1} = 0 \quad m_{H1} = 1$$

$$x_{H2} = -d \cdot \sin(\varphi/2) = -95,84 \cdot \sin(104,45^\circ/2) = -75,75 \text{ pm} \quad y_{H2} = 0 \quad m_{H2} = 1$$

$$x_O = 0 \quad y_O = d \cdot \cos(\varphi/2) = 95,84 \cdot \cos(104,45^\circ/2) = 58,71 \text{ pm} \quad m_O = 16$$

$$M = m_{H1} + m_{H2} + m_O = 18$$

$$\text{Tehát } x_s = \frac{(75,75 \cdot 1) + (-75,75 \cdot 1) + (0 \cdot 16)}{18} = 0 \quad \text{és} \quad y_s = \frac{(0 \cdot 1) + (0 \cdot 1) + (58,71 \cdot 16)}{18} = 52,18 \text{ pm.}$$

9/2. Azonos keresztmetszetű és hosszúságú, homogén vas és alumínium rudat a végüknél összeragasztunk, majd az egészet a tömegközéppontjánál kettévágjuk. Mennyi lesz a két rész tömegének aránya?

A sűrűségek: $\rho_{\text{Fe}} = 7,8 \text{ kg/dm}^3$, $\rho_{\text{Al}} = 2,7 \text{ kg/dm}^3$.

MO.



Helyezzük el úgy a rudakat, hogy a vas 0-tól L-ig, az alumínium L-től 2L-ig tart. A rudak keresztmetszete 'A'.

A tömegközéppontot kiszámolhatjuk

1.) úgy, hogy a rudakat helyettesítjük a tömegközéppontjukba helyezett tömegükkel:

A szimmetriát kihasználva tudjuk, hogy az egyes rudak tömegközéppontja a felezőpontjukban van, vagyis a vasé $L/2$ -nél, az alumíniumé $3L/2$ -nél.

A tömegek $m_{\text{Fe}} = \rho_{\text{Fe}} \cdot A \cdot L = 7,8 A \cdot L$ ill. $m_{\text{Al}} = \rho_{\text{Al}} \cdot A \cdot L = 2,7 A \cdot L$.

$$x_s = \frac{(L/2) \cdot (\rho_{\text{Fe}} \cdot A \cdot L) + (3L/2) \cdot (\rho_{\text{Al}} \cdot A \cdot L)}{(\rho_{\text{Fe}} \cdot A \cdot L) + (\rho_{\text{Al}} \cdot A \cdot L)} = \frac{L/2 \cdot \rho_{\text{Fe}} + 3L/2 \cdot \rho_{\text{Al}}}{\rho_{\text{Fe}} + \rho_{\text{Al}}} = \frac{7,8/2 + 3 \cdot 2,7/2}{7,8 + 2,7} L \approx 0,7571 L$$

2.) térfogati integrállal:

Mivel az x tengely mentén fekszik a rúd, azért $y_s = z_s = 0$, és keressük x_s -t.

A rudat az x tengelyre merőlegesen dx vastagságú szeletekre vágjuk, azaz $dV = A dx$;

$dm = \rho \cdot A dx$, ahol 0 és L között $\rho = \rho_{\text{Fe}}$, L és 2L között $\rho = \rho_{\text{Al}}$.

$$x_s = \frac{\int_0^L x \cdot dm + \int_L^{2L} x \cdot dm}{\int_0^L dm + \int_L^{2L} dm} = \frac{\int_0^L x \cdot \rho_{\text{Fe}} A dx + \int_L^{2L} x \cdot \rho_{\text{Al}} A dx}{\int_0^L \rho_{\text{Fe}} A dx + \int_L^{2L} \rho_{\text{Al}} A dx} = \frac{\rho_{\text{Fe}} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L + \rho_{\text{Al}} \left[\frac{x^2}{2} \right]_L^{2L}}{\rho_{\text{Fe}} [x]_0^L + \rho_{\text{Al}} [x]_L^{2L}} = \frac{7,8 \frac{L^2}{2} + 2,7 \frac{3L^2}{2}}{7,8 L + 2,7 L} \approx 0,7571 L$$

Az egyik darab (m_1) tehát a vasrúd 0,7571-ed része,

a másik darab (m_2) a vasrúd $1 - 0,7571 = 0,2429$ -ed része plusz az egész alumíniumrúd,

a két tömeg aránya $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho_{\text{Fe}} \cdot 0,7571 L \cdot A}{\rho_{\text{Fe}} \cdot 0,2429 L \cdot A + \rho_{\text{Al}} \cdot L \cdot A} = \frac{7,8 \cdot 0,7571}{7,8 \cdot 0,2429 + 2,7} \approx 1,285$.

9/3. L hosszúságú rúd sűrűsége egyik végén ρ_0 , másik végén $2\rho_0$, közben egyenletesen változik. A rúd keresztmetszete mindenütt azonos. Hol van a súlypontja?

MO.

A rúd az x tengely mentén helyezkedik el 0-tól L-ig,

a sűrűsége $x=0$ -ban ρ_0 , $x=L$ -ben $2\rho_0$, azaz a sűrűsége x függvényében $\rho(x) = \rho_0 (1 + x/L)$.

A súlypontjának x koordinátája

$$x_s = \frac{\int_0^L x \cdot \rho(x) A dx}{\int_0^L \rho(x) A dx}, \text{ ahol}$$

$$\begin{aligned} \int_0^L x \cdot \rho(x) A dx &= \int_0^L x \cdot \rho_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) A dx = A \rho_0 \int_0^L \left(x + \frac{x^2}{L}\right) dx = \\ &= A \rho_0 \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3L} \right]_0^L = A \rho_0 \left(\frac{L^2}{2} + \frac{L^2}{3} \right) = A \rho_0 \frac{5L^2}{6} \end{aligned}$$

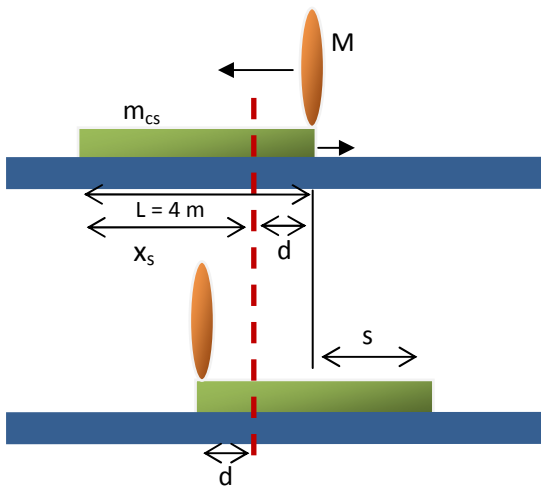
$$M = \int_0^L \rho(x) A dx = A \rho_0 \int_0^L \left(1 + \frac{x}{L}\right) dx = A \rho_0 \left[x + \frac{x^2}{2L} \right]_0^L = A \rho_0 \left(L + \frac{L}{2} \right) = A \rho_0 \frac{3L}{2},$$

$$\text{tehát } x_s = \frac{A \rho_0 \frac{5L^2}{6}}{A \rho_0 \frac{3L}{2}} = \frac{5}{9} L.$$

9/4. 4 m hosszú, 120 kg tömegű csónak egyik végéből megy át a másikba egy 80 kg tömegű ember. Mennyit mozdul el a csónak a vízparthoz viszonyítva, ha mozgása a vízben jó közelítéssel közegellenállás-mentesnek tekinthető?

MO./1 tömegközépponti tétellel

Mivel a közegellenállás elhanyagolható, külső erő nem hat a csónak + ember rendszerre, így a tömegközéppont gyorsulása zérus, és mivel induláskor nem mozgott a csónak, a tömegközéppont nem mozdulhat el a parthoz képest.



Számoljuk ki a tömegközéppont helyét:

$$x_s = \frac{\int_0^L x \cdot \frac{m_{cs}}{L} dx + L \cdot M}{m_{cs} + M} = \frac{m_{cs} \cdot \frac{L}{2} + L \cdot M}{m_{cs} + M} = 2,8 \text{ m}$$

vagyis $d = L - x_s = 1,2 \text{ m}$ attól a végétől, ahonnan indul az ember.

(Persze számolhattuk volna rögtön ezt is:

$$d = \frac{\int_0^L x \cdot \frac{m_{cs}}{L} dx}{m_{cs} + M} = \frac{m_{cs} \cdot \frac{L}{2}}{m_{cs} + M} = 1,2 \text{ m})$$

Az ábráról látható, hogy

$$s = L - 2d = 1,6 \text{ m.}$$

MO./2 impulzus-megmaradással

Ha a csónak mozgása a vízben közegellenállás-mentesnek tekinthető, akkor a csónak + ember rendszerre a külső erők eredője zérus, tehát az impulzusuk összege állandó; méghozzá zérus, mert kiinduláskor álltak. A csónak s távolságot mozdul el a parthoz viszonyítva Δt idő alatt (amíg az ember átsétál egyik végéből a másikba), azaz sebessége $v = s/\Delta t$; közben az ember $(L-s)$ távolságot mozdul el a parthoz képest az ellenkező irányba, azaz sebessége $V = -(L-s)/\Delta t = (s-L)/\Delta t$.

$$0 = m_{cs}v + MV = m_{cs} \cdot s/\Delta t + M \cdot (s-L)/\Delta t \Rightarrow s = L \cdot M/(M+m_{cs}) = 1,6 \text{ m.}$$

9/5. 30 kg tömegű súrlódásmentes kiskocsin 40 kg tömegű gyerek ül, és van még a kocsin 2 db 5 kg tömegű téglát. A kocsi sebessége 2 m/s. A gyerek eldobja először az egyik téglát menetirányba, majd a másikat ellenkező irányba. A téglákat a kocsihoz képest 5 m/s sebességgel dobja el.

a) Mekkora lesz a kocsi sebessége a második téglát eldobása után?

b) És mekkora lesz a kocsi sebessége akkor, ha az első téglát dobja hátrafelé és a másodikat előrefelé?

MO. A kocsi+gyerek tömege $M = 30+40 = 70 \text{ kg}$, a tégláké $m_1 = m_2 = m = 5 \text{ kg}$, a kiindulási sebesség $v_0 = 2 \text{ m/s}$, a téglát relatív sebessége $v_r = 5 \text{ m/s}$.

a) Az impulzus-megmaradás

az első téglát kidobására, ha előrefelé dobja:

$$(M+2m) v_0 = m (v_0+v_r) + (M+m) v_{1a}, \text{ ahol } v_{1a} \text{ a kocsi sebessége az első téglát kidobása után}$$

$$\rightarrow v_{1a} = v_0 - \frac{m}{(m+M)} \cdot v_r;$$

a második téglát kidobására, ha hátrafelé dobja:

$$(M+m) v_{1a} = m (v_{1a}-v_r) + M v_{2a}, \text{ ahol } v_{2a} \text{ a kocsi sebessége a második téglát kidobása után}$$

$$\rightarrow v_{2a} = v_{1a} + \frac{m}{M} \cdot v_r = v_0 + \frac{m^2}{(M(m+M))} \cdot v_r;$$

behelyettesítve $v_{1a} = 5/3 \approx 1,667 \text{ m/s}$, $v_{2a} \approx 2,024 \text{ m/s}$.

b) Ha az első téglát dobja hátrafelé:

$$(M+2m) v_0 = m (v_0 - v_t) + (M+m) v_{1b}, \text{ ahol } v_{1b} \text{ a kocs sebessége az első téglá kidobása után}$$

$$\rightarrow v_{1b} = v_0 + m/(m+M) \cdot v_r;$$

és a másodikat előrefelé:

$$(M+m) v_{1b} = m (v_{1b} + v_t) + M v_{2b}, \text{ ahol } v_{2b} \text{ a kocs sebessége a második téglá kidobása után}$$

$$\rightarrow v_{2b} = v_{1b} - m/M \cdot v_r = v_0 - m^2/(M(m+M)) \cdot v_r;$$

behelyettesítve $v_{1b} = 7/3 \text{ m/s}$, $v_{2b} \approx 1,976 \text{ m/s}$.

Vegyük észre, hogy mivel a **b)** esetben mindkétszer ellentétes irányba dobta a téglákat, mint az **a)** esetben, nem kell újra felírni az egyenleteket, hanem használhatjuk az **a)** rész képleteit úgy, hogy v_r értékére $+5 \text{ m/s}$ helyett -5 m/s -ot helyettesítünk be.

Általánosabb a megoldás, ha a megfelelő előjelet mindig a v_r -nél használjuk és nem a képletbe írjuk be, azaz

$$\text{első téglá: } (M+2m) v_0 = m (v_0 + v_r) + (M+m) v_1 \rightarrow v_1 = v_0 - m/(m+M) \cdot v_r,$$

$$\text{ha előre dobta, } v_{ra} = +5 \text{ m/s} \rightarrow v_{1a} = 2 - 1/3 = 5/3 \text{ m/s};$$

$$\text{ha hátra dobta, } v_{rb} = -5 \text{ m/s} \rightarrow v_{1b} = 2 + 1/3 = 7/3 \text{ m/s};$$

$$\text{második téglá: } (M+m) v_1 = m (v_1 + v_t) + M v_2 \rightarrow v_2 = v_1 - m/M \cdot v_r,$$

$$\text{ha hátra dobta, } v_{ra} = -5 \text{ m/s} \rightarrow v_{2a} = 5/3 + 5/14 \approx 2,024 \text{ m/s};$$

$$\text{ha előre dobta, } v_{rb} = +5 \text{ m/s} \rightarrow v_{2b} = 7/3 - 5/14 \approx 1,976 \text{ m/s}.$$

9/6. Határozzuk meg egy homogén lemezből kivágott síklap súlypontjának helyzetét, ha annak alakja

- a) félkör;
- b) derékszögű háromszög;
- c) általános háromszög;
- d) α nyílásszögű körcikk!

MO.

a) A lemez vastagsága legyen D , így a sűrűség $\rho = \frac{M}{1/2 \cdot R^2 \pi \cdot D}$.

Szimmetria miatt $y_s = 0$; keressük x_s -et.

Descartes-koordinátarendszerben:

A félkört szeleteljük fel az ábrán látható módon:

$$dV = D \cdot 2y^* dx = D \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} dx$$

$$x_s = \frac{\int x \rho dV}{\int \rho dV} = \frac{\int_0^R x \rho D \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} dx}{M} = \frac{4}{R^2 \pi} \int_0^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx =$$

$$= \frac{4}{R^2 \pi} \left[-\frac{1}{3} (R^2 - x^2)^{3/2} \right]_0^R = \frac{4}{R^2 \pi} \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3\pi} R$$

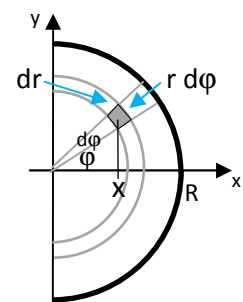
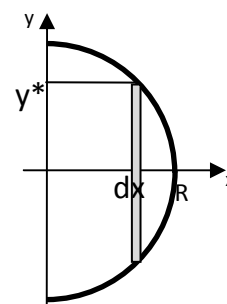
Polárkoordináta-rendszerben:

$dV = D \cdot r d\varphi dr$, az integrálási határok φ -re: $-\pi/2 \rightarrow +\pi/2$;

$x = r \cos\varphi$.

$$x_s = \frac{\int x \rho dV}{\int \rho dV} = \frac{\int_0^R \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (r \cos\varphi) \rho D \cdot r d\varphi dr}{M} = \frac{2}{R^2 \pi} \int_0^R r^2 \left(\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\varphi d\varphi \right) dr =$$

$$= \frac{2}{R^2 \pi} \int_0^R r^2 [\sin\varphi]_{-\pi/2}^{+\pi/2} dr = \frac{2}{R^2 \pi} \int_0^R r^2 \cdot 2 dr = \frac{4}{R^2 \pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{4}{R^2 \pi} \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3\pi} R.$$



9/7. Hol helyezkedik el egy homogén tömegeloszlású kúp súlypontja?

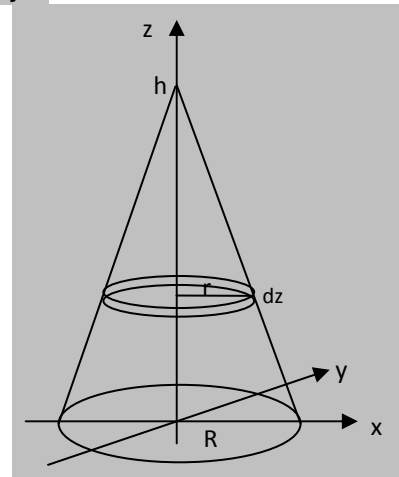
MO.

Szeleteljük fel a kúpot a szimmetriatengelyére – a z tengelyre – merőlegesen korongokra. Egy korong magassága dz, sugara z=0-nál R, z=h-nál 0, azaz $r = x = R(1 - z/h)$; térfogata $dV = x^2\pi dz = R^2(1-z/h)^2\pi dz$.

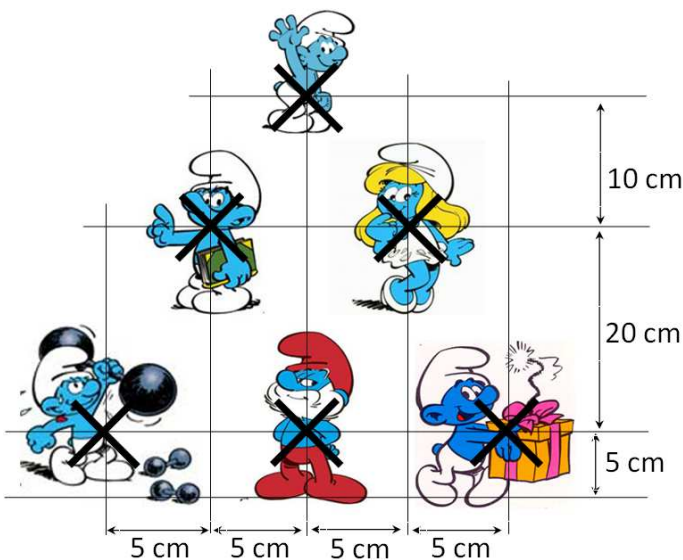
A kúp sűrűsége $\rho = m / V_{\text{kúp}} = m / (R^2\pi h/3)$.

A kúp tömegközéppontjának z koordinátája

$$\begin{aligned} z_s &= \frac{\int_0^h z \cdot \rho \cdot A(z) dz}{m} = \frac{1}{m} \int_0^h z \cdot \frac{3m}{R^2\pi h} \cdot R^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \pi dz = \\ &= \frac{3}{h^3} \int_0^h z \cdot (h - z)^2 dz = \frac{3}{h^3} \int_0^h (h^2z - 2hz^2 + z^3) dz = \\ &= \frac{3}{h^3} \left[\frac{h^2z^2}{2} - \frac{2hz^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right]_0^h = \dots = \frac{h}{4} \end{aligned}$$



Gyakorló feladatok zh-ra



9/8. A törpök fel szeretnének lépni a cirkuszban. A mutatvány az lesz, hogy gúlát alkotnak magukból – ahogy a képen láthatjuk. A keresztek az egyes törpök tömegközéppontját jelölik.

A törpök az alsó sorban balról jobbra: Törperős 1,5 kg; Törpapa 1,2 kg; Tréfi 1,2 kg; a középső sorban:

Okoska 0,9 kg; Törpilla 1,1 kg; legfelül Törpicur 0,5 kg.

Hol van a hat törp tömegközéppontja? Milyen messze van Törpapa tömegközéppontjától?

MO.

Válasszuk Törpapa tömegközéppontját origónak, akkor az egyes törpök helyvektorai (cm-ben): Törperős (-10;0), Törpapa (0;0), Tréfi (10;0), Okoska (-5;20), Törpilla (5;20), Törpicur (0;30).

A hat törp tömegközéppontja: $\mathbf{r}_s = (m_1\mathbf{r}_1 + \dots + m_6\mathbf{r}_6) / (m_1 + \dots + m_6)$

a vízszintes koordinátája

$$x_s = (-10 \cdot 1,5 + 0 \cdot 1,2 + 10 \cdot 1,2 - 5 \cdot 0,9 + 5 \cdot 1,1 + 0 \cdot 0,5) / (1,5 + 1,2 + 1,2 + 0,9 + 1,1 + 1,5) = -2 / 6,4 = -0,3125 \text{ cm}$$

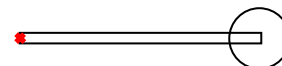
a függőleges koordinátája

$$y_s = (0 \cdot 1,5 + 0 \cdot 1,2 + 0 \cdot 1,2 + 20 \cdot 0,9 + 20 \cdot 1,1 + 30 \cdot 0,5) / (1,5 + 1,2 + 1,2 + 0,9 + 1,1 + 1,5) = 55 / 6,4 = 8,59375 \text{ cm}$$

A tömegközéppont távolsága Törpapától $d = \sqrt{0,3125^2 + 8,59375^2} \approx 8,60 \text{ cm}$

9/9. Az ábrán látható módon egy 0,8 m hosszú, 0,6 kg tömegű rúd végéhez egy 10 cm sugarú, 0,2 kg tömegű korongot erősítettünk. A rúd+korong a másik végén átmenő vízszintes tengely körül súrlódásmentesen elfordulhat.

Hol van a rúd+korong tömegközéppontja?



MO.

A rúd tömegközéppontja $L/2$ -re van a tengelytől, a korongé L -re, az egészé pedig

$$x_s = (\frac{1}{2} \cdot 0,6 + 0,2) / (0,6 + 0,2) = 0,5 \text{ m -re van a tengelytől.}$$

9/10. Az 1995-ös olimpia alkalmával történt, hogy az egyik rúdugró aranyat akart csempészni az ugrórúdjában. A rúdja 4 cm átmérőjű és 5 m hosszú volt, és szénszál erősítésű kevlarból készült, aminek sűrűsége $\rho_k = 1,5 \text{ kg/dm}^3$. A versenybizottság azonban megvizsgált minden rudat, és feltűnt nekik, hogy a rúd 6,7 dkg-mal nehezebb, mint az a fenti adatok alapján várható lenne, és ráadásul a súlypontja se a felénél van, hanem 1 cm-rel odébb.

Hol, mennyi arany volt a rúdban, ha az a rúd teljes keresztmetszetében, egy darabban volt belerakva? Az arany sűrűsége $\rho_{Au} = 19,3 \text{ kg/dm}^3$.

MO. Ha az egész rúd kevlarból lenne, a tömege

$$m_{tk} = \rho_k \cdot V_{rúd} = \rho_k \cdot L \cdot r^2 \pi = 19300 \cdot 5 \cdot 0,02^2 \pi \approx 9,425 \text{ kg lenne,}$$

$$\text{de az arannyal együtt a tömege } m_{rúd} \approx 9,425 + 0,067 = 9,492 \text{ kg.}$$

Legegyszerűbb úgy gondolkodnunk, hogy két testünk van:

– egy tiszta kevlar rúd (teljes hosszában, azaz ott is, ahol az arany van), és

– a 6,7 dkg plusz tömeg (ott, ahol az arany van),

és az aranydarabkának a tömegközéppontját vissza tudjuk számolni abból, hogy mennyivel tolódott el a rúd tömegközéppontjának koordinátája a közepéhez képest.

Tehát van $m_{tk} \approx 9,425 \text{ kg}$, aminek a tömegközéppontja a rúd felénél van, és

a plusz tömeg, $\Delta m = 0,067 \text{ kg}$, aminek ismeretlen a tömegközéppontja,

és így a teljes $m_{rúd} \approx 9,492 \text{ kg}$ tömegű rúd tömegközéppontja a végétől 2,51 m-re van:

$$x_s = 2,51 = \frac{2,50 \cdot 9,425 + x \cdot 0,067}{9,492}, \quad \text{amiből } x \approx \mathbf{3,917 \text{ m}} \text{ a rúd végétől,}$$

vagy

$$x'_s = 0,01 = \frac{x' \cdot 0,067}{9,492}, \quad \text{amiből } x' \approx \mathbf{1,417 \text{ m}} \text{ a rúd közepétől.}$$

9/11. 66 kg tömegű kötél-táncos súlypontja a kötélen felett 1 m magasságban van. Ugyanezen magasságban tartja a kezében lévő 6 m hosszú, 4 kg tömegű merev rudat, melynek két végén levő 2 m-es fonálon egy-egy ólomgolyó függ. Legalább milyen tömegűeknek kell lenniük a golyóknak ahhoz, hogy a rendszer (kötél-táncos + rúd + golyók) súlypontja a kötélen alá essék? (A rudat középütt fogja, a 2 m távolság a rúdtól a golyó középpontjáig értendő.)

9/12. Határozzuk meg a hamisjátékos 15 mm élhosszú, fából készült dobókockája súlypontjának helyzetét, ha egyik oldalába 1 mm vastag vaslemez épített be. A fa sűrűsége $0,5 \text{ g/cm}^3$, a vasé $7,8 \text{ g/cm}^3$.

9/13. Jancsi ül egy kis kocsiban két téglával, és úgy akarja elindítani a kocsit, hogy a téglákat kidobja a kocsiból. Jancsi tömege 48 kg, a kocsié 12 kg, egy tégláé 4 kg. Jancsi a *kocsihoz képest* 3 m/s-os sebességgel tudja eldobni a téglákat. A kocsi súrlódásmentesen mozoghat.

Mekkora lesz a sebessége a két téglá kidobása után, ha azokat

- a) egyszerre,
- b) egymás után dobja ki?

MO. impulzus-megmaradást felírva, a téglá sebességét véve pozitív iránynak

- a) $(48+12+2 \cdot 4) \cdot 0 = 2 \cdot 4 \cdot 3 + (48+12) \cdot v \rightarrow v = -24/60 = -0,4 \text{ m/s}$
- b) $(48+12+2 \cdot 4) \cdot 0 = 4 \cdot 3 + (48+12+4) \cdot v_1 \rightarrow v_1 = -12/64 = -0,1875 \text{ m/s}$
 $(48+12+4) \cdot v_1 = 4 \cdot (v_1+3) + (48+12) \cdot v_2 \rightarrow v_2 = (-12-11,25)/60 = -0,3875 \text{ m/s}$

9/14. Jancsi és Juliska állnak a jégen egymástól 12 m-re, fogják egy kötélt két végét.

- a) Hol van a tömegközéppontjuk az őket összekötő egyenes mentén, ha Jancsi 35 kg, Juliska 25 kg tömegű?
- Jancsi hirtelen elkezd húzni a kötelet. Egy pillanat alatt felgyorsulva mindketten súrlódásmentesen csúszni kezdenek egymás felé állandó sebességgel. Jancsi sebessége 1,5 m/s.
- b) Mennyi Juliska sebessége?
 - c) Milyen távol lesznek egymástól, amikor Jancsi 3 m-t csúszott?
- Ütközésük tökéletesen rugalmatlan ütközésnek tekinthető (összekapaszkodnak, nem eresztik el egymást). Az ütközésük 0,05 s-ig tartott.
- d) Mennyi lesz a közös sebességük?
 - e) Mennyi Juliska ill. Jancsi impulzusának változása?
 - f) Mekkora erő hatott Juliskára ill. Jancsira, ha feltesszük, hogy ütközéskor a köztük ható erő állandó volt?
 - g) Hány 'g' gyorsulást jelentett ez Juliskának ill. Jancsinak?

MO.

- a) Juliskától $x_s = (0 \cdot 25 + 12 \cdot 35) / (25+35) = 7 \text{ m}$ -re, Jancsitól 5 m-re.
- b) impulzus-megmaradással (mivel a külső erők eredője zérus), ha Jancsi sebessége pozitív:
 $m_{\text{Jancsi}} v_{\text{Jancsi}} + m_{\text{Juliska}} v_{\text{Juliska}} = 0 \Rightarrow v_{\text{Juliska}} = -2,1 \text{ m/s}$
- c) $s_{\text{Juliska}} / s_{\text{Jancsi}} = v_{\text{Juliska}} / v_{\text{Jancsi}}$, amíg Jancsi $s_{\text{Jancsi}} = 3 \text{ m}$ -t tesz meg, addig Juliska $s_{\text{Juliska}} = 4,2 \text{ m}$ -t, tehát a távolság köztük $d = 12 - (3+4,2) = 4,8 \text{ m}$
- d/ impulzus-megmaradással:

$$m_{\text{Jancsi}} v_{\text{Jancsi}} + m_{\text{Juliska}} v_{\text{Juliska}} = 0 = (m_{\text{Jancsi}} + m_{\text{Juliska}}) \cdot v_{\text{közös}} \rightarrow v_{\text{közös}} = 0$$

- e) $\Delta p_{\text{Juliska}} = 25 \cdot (0 - (-2,1)) = 52,5 \text{ kgm/s}$; $\Delta p_{\text{Jancsi}} = 35 \cdot (0 - 1,5) = -52,5 \text{ kgm/s}$
- f) $F_{\text{Juliska}} = \Delta p_{\text{Juliska}} / \Delta t = 52,5 / 0,05 = 1050 \text{ N}$; $F_{\text{Jancsi}} = \Delta p_{\text{Jancsi}} / \Delta t = -52,5 / 0,05 = -1050 \text{ N}$
- g) $a_{\text{Juliska}} = F_{\text{Juliska}} / m_{\text{Juliska}} = 1050/25 = 42 \text{ m/s}^2 = 4,2 \text{ g}$;
 $a_{\text{Jancsi}} = F_{\text{Jancsi}} / m_{\text{Jancsi}} = 1050/35 = 30 \text{ m/s}^2 = 3,0 \text{ g}$.

9/15. Egy 7 kg-os lövedék pályájának legfelső pontján, a kilövés után 3 s-mal két darabra robban szét. A robbanás egy, a kilövési ponttól 1200 m távolságban tartózkodó őrmester feje fölött történt, majd a robbanás után 1 s-mal egy 2 kg- os repeszdarab az őrmester lába elé esett. A kilövés helyétől milyen távolságban keressék a másik repeszdarabot?

MO.

Mivel a kilövéstől a robbanásig 3 s telt el és ezalatt 1200 m-t tett meg vízszintesen a lövedék, vízszintes sebessége $v_x = v_0 \cos\alpha = d / t_h = 1200 / 3 = 400$ m/s. Ez lesz a sebessége a robbanáskor, a robbanás ugyanis a pálya csúcspontján történik, amikor a repesz függőleges sebessége zérus: $v_z = v_0 \sin\alpha - g t_h = 0$. Utóbbiból kiszámítható a robbanás helyének magassága: a lövedék kezdősebességének függőleges komponense $v_{0z} = v_0 \sin\alpha = g t_h = 10 \cdot 3 = 30$ m/s volt, amivel $h = (v_0 \sin\alpha) t_h - \frac{1}{2} g t_h^2 = 30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 45$ m. A robbanás után az $m_1 = 2$ kg tömegű repeszdarab ebből a magasságból érkezett le $t_1 = 1$ s alatt, vagyis $h + v_{10} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0 \Rightarrow v_{10} = -40$ m/s függőleges kezdősebessége volt a robbanás után.

Az impulzus-megmaradást felírva a robbanásra:

$$M (v_0 \cos\alpha) \mathbf{i} = m_1 v_{10} \mathbf{k} + m_2 \mathbf{v}_2$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = (M v_0 \cos\alpha) / m_2 \mathbf{i} - (m_1 v_{10}) / m_2 \mathbf{k} = (7 \cdot 400 / 5) \mathbf{i} - (2 \cdot (-40) / 5) \mathbf{k} = 560 \mathbf{i} + 16 \mathbf{k} \text{ (m/s)}$$

lesz az 5 kg tömegű darab kezdősebessége. A helyvektora

$$\mathbf{r}(t) = (1200 + 560 t) \mathbf{i} + (45 + 16 t - 5 t^2) \mathbf{k} \text{ (m)}.$$

Ebből ki tudjuk számolni, hogy mikor és hol ér földet:

$$45 + 16 t_2 - 5 t_2^2 = 0 \Rightarrow t_2 \approx 5 \text{ s alatt ér földet}$$

$$d_2 = 1200 + 560 t_2 = 4000 \text{ m távolságban a kilövés helyétől.}$$

Nem zh-feladatok

9/16. Egy háromszög három csúcsában egyenlő tömegű golyók vannak. Mutassuk meg, hogy a három golyóból álló pontrendszer tömegközéppontja a háromszög súlypontjában helyezkedik el!

9/17. Határozzuk meg egy homogén félgömb súlypontjának helyzetét!

9/18. Egy egyenes csonkakúp alaplapjának sugara R, fedőlapjéé r. Milyen arányban osztja a súlypontja a magasságát? A csonkakúp anyaga homogén.

9/19. A levegő sűrűsége a $\rho = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}$ formulával leírható módon függ a h magasságtól. $\rho_0 = 1,2$ kg/m³, $p_0 = 10^5$ Pa.

Milyen magasan van egy egyenletes keresztmetszetű levegőoszlop tömegközéppontja?