

Az \mathbf{F} erő által végzett munka, ha a test adott pályán mozog az \mathbf{r}_1 helyvektorú P_1 pontból az \mathbf{r}_2 helyvektorú P_2 pontba, az alábbi vonalintegrállal számolható:

$$W_{P_1 P_2} = \int_{r_1}^{r_2} dW = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad [\text{az előadáson a jelölése } W_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}]$$

Általános esetben az erő függ a helytől: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_x(x,y,z) \mathbf{i} + F_y(x,y,z) \mathbf{j} + F_z(x,y,z) \mathbf{k}$,

és a pálya, amin a test mozog: $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \rightarrow d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$,

ezekkel $W_{P_1 P_2} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} \{F_x(x,y,z) dx + F_y(x,y,z) dy + F_z(x,y,z) dz\}$

Ez így csak akkor számolható ki, ha a pálya párhuzamos valamelyik koordinátatengellyel, azaz dx , dy , dz közül csak egy nem zérus.

Általános esetben a pályát t -vel (az idővel) paraméterezve adjuk meg:

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k} \rightarrow d\mathbf{r} = \left[\frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \right] dt,$$

és az erőt is t -vel paraméterezve fejezzük ki:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_x(x(t), y(t), z(t)) \mathbf{i} + F_y(x(t), y(t), z(t)) \mathbf{j} + F_z(x(t), y(t), z(t)) \mathbf{k},$$

ezekkel $W_{P_1 P_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ F_x(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + F_y(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + F_z(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right\} dt$.

Konzervatív az $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erőter akkor, ha $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Ekkor

- két pont között a munka független a választott úttól (azaz zárt görbére a munka zérus);
- létezik egy $E_{\text{pot}}(\mathbf{r})$ potenciális energia függvény, hogy $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\text{grad } E_{\text{pot}}(\mathbf{r})$, ilyenkor

az \mathbf{F} erő által végzett munka az A kiindulási és a B végpont potenciális energiájának különbségként számolható:

$$W_{AB} = -\Delta E_{\text{pot}} = -[E_{\text{pot}}(B) - E_{\text{pot}}(A)] = E_{\text{pot}}(A) - E_{\text{pot}}(B).$$

A munka előjelet vált, ha az ellentétes irányba megyünk az adott görbén.

A fentiek szerint kiszámolt munka az a munka, amit az adott erő végez a testen; az általunk az erőter ellenében végzendő munka ennek ellentettje.

$$\text{rot } \mathbf{F} \text{ kiszámolása: } \text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Az erőter meghatározása a potenciális energia függvényből:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } E_{\text{pot}} = - \left(\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

A potenciális energia függvény meghatározása az erőből: $E_{\text{pot}} = - \int_{r_0}^r \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}}$,

pl. ha a koordinátatengelyekkel párhuzamosan megyünk és $E_{\text{pot}}(0,0,0) = 0$, akkor

$$E_{\text{pot}} = - \left\{ \int_{0,0,0}^{x,0,0} F_x dx + \int_{x,0,0}^{x,y,0} F_y dy + \int_{x,y,0}^{x,y,z} F_z dz \right\};$$

de a konkrét számolások alapja sokszor inkább az $\mathbf{F} = -\text{grad } E_{\text{pot}}$ (ld. a feladatokat, pl. 7/2.2A).

$\mathbf{F}(\mathbf{r})$ helyett használatos az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ térerősség (egységnyi tömegű testre ható erő): $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) / m$ [N/kg], az ehhez tartozó potenciálfüggvény $U(\mathbf{r}) = E_{\text{pot}}(\mathbf{r}) / m$ [J/kg]; $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } U(\mathbf{r})$.

7/1. Határozzuk meg az m tömegű anyagi pontra ható $\mathbf{F} = (Ax+B)\mathbf{i} + Cz^2\mathbf{j} + (Dx+E)\mathbf{k}$ [N] erő munkáját, ha a test

- a) a $P_0(0,0,1)$ pontból a $P_1(0,2,1)$ pontba megy az y tengellyel párhuzamosan;
 b) a $P_2(2,0,1)$ pontból a $P_0(0,0,1)$ pontba megy az x tengellyel párhuzamosan;
 c) a $P_2(2,0,1)$ pontból a $P_1(0,2,1)$ pontba megy a két pontot összekötő egyenes mentén!

Hasonlítsuk össze az a) és b) feladatban kapott munka összegét a c) feladatével!

d) Konzervatív-e a fenti erőter?

e) Határozzuk meg az \mathbf{F} erő által végzett munkát az x - z síkban fekvő R sugarú, origó középpontú körön végzett teljes körülfordulásra!

f) Határozzuk meg az \mathbf{F} erő által végzett munkát az x - y síkban fekvő R sugarú, origó középpontú körön végzett teljes körülfordulásra!

MO.

a) Mivel az y tengellyel párhuzamosan megyünk, ezért $dx = dz = 0$:

$$W_{P_0P_1} = \int_{(0,0,1)}^{(0,2,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0,1)}^{(0,2,1)} F_y dy = \int_{(0,0,1)}^{(0,2,1)} Cz^2 dy = \int_0^2 C \cdot 1^2 dy = C \cdot \int_0^2 dy = C \cdot [y]_0^2 = 2C.$$

b) Most az x tengellyel párhuzamosan megyünk, ezért $dy = dz = 0$, tehát

$$W_{P_2P_0} = \int_{(2,0,1)}^{(0,0,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(2,0,1)}^{(0,0,1)} F_x dx = \int_2^0 (Ax + B) dx = \left[A \frac{x^2}{2} + Bx \right]_2^0 = -A \frac{2^2}{2} - 2B = -2A - 2B.$$

c) Írjuk fel az egyenes egyenletét t -vel paraméterezve, úgy, hogy $t_0 = 0$ -ban legyen a test a P_2 pontban és $t_2 = 1$ -ben legyen a test a P_1 pontban (így könnyű lesz az integrálási határokat behelyettesíteni a végén).

Az $\mathbf{r}(t)$ komponensei tehát $x = 2(1-t)$, $y = 2t$, $z = 1$, amiből $\frac{dx}{dt} = -2$, $\frac{dy}{dt} = 2$, $\frac{dz}{dt} = 0$;

a $d\mathbf{r}$ komponensei $dx = -2 dt$, $dy = 2 dt$, $dz = 0$; és $t: 0 \rightarrow 1$.

$$\begin{aligned} W_{P_2P_1} &= \int_{(2,0,1)}^{(0,2,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(2,0,1)}^{(0,2,1)} \left(F_x(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + F_y(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + 0 \right) dt = \\ &= \int_{(2,0,1)}^{(0,2,1)} \{ (Ax + B) \cdot (-2) + Cz^2 \cdot 2 \} dt = \int_0^1 \{ (A(2(1-t)) + B) \cdot (-2) + C \cdot 1^2 \cdot 2 \} dt = \\ &= \int_0^1 (-A \cdot 2^2 + A \cdot 2^2 t - B \cdot 2 + 2C) dt = \dots = -2A - 2B + 2C, \end{aligned}$$

vagyis ugyanannyi a munka a P_2 és P_1 pontok között, akár egyenes úton megyünk, akár a P_0 ponton keresztül a koordinátatengelyekkel párhuzamosan.

$$\text{d) } \text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Ax + B & Cz^2 & Dx + E \end{vmatrix} = -2Cz \mathbf{i} - D\mathbf{j}, \text{ tehát nem konzervatív az erőter.}$$

Megjegyzés: az xy síkban azért nézett ki konzervatívnak, mert $\text{rot } \mathbf{F}$ -nek a \mathbf{k} komponense zérus és eddig az x - y síkban fekvő pályákkal számoltunk, aminek a vektora: $d\mathbf{A} = dA \mathbf{k}$, így $\text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = 0$, és a Stokes-tétel szerint $\int \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \rightarrow$ zérus a vonalintegrál értéke zárt görbére.

e) Az x - z síkban fekvő R sugarú (origó középpontú) kör paraméteres alakja t -vel paraméterezve,

$t: 0 \rightarrow 2\pi$ választással

az $\mathbf{r}(t)$ komponensei $x = R \cos t$, $y = 0$, $z = R \sin t$
 $\rightarrow \frac{dx}{dt} = -R \sin t$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{dz}{dt} = R \cos t$;

a $d\mathbf{r}$ komponensei $dx = -R \sin t dt$, $dy = 0$, $dz = R \cos t dt$;

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} \{ (A \cdot R \cos t + B) \cdot (-R \sin t) + (C(R \sin t)^2) \cdot (0) + (D \cdot R \cos t + E) \cdot (R \cos t) \} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \{ -A \cdot R^2 \sin t \cdot \cos t - B \cdot R \sin t + D \cdot R^2 \cos^2 t + E \cdot R \cos t \} dt = \\ &= \left[\frac{A \cdot R^2}{4} \cos 2t + B \cdot R \cos t + D \cdot R^2 \left(\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2} \right) + E \cdot R \sin t \right]_0^{2\pi} = \left[D \cdot R^2 \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = D \cdot R^2 \pi \end{aligned}$$

VAGY: $W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$ felhasználásával:

kiszámoltuk, hogy $\text{rot } \mathbf{F} = -2Cz \mathbf{i} - D\mathbf{j}$

és mivel a kör az x-z síkban fekszik, aminek a normálvektora \mathbf{j} , ezért $d\mathbf{A} = dA \mathbf{j}$

tehát $W = \int \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int (-D) dA = -D \int dA = (-D) \cdot R^2\pi$

mivel az R sugarú kör területe $R^2\pi$, azaz $\int dA = R^2\pi$.

(A munka előjele a körüljárási iránytól függ.)

f) Az x-y síkban fekvő R sugarú (origó középpontú) kör paraméteres alakja $t: 0 \rightarrow 2\pi$ választással:

az $\mathbf{r}(t)$ komponensei $x = R \cos t, y = R \sin t, z = 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} = -R \sin t, \frac{dy}{dt} = R \cos t, \frac{dz}{dt} = 0$;

a $d\mathbf{r}$ komponensei $dx = -R \sin t dt, dy = R \cos t dt, dz = 0$;

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} \{(A \cdot R \cos t + B) \cdot (-R \sin t) + (C \cdot 0^2) \cdot (R \cos t) + (D \cdot R \cos t + E) \cdot (0)\} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \{-A \cdot R^2 \sin t \cdot \cos t - B \cdot R \sin t\} dt = \int_0^{2\pi} \left\{-\frac{1}{2} A \cdot R^2 \sin 2t - B \cdot R \sin t\right\} dt = \\ &= \left[\frac{A \cdot R^2}{4} \cos 2t + B \cdot R \cos t\right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

7/2. Adott a következő erőtér (egységnyi tömegű testre ható erő):

$$\mathbf{E} = -2(xy+z) \mathbf{i} - x^2 \mathbf{j} - (2x+5) \mathbf{k} \quad [\text{N/kg}]$$

Mekkora munkát végez egy $m = 5 \text{ kg}$ tömegű testen az erőtér, miközben a test az

$\mathbf{r}(t) = (t+2) \mathbf{i} - 3t \mathbf{j} + (t^2+1) \mathbf{k}$ görbe mentén a $P_0(2,0,1)$ pontból a $P_1(1,3,2)$ pontba mozog?

MO.

1.) Behelyettesítéssel látható, hogy P_0 -ban $t_0 = 0$, P_1 -ben $t_1 = -1$, tehát az integrálási határok: $t: 0 \rightarrow -1$.

$x(t) = t+2, y(t) = -3t, z(t) = t^2+1 \rightarrow \frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = -3, \frac{dz}{dt} = 2t \rightarrow d\mathbf{r} = (\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2t \mathbf{k}) dt$.

A térerősség most egységnyi tömegű testre van megadva ($\mathbf{E} = \mathbf{F} / m$), tehát $W = m \cdot \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$:

$$\begin{aligned} W &= m \cdot \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = m \cdot \int_{t_0}^{t_1} \left\{ E_x \cdot \frac{dx}{dt} + E_y \cdot \frac{dy}{dt} + E_z \cdot \frac{dz}{dt} \right\} dt = \\ &= 5 \cdot \int_0^{-1} \left\{ [-2((t+2) \cdot (-3t) + (t^2+1))] \cdot 1 + [-(t+2)^2] \cdot (-3) + [2(t+2) + 5] \cdot (2t) \right\} dt = \\ &= 5 \cdot \int_0^{-1} (3t^2 + 6t + 10) dt = \dots = -40 [J] \end{aligned}$$

2.) Más megoldás: konzervatív-e az erőtér?

$$\text{rot } \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2(xy+z) & -x^2 & -(2x+5) \end{vmatrix} = (0-0)\mathbf{i} - (-2-(-2))\mathbf{j} + (-2x-(-2x))\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

tehát az erőtér konzervatív \rightarrow létezik potenciálfüggvény

\rightarrow (2.A): előállítjuk az $E_{\text{pot}}(\mathbf{r})$ függvényt és

abból számoljuk ki a munkát: $W = -\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(P_0) - E_{\text{pot}}(P_1)$;

\rightarrow a munka tetszőleges úton számolva ugyanannyi

\rightarrow (2.B): egyszerűbb utat választunk az integráláshoz.

2.A) $E_{\text{pot}}(\mathbf{r})$ meghatározása: tudjuk, hogy $\mathbf{F} = -\text{grad } E_{\text{pot}}$, de mivel most \mathbf{F} helyett $\mathbf{E} = \mathbf{F}/m$ van megadva, ha ezzel számolunk, akkor az egységnyi tömegre vonatkozó potenciális energiát kapjuk meg, jelöljük ezt U -val: $U = E_{\text{pot}}/m$, és $\mathbf{E} = -\text{grad } U$.

Descartes-komponensekkel $\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}$, $-\text{grad } U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}\right)$;

a megfelelő komponenseknek egyenlőknek kell lenni, vagyis

$\partial U/\partial x = -E_x$, $\partial U/\partial y = -E_y$, $\partial U/\partial z = -E_z$, azaz ismerjük az $U(\mathbf{r})$ függvény parciális deriváltjait.

$$\partial U/\partial x = -E_x = 2(xy+z) \Rightarrow U = \int 2(xy+z) dx = x^2 y + 2xz + K_1(y,z);$$

itt K_1 olyan „konstans”, ami x -től nem függ, de függhet y -től és z -től; ezért jelöli $K_1(y,z)$.

Ennek y szerinti deriváltja $\partial U/\partial y = x^2 + \partial K_1(y,z)/\partial y$;

másrészt $\partial U/\partial y = -E_y = x^2 \Rightarrow \partial K_1(y,z)/\partial y = 0$, a konstans tehát független y -től, de függhet z -től:

$$\Rightarrow U = x^2 y + 2xz + K_2(z).$$

Ennek z szerinti deriváltja $\partial U/\partial z = 2x + \partial K_2(z)/\partial z$,

másrészt $\partial U/\partial z = -E_z = 2x + 5 \Rightarrow \partial K_2(z)/\partial z = 5 \Rightarrow K_2 = 5z \Rightarrow U = x^2 y + 2xz + 5z + K$.

A K konstans értékét válasszuk 0-nak (így $E_{\text{pot}} = 0$ az origóban)

Tehát a potenciálfüggvény egységnyi tömegre $U = x^2 y + 2xz + 5z$ [J/kg].

Megjegyzés: gyorsabban is összerakhatjuk az U függvényt:

$$\partial U/\partial x = -E_x = 2(xy+z) \Rightarrow U = \int 2(xy+z) dx = x^2 y + 2xz + k_1(y,z)$$

$$\partial U/\partial y = -E_y = x^2 \Rightarrow U = \int x^2 dy = x^2 y + k_2(x,z)$$

$$\partial U/\partial z = -E_z = 2x+5 \Rightarrow U = \int (2x+5) dz = 2xz + 5z + k_3(x,y)$$

Gyűjtsük össze a tagokat, de mindegyiket csak egyszer írjuk ki: $U(\mathbf{r}) = x^2 y + 2xz + 5z$.

Az erőter által végzett munka a kezdő- és a végpont potenciáljának a különbsége:

$$W/m = -\Delta U = -[U(P_1) - U(P_0)] = U(P_0) - U(P_1).$$

A $P_0(2,0,1)$ pontban $x_0=2, y_0=0, z_0=1 \rightarrow U(P_0) = 2^2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 9$ J/kg;

a $P_1(1,3,2)$ pontban $x_1=1, y_1=3, z_1=2 \rightarrow U(P_1) = 1^2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 17$ J/kg;

$W/m = U(2,0,1) - U(1,3,2) = 9 - 17 = -8$ J/kg,

tehát az $m = 5$ kg tömegű testen az erőter által végzett munka $W = 5 \cdot (-8) = -40$ J.

2.B) Mivel az erőter konzervatív, választhatunk más, a megadottnál egyszerűbb utat is a P_0 és P_1 pontok között (mivel ekkor a munka csak a kezdő- és végpontoktól függ).

Válasszuk azt az utat, amikor rendre az x, y, z tengelyek mentén megyünk:

$$P_0(2,0,1) \xrightarrow{x} (1,0,1) \xrightarrow{y} (1,3,1) \xrightarrow{z} P_1(1,3,2)$$

Amikor az x tengely mentén megyünk, behelyettesítjük E_x -be y és z értékét ($y=0, z=1$) és $x: 2 \rightarrow 1$;

amikor az y tengely mentén megyünk, behelyettesítjük E_y -ba x és z értékét ($x=1$ lett, $z=1$) és $y: 0 \rightarrow 3$;

amikor a z tengely mentén megyünk, behelyettesítjük E_z -be x és y értékét ($x=1, y=3$ lett) és $z: 1 \rightarrow 2$.

$$W = m \cdot \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 5 \cdot \left\{ \int_{(2,0,1)}^{(1,0,1)} -2(xy+z) dx + \int_{(1,0,1)}^{(1,3,1)} -x^2 dy + \int_{(1,3,1)}^{(1,3,2)} -(2x+5) dz \right\} =$$

$$= 5 \cdot \left\{ \int_2^1 -2(x \cdot 0 + 1) dx + \int_0^3 -1^2 dy + \int_1^2 -(2 \cdot 1 + 5) dz \right\} = \dots = -40 [J].$$

7/3. Egy erőhöz tartozó potenciális energiát az alábbi függvény adja meg:

$$E_{\text{pot}} = 2xy^2 + 16 - 3xz$$

a) Adjuk meg a potenciális energiához tartozó erőt!

b) Mekkora munkát végez a fenti erő, ha a test a $P_0(1,-2,3)$ pontból a $P_1(-4,5,-6)$ pontba mozog a pontokat összekötő egyenes mentén?

c) Mekkora erő hat a testre a P_0 kezdőpontban?

MO.

a) $\mathbf{F} = -\text{grad } E_{\text{pot}} = - ((2y^2 - 3z) \mathbf{i} + 4xy \mathbf{j} - 3x \mathbf{k}) = (-2y^2 + 3z) \mathbf{i} - 4xy \mathbf{j} + 3x \mathbf{k}$

b) A potenciális energiából

$$W = -\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(P_0) - E_{\text{pot}}(P_1) = [2 \cdot 1 \cdot (-2)^2 + 16 - 3 \cdot 1 \cdot 3] - [2 \cdot (-4) \cdot 5^2 + 16 - 3 \cdot (-4) \cdot (-6)] = [15] - [-256] = 271 \text{ J}.$$

Persze kiszámolhatjuk a munkát vonalintegrállal is:

$$\begin{aligned} W &= \int_{(1,-2,3)}^{(-4,-2,3)} F_x dx + \int_{(-4,-2,3)}^{(-4,5,3)} F_y dy + \int_{(-4,5,3)}^{(-4,5,-6)} F_z dz = \\ &= \int_1^{-4} (3 \cdot 3 - 2 \cdot (-2)^2) dx + \int_2^5 (-4 \cdot (-4)y) dy + \int_3^{-6} (3 \cdot (-4)) dz = \\ &= \int_1^{-4} 1 dx + \int_2^5 16y dy + \int_3^{-6} -12 dz = [x]_1^{-4} + [8y^2]_2^5 + [-12z]_3^{-6} = 271 \text{ J}. \end{aligned}$$

c) $\mathbf{F}(P_0) = (-2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot 3) \mathbf{i} - 4 \cdot 1 \cdot (-2) \mathbf{j} + 3 \cdot 1 \mathbf{k} = 1 \mathbf{i} + 8 \mathbf{j} + 3 \mathbf{k}$,

ennek nagysága (Pitagorasz-tétellel) $F(P_0) = \sqrt{74} \approx 8,602 \text{ N}$.

Gyakorló feladatok a zárthelyire

7/4. Határozzuk meg az $\mathbf{E} = 2(x+4) \mathbf{i} - 3z^2 \mathbf{j} + 2x^2 \mathbf{k}$ [N/kg] erőterét által egy $m = 2 \text{ kg}$ tömegű testen végzett munkát, ha a test

a) a $P_1(3,-1,2)$ [m] és a $P_2(3,1,2)$ [m] pontok között mozog egyenes pályán!

b) a $P_3(0,0,0)$ [m] és a $P_4(-5,4,3)$ [m] pontok között mozog rendre az x,y,z tengelyekkel párhuzamosan!

MO.

a) A mozgás itt csak az y tengellyel párhuzamosan történik, így $dx = dz = 0$.

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \cdot \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 2 \cdot \int_{(3,-1,2)}^{(3,1,2)} \{ 2(x+4)dx - 3z^2 dy + 2x^2 dz \} = 2 \cdot \int_{-1}^1 -3 \cdot 2^2 dy = \dots = -48 \text{ J}.$$

b)

$$\begin{aligned} W &= \int_{P_3}^{P_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \cdot \int_{(0,0,0)}^{(-5,4,3)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 2 \cdot \left\{ \int_{(0,0,0)}^{(-5,0,0)} 2(x+4)dx + \int_{(-5,0,0)}^{(-5,4,0)} -3z^2 dy + \int_{(-5,4,0)}^{(-5,4,3)} 2x^2 dz \right\} = \\ &= 2 \cdot \left\{ \int_0^{-5} 2(x+4)dx + \int_0^4 -3 \cdot 0^2 dy + \int_0^3 2 \cdot (-5)^2 dz \right\} = 2 \{ -15 + 0 + 150 \} = 270 \text{ J}. \end{aligned}$$

7/5. Adott a térerősség a következő alakban:

$$\mathbf{E} = (3x+2xz) \mathbf{i} + (2y^2+5xz) \mathbf{j} + 5xy \mathbf{k} \text{ [N/kg]}.$$

a) Állapítsuk meg, létezik-e potenciál, és ha igen, adjuk meg!

b) Mekkora munkát végez az erőteret, ha egy $m = 2 \text{ kg}$ tömegű test mozog egy egyenes mentén

a) $P_1(1,2,-1)$ [m] pontból a $P_2(-1,2,0)$ [m] pontba?

MO.

$$\text{a) } \text{rot } \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x+2xz & 2y^2+5xz & 5xy \end{vmatrix} = (5x-5x)\mathbf{i} - (5y-2x)\mathbf{j} + (5z-0)\mathbf{k} = (2x-5y)\mathbf{j} + 5z\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

tehát nem létezik potenciál.

b) A P_0 -ból P_1 -be mutató egyenes egyenlete t -vel paraméterezve, P_0 -nál $t=0$, P_1 -nél $t=1$ választással:

$$\mathbf{r}(t) = (-2t+1)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k} \rightarrow d\mathbf{r} = (-2\mathbf{i} + \mathbf{k}) dt.$$

$$W = m \cdot \int_{r_0}^{r_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = m \cdot \int_{t_0}^{t_1} \left\{ E_x \cdot \frac{dx}{dt} + E_y \cdot \frac{dy}{dt} + E_z \cdot \frac{dz}{dt} \right\} dt =$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 \left\{ [3 \cdot (-2t+1) + 2 \cdot (-2t+1) \cdot (t-1)] \cdot (-2) + [2 \cdot 2^2 + 5(-2t+1) \cdot (t-1)] \cdot 0 + [5(-2t+1) \cdot 2] \cdot 1 \right\} dt =$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 \{8t^2 - 20t + 8\} dt = \dots = \frac{4}{3} \text{ J}.$$

7/6. Határozzuk meg az $\mathbf{F} = [(2x+z) \cdot \ln(y)]\mathbf{i} + [(x^2+xz)/y]\mathbf{j} + [x \cdot \ln(y)]\mathbf{k}$ erő által végzett munkát, miközben a test az $\mathbf{r} = (5-2t)\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4t\mathbf{k}$ egyenes mentén a $P_0(7,3,4)$ pontból a $P_1(5,3,0)$ pontba jut! (Az erő N-ban, az r m-ben értendő.)

Konzervatív az erőter?

MO.

$$d\mathbf{r} = (-2\mathbf{i} - 4\mathbf{k}) dt$$

az integrálási határok (behelyettesítéssel): P_0 -ban $t_0 = -1$, P_1 -ben $t_1 = 0$

$$W = \int_{t_0}^{t_1} [F_x \cdot \frac{dx}{dt} + F_z \cdot \frac{dz}{dt}] dt \quad \text{mert } dy=0$$

$$W = \int_{-1}^0 [(2(5-2t) - 4t) \cdot \ln 3 \cdot (-2) + (5-2t) \cdot \ln 3 \cdot (-4)] dt = \dots = -52 \cdot \ln 3 \approx -57,1 \text{ J}$$

Konzervatív, ha $\text{rot } \mathbf{F} = \dots = 0$

$$\text{rot } \mathbf{F} = (x/y - x/y)\mathbf{i} - (\ln(y) - \ln(y))\mathbf{j} + ((2x+z)/y - (2x+z)/y)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

tehát konzervatív az erőter \rightarrow

eszerint az **a)** feladatot számolhatjuk máshogy is, mehetünk pl. a tengelyekkel párhuzamosan:

$$W = \int_{(7,3,4)}^{(5,3,4)} F_x dx + \int_{(5,3,4)}^{(5,3,0)} F_z dz = \int_{(7,3,4)}^{(5,3,4)} (2x+4)\ln 3 dx + \int_{(5,3,4)}^{(5,3,0)} 5 \cdot \ln 3 dz = \dots = -52 \cdot \ln 3 ;$$

VAGY előállíthatjuk a potenciális energia függvényét: $E_{\text{pot}} = -(x^2 + xz) \cdot \ln(y)$

$$\text{és kiszámolhatjuk ebből a munkát: } W = -\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(P_0) - E_{\text{pot}}(P_1) = -77 \cdot \ln 3 - (-25 \cdot \ln 3) = -52 \cdot \ln 3$$

7/7. Egy $\mathbf{E} = (3-2y)\mathbf{i} - 2(x+yz)\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$ alakú erőterben egységnyi tömegű test mozog az

$$\mathbf{r} = (t^2+1)\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} \text{ görbe mentén.}$$

a) Konzervatív-e az erőter?

b) Mekkora munkát végez az erőter, míg a $P_0(2,-2,-2)$ pontból a $P_1(2,0,2)$ pontba jut a test?

MO.

$$\mathbf{a) rot } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3-2y & -2(x+yz) & -y^2 \end{bmatrix} = (-2y+2y)\mathbf{i} - (0-0)\mathbf{j} + (-2+2)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

tehát az erőter konzervatív.

b) A munkát számolhatjuk a potenciálból:

$$\partial U / \partial x = -E_x = -(3-2y), \quad \partial U / \partial y = -E_y = 2(x+yz), \quad \partial U / \partial z = -E_z = y^2 \rightarrow$$

a potenciál $U = -3x + 2xy + y^2z$, ezzel

$$W = -\Delta E_{\text{pot}} = m \cdot (-\Delta U) = 1 \cdot (U(P_0) - U(P_1)) = [-3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) + (-2)^2 \cdot (-2)] - [-3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 0^2 \cdot 2] = -16 \text{ J}.$$

VAGY: $\mathbf{dr}/dt = 2t \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$, és P_0 -ban $t_0 = -1$, P_1 -ben $t_1 = 1$;

$$W = \int_{-1}^1 [(3 - 2(t - 1)) \cdot 2t - 2((t^2 + 1) + (t - 1)2t) \cdot 1 - (t - 1)^2 \cdot 2] dt = \\ = \int_{-1}^1 [-12t^2 + 18t - 4] dt = -16 \text{ J}.$$

VAGY: mivel az erőtér konzervatív, a munka számolható más utat választva is, pl. a koordinátatengelyekkel párhuzamosan haladva.

7/8. Mekkora munkát végez az $\mathbf{E} = (y-3) \mathbf{i} + (x-2z^2) \mathbf{j} - 4yz \mathbf{k}$ erőtér egy $m = 1,8 \text{ kg}$ tömegű testen, ha a test a $P_0(-1,1,2)$ pontból a $P_1(5,1,2)$ pontba mozog az $\mathbf{r} = (2-3t) \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$ görbe mentén? Konzervatív-e az erőtér?

MO.

$$\mathbf{rot E} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-3 & x-2z^2 & -4yz \end{bmatrix} = (-4z + 4z)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + (1 - 1)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

tehát az erőtér konzervatív.

A munkát számolhatjuk a potenciálból:

$$\partial U/\partial x = -E_x = -(y-3), \quad \partial U/\partial y = -E_y = -(x-2z^2), \quad \partial U/\partial z = -E_z = 4yz \rightarrow$$

a potenciál $U = 3x - xy + 2yz^2$, ezzel

$$W/m = U(P_0) - U(P_1) = [3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2^2] - [3 \cdot 5 - 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2^2] = -12 \text{ J/kg}.$$

VAGY vonalintegrállal: $\mathbf{dr}/dt = -3 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$, és P_0 -ban $t_0 = 1$, P_1 -ben $t_1 = -1$

$$W/m = \int_1^{-1} [(t^2 - 3) \cdot (-3) + ((2 - 3t) - 2 \cdot 2^2) \cdot 2t + 0] dt = -3 \int_1^{-1} [3t^2 + 4t - 3] dt = -12 \text{ J/kg}.$$

VAGY: mivel az erőtér konzervatív, a munka számolható más utat választva is, legegyszerűbben úgy, hogy az x tengellyel párhuzamosan megyünk a P_0 -ból a P_1 -be:

$$W/m = \int_{(-1,1,2)}^{(5,1,2)} (y-3) dx = \int_{-1}^5 (1-3) dx = -2 \int_{-1}^5 dx = -2[x]_{-1}^5 = -12 \text{ J/kg}.$$

Az $1,8 \text{ kg}$ tömegű testen végzett munka $W = -1,8 \cdot 12 = -21,6 \text{ J}$.

7/9. Egy test az

$$\mathbf{r}(t) = (t-2) \mathbf{i} - 2t \mathbf{j} + (2t^2-1) \mathbf{k} \text{ [m]} \text{ görbe mentén mozog}$$

$$\text{a } P_0(0, -4, 7) \text{ [m]} \text{ pontból a } P_1(-2, 0, -1) \text{ [m]} \text{ pontba.}$$

Mekkora munkát végez eközben a testen az

$$\mathbf{F} = (2xy+z) \mathbf{i} + 3xz \mathbf{j} + (y^2-x) \mathbf{k} \text{ [N]} \text{ erő?$$

MO.

Ha kiszámoljuk $\mathbf{rot F}$ -et, látjuk, hogy az nem zérus ($\mathbf{rot F} = (2y-3x)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (3z-2x)\mathbf{k}$), tehát a munkát mindenképpen az előírt vonalintegrállal kell kiszámolni.

Behelyettesítéssel látható, hogy P_0 -ban $t_0 = 2$, P_1 -ben $t_1 = 0$, tehát az integrálási határok: $t: 2 \rightarrow 0$.

$$\text{A } \mathbf{dr} \text{ vektor: } \frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = -2, \frac{dz}{dt} = 4t, \text{ tehát } \mathbf{dr} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4t \mathbf{k}) dt$$

$$x(t) = (t-2), y(t) = -2t, z(t) = (2t^2-1) \text{ behelyettesítésével}$$

$$W = \int_{r_0}^{r_1} \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{dr} =$$

$$= \int_2^0 \{ (2(t-2)(-2t) + (2t^2-1)) \cdot 1 + (3(t-2)(2t^2-1)) \cdot (-2) + ((-2t)^2 - (t-2)) \cdot 4t \} dt =$$

$$= \int_2^0 \{ 4t^3 + 18t^2 + 22t - 13 \} dt = [t^4 + 6t^3 + 11t^2 - 13t]_2^0 = -82 \text{ J}$$

7/10. Adott a következő erőter:

$$\mathbf{E} = (y-3) \mathbf{i} + (x-2z^2) \mathbf{j} - 4yz \mathbf{k} \quad [\text{N/kg}]$$

Mekkora munkát kell végeznünk a fenti erőter ellen, ha egy egységnyi tömegű testet mozgatunk az $x = 3$ [m] síkban fekvő $y^2 + z^2 = 4$ egyenletű kör mentén pozitív irányban a $P_0(3,2,0)$ [m] pontból a $P_1(3,-2,0)$ [m] pontba?

MO. $m = 1 \text{ kg} \rightarrow \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{E} = (y-3) \mathbf{i} + (x-2z^2) \mathbf{j} - 4yz \mathbf{k} \quad [\text{N}]$

$$\mathbf{r}(t) = 3 \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + 2 \sin t \mathbf{k}$$

$$d\mathbf{r} = (-2 \sin t \mathbf{j} + 2 \cos t \mathbf{k}) dt$$

$$P_0\text{-ban } t = 0, \quad P_1\text{-ben } t = \pi$$

$$W = \int_0^\pi [(3 - 2 \cdot 4 \sin^2 t)(-2 \sin t) - (4 \cdot 2 \cos t \cdot 2 \sin t) \cdot (2 \cos t)] dt = \dots =$$

$$= \int_0^\pi (-38 \sin t + 48 \sin^3 t) dt = \left[38 \cos t - \frac{48 \cos t \sin^2 t}{3} - \frac{2 \cdot 48 \cos t}{3} \right]_0^\pi = -12 \text{ J}$$

$W = -12 \text{ J}$ munkát végezne az erőter, azaz nekünk 12 J munkát kell végeznünk.

Más megoldás:

rot $\mathbf{E} = \dots = \mathbf{0}$, tehát az erőter konzervatív.

A potenciál $U = 3x - xy + 2yz^2$ [J/kg],

az erőter által végzett munka $W/m = -\Delta U = U(P_0) - U(P_1) = -12 \text{ J/kg}$,

az egységnyi tömegén általunk végzendő munka $W = 12 \text{ J}$.

Nem zh feladatok

7/11. Keressük meg az alábbi helyzeti energia függvényekhez tartozó erőtereket!

a) $E_{\text{pot}} = ax + by + cz$

c) $E_{\text{pot}} = A \cdot z \cdot e^{ax+by}$

b) $E_{\text{pot}} = A \cdot e^{ax+by+cz}$

d) $E_{\text{pot}} = A (ax + by + cz)^{-1}$

MO.

a) $\mathbf{F} = -\text{grad } E_{\text{pot}} = -(a \mathbf{i} + b \mathbf{j} + c \mathbf{k})$

b) $\mathbf{F} = -A (a \cdot e^{ax+by+cz} \mathbf{i} + b \cdot e^{ax+by+cz} \mathbf{j} + c \cdot e^{ax+by+cz} \mathbf{k}) = -A \cdot e^{ax+by+cz} (a \mathbf{i} + b \mathbf{j} + c \mathbf{k}) = -E_{\text{pot}} (a \mathbf{i} + b \mathbf{j} + c \mathbf{k})$

(Bevezetve az $a \mathbf{i} + b \mathbf{j} + c \mathbf{k} = \mathbf{v}$ vektort az E_{pot} felírható $E_{\text{pot}} = A \cdot e^{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}$ alakban.)

7/12. Keressük meg az alábbi erőterekhez tartozó helyzeti energia függvényt, ha van! (Ha csak bizonyos feltételek teljesülése esetén létezik helyzeti energia, akkor adjuk meg a szükséges feltételeket!)

a) $\mathbf{F} = a \mathbf{i} + b \mathbf{j} + c \mathbf{k}$

c) $\mathbf{F} = ay \mathbf{i} + bx \mathbf{j} + cz \mathbf{k}$

b) $\mathbf{F} = ax \mathbf{i} + by \mathbf{j} + cz \mathbf{k}$

d) $\mathbf{F} = a(x^2 + y^2 + z^2)(x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})$

MO.

a) **rot** $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $E_{\text{pot}} = -(ax + by + cz)$ (ami felírható rövidebben: $E_{\text{pot}} = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$)

b) **rot** $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $E_{\text{pot}} = -\frac{1}{2} (a x^2 + b y^2 + c z^2)$

c) **rot** $\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ay & bx & cz \end{vmatrix} = (b - a) \mathbf{k}$

vagyis akkor van csak potenciális energia, ha $b = a$; ekkor $E_{\text{pot}} = -(a xy + \frac{1}{2} c z^2)$