## Hajítás – összefoglalás

A testre állandó erő hat, így a gyorsulása állandó: $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m = \text{konst.}$, méghozzá $\mathbf{a} = \mathbf{g}$.

Mutasson a koordinátarendszerünk z tengelye az erővel ellentétes irányba: $\mathbf{F}/m = -g\,\mathbf{k}$, így ha a test a t=0 -ban az $\mathbf{r_0}$ pontból indul $\mathbf{v_0}$ sebességgel:

$$\mathbf{a} = -g\,\mathbf{k} = \dot{\mathbf{v}} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v_0} - gt\,\mathbf{k} = \dot{\mathbf{r}} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r_0} + \mathbf{v_0}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{k}\,.$$

Forgassuk úgy a koordinátarendszerünket a z tengely körül úgy, hogy a $\mathbf{v_0}$ kezdősebességnek csak x és z irányú komponense legyen:

$$\mathbf{v_0} = v_{0x}\,\mathbf{i} + v_{0z}\,\mathbf{k} = v_0\cos\alpha\,\mathbf{i} + v_0\sin\alpha\,\mathbf{k}$$

ahol $\alpha$ a kezdősebességnek a vízszintessel bezárt szöge;

ezzel a test sebessége:

$$\mathbf{v}(t) = v_0\cos\alpha\,\mathbf{i} + (v_0\sin\alpha - gt)\,\mathbf{k}\,,$$

vagyis $v_x = v_0\cos\alpha$, $v_y = 0$, $v_z(t) = v_0\sin\alpha - gt$.

A test helyvektora, ha az $\mathbf{r_0} = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k}$ pontból indult:

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + (v_0\cos\alpha)\cdot t)\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + (z_0 + (v_0\sin\alpha)\cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2)\,\mathbf{k}$$

Ha lehet úgy választani, legyen $\mathbf{r_0} = \mathbf{0}$, ezzel

$$\mathbf{r}(t) = (v_0\cos\alpha)\cdot t\,\mathbf{i} + ((v_0\sin\alpha)\cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2)\,\mathbf{k}\,,$$

vagyis $x(t) = (v_0\cos\alpha)\cdot t$, $y(t) = 0$, $z(t) = (v_0\sin\alpha)\cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2$ .

<u>A hajítás pályája:</u>

$x(t) = (v_0\cos\alpha)\cdot t \quad\Rightarrow\quad t = x\,/\,(v_0\cos\alpha)$ ,

$z(t) = (v_0\sin\alpha)\cdot t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2$ , amibe t-t behelyettesítve

$$z(x) = \mathrm{tg}\alpha\cdot x - \frac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2}\cdot x^2,$$ a pálya tehát parabola.

<u>A hajítás magassága</u>: $h = z_{max}$ , azaz amikor $dz/dt = v_z = 0$:

$v_0\sin\alpha - gt_h = 0 \quad\Rightarrow\quad t_h = v_0\sin\alpha/g$ időben éri el a pálya legfelső pontját

$$\Rightarrow\quad h = z(t_h) = v_0\sin\alpha\cdot\frac{v_0\sin\alpha}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{(v_0\sin\alpha)^2}{2g}.$$

(Vagy kiszámolható a pályából, a $dz/dx=0$ feltételből.)

<u>A hajítás távolsága</u>: azonos z indulási és érkezési magasság esetén! $d = x(t_d)$, ahol $z(t_d) = 0$:

$(v_0\sin\alpha)\cdot t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad t_d = 2\,\dfrac{v_0\sin\alpha}{g} = 2\,t_h$ (mivel a pálya szimmetrikus)

$$\Rightarrow\quad d = x(t_d) = v_0\cos\alpha\cdot 2\,\frac{v_0\sin\alpha}{g} = \frac{{v_0}^2\sin 2\alpha}{g}\,.$$

(Vagy kiszámolható a pálya egyenletéből: $z(x) = 0$.)

**3/1.** Egy függőlegesen feldobott kő sebessége 2 s múlva 4 m/s …
**a)** … felfelé,
**b)** … lefelé.
Mekkora volt a kezdősebesség, és milyen maximális magasságot ért el?

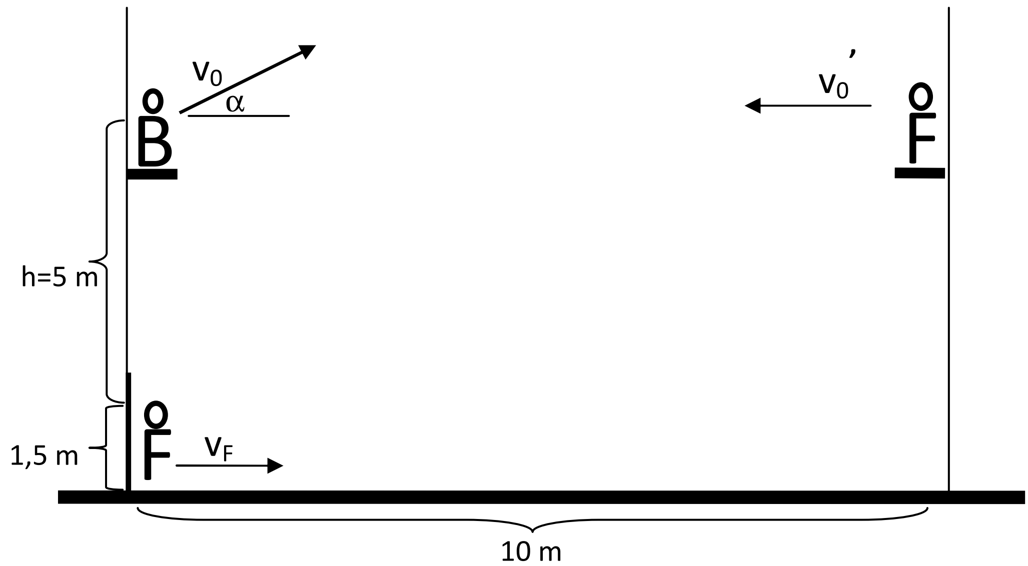
**MO.**
(próbáljunk elszakadni attól, hogy külön írjuk fel a felfelé ill. a lefelé haladó mozgást!)
$v_z(t) = v_0 \sin\alpha - gt = v_0 - gt$
$v_z$ és $v_0$ pozitív, ha felfelé mutat, ill. negatív, ha lefelé.
$v_z(2) = v_0 - g\cdot 2 = v_0 - 20 \quad \rightarrow \quad v_0 = v_z(2) + g\cdot 2 = v_z(2) + 20$ [m/s]
**a)** $v_z(2) = 4$ m/s $\quad v_0 = 24$ m/s és $h = v_0^2 / (2g) = 28{,}8$ m
**b)** $v_z(2) = -4$ m/s $\quad v_0 = 16$ m/s és $h = 12{,}8$ m

**3/2.** 3,2 m magasról eldobunk egy követ $v_0$ = 2,8 m/s kezdősebességgel, a vízszinteshez képest felfelé 26°-os szöggel.
**a)** Hol van a kő 0,1 s múlva?
**b)** Adjuk meg a test sebességének komponenseit 0,5 s-mal az elhajítás után!
**c)** Mikor ér a kő vissza ugyanabba a magasságba, amilyen magasról eldobtuk? Mekkora, milyen irányú ekkor a sebessége? Milyen távol van ekkor az eldobás helyétől?
**d)** Mikor és hol ér földet a kő? Mekkora sebességgel, milyen irányban csapódik be?

**MO.**
$v_{0x} = 2{,}8\cdot\cos 26° \approx 2{,}517$ m/s , $\quad v_{0z} = 2{,}8\cdot\sin 26° \approx 1{,}227$ m/s .
Legyenek a kiindulási pont koordinátái $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 3{,}2$ m.
**a)** $x(t) = v_x t_a = v_{0x} t_a$ : $\quad x(0{,}1) = 2{,}517\cdot 0{,}1 \approx 0{,}2517$ m ,
$z(t) = z_0 + v_{0z}\, t_a - ½\, g\, t_a^2$ : $\quad z(0{,}1) = 3{,}2 + 1{,}227\cdot 0{,}1 - 5\cdot 0{,}1^2 \approx 3{,}273$ m (7,3 cm-rel magasabban).
**b)** $v_x = v_{0x}$ = konst. $\approx 2{,}517$ m/s, $v_z = v_{0z} - g t_b \approx 1{,}227 - 5 \approx -3{,}773$ m/s (már lefelé megy).
**c)** Visszaér az eredeti magasságra: $z_0 + v_{0z}\, t_c - ½\, g\, t_c^2 = z_0 \;\rightarrow\; t_c = 2v_{0z}/g \approx 0{,}2455$ s alatt.
Eddigre vízszintesen $x(t_c) = v_x t_c = v_{0x} t_c \approx 0{,}6178$ m-tesz meg, ilyen távol van a kiindulási ponttól.
$v_x$ = konst.; $v_z = v_{0z} - g t_c = v_{0z} - g\cdot(2v_{0z}/g) = -v_{0z}$, vagyis a sebességének függőleges komponense ugyanakkora, mint a kezdősebességé volt, csak most lefelé mutat: $v_z(t_c) = -v_{0z} \approx -1{,}227$ m/s.
A sebesség nagysága tehát most is 2,8 m/s, és a vízszintessel most is 26°-os szöget zár be, de most lefelé, azaz –26°-ot.
**d)** Földet érés: $z_0 + v_{0z}\, t_d - ½\, g\, t_d^2 = 0$ , azaz $3{,}2 + 1{,}227\, t_d - 5 t_d^2 = 0 \;\rightarrow\; t_d \approx 0{,}9321$ s alatt.
Eddigre vízszintesen $x(t_d) = v_x t_d = v_{0x} t_d \approx 2{,}346$ m-t tesz meg.
$v_x$ = konst.; $v_z(t_d) = v_{0z} - g t_d \approx -8{,}094$ m/s. A sebesség nagysága tehát $v(t_d) \approx 8{,}476$ m/s,
a vízszintessel bezárt szöge arc tg $(-8{,}094/2{,}517) \approx -72{,}73°$.

**3/3.** Béni áll az emeleti erkélyen. Abban a pillanatban, amikor Frédi kilép az utcára, Béni $v_0$ = 2 m/s sebességgel elhajít egy hógolyót. Frédi sebessége $v_F$ = 1 m/s.
**a)** Milyen $\alpha$ szögben kell elhajítania, hogy a hógolyó Frédi fejére essék?
**b)** Mennyi idő múlva találja el?
**c)** A kaputól milyen távolságra találja el?

**d)** Frédi felmegy az utca másik oldalán lévő ház erkélyére és megcélozza a vele egy magasságban lévő barátját. Béni megijed, az elhajítás pillanatában leugrik az erkélyről (szabadesésnek vegyük!). Mi történik, ha Frédi $v_0' = 20$ m/s kezdősebességgel vízszintesen hajított?
**e)** Mekkora minimális $v_0^*$ kezdősebességgel kell Frédinek vízszintesen hajítania, hogy még éppen eltalálja Bénit?




**MO.**
A hógolyó akkor esik Béni fejére, amikor a hógolyó és Frédi fejének helyvektora megegyezik.
Frédi fejének magasságát vegyük $z = 0$ -nak (1,5 m-rel a járda fölött);
Frédi fejének vízszintes komponense $x_F = v_F \cdot t = 1 \cdot t$
(x=0 a kapunál van és az x tengely arra mutat, amerre Frédi megy);
a hógolyó vízszintes komponense $x_h = (v_0 \cdot \cos\alpha) \cdot t = (2 \cdot \cos\alpha) \cdot t$;
a hógolyó függőleges komponense $z_h = h + (v_0 \cdot \sin\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 5 + (2 \cdot \sin\alpha) \cdot t - 5 t^2$.

**a)** A vízszintes komponensek ($x_F = x_h$) egyenlőségéből
$\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \pm 60°$. (Vegyük észre, hogy a hógolyó mindig Frédi feje fölött van!)
A vízszinteshez képest 60°-os szögben kell eldobnia akár ferdén felfelé, akár ferdén lefelé.
**b)** A függőleges komponensek egyenlőségéből:
$5 + (2 \cdot \sin 60°) \cdot t_{1f} - 5 t_{1f}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1f} \approx 1{,}188$ s, ha felfelé, ill.
$5 - (2 \cdot \sin 60°) \cdot t_{1l} - 5 t_{1l}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1l} \approx 0{,}8417$ s, ha lefelé dobja.
**c)** Bármelyik vízszintes elmozdulásból $x_F = x_h = 1 \cdot t_1 \approx 1{,}188$ m ill. $x = 0{,}8417$ m.

**d)** Most Béni fejének és a másik hógolyónak a helyvektorát kell felírni:
Béni feje: $x_B = 0$, $z_B = h - \frac{1}{2} g t^2 = 5 - 5t^2$,
a második hógolyó: $x_{h2} = d - v_0' t = 10 - 20t$, $z_{h2} = h - \frac{1}{2} g t^2 = 5 - 5t^2$.
Ekkor tehát Béni feje és a hógolyó mindig egy magasságban van – a kérdés tehát az, hogy vízszintesen átér-e a hógolyó Béni fejéhez, mielőtt leesnének a $z = 0$-ra:
$5 - 5t_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 1$ s alatt esnek le,
de $x_{h2} = 10 - 20t_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_3 = 0{,}5$ s alatt a hógolyó már eléri Béni fejét
és eltalálja $z_B = z_{h2} = 5 - 5t_3^2 = 3{,}75$ m magasságban.
**e)** Ahhoz, hogy maximum $t_2 = 1$ s alatt $x_{h2} = d - v_0^* t_2 = 0$ legyen, $v_0^* = 10$ m/s.

**3/4.** 360 km/h vízszintes sebességű, magasan repülő repülőgépről kiejtenek egy tárgyat. Milyen kezdősebességgel kell 10 s-mal később egy másik tárgyat utána dobni, hogy az első tárgy kiesése után 14 s-mal találja el a kiejtett tárgyat?

**MO.**
A repülő sebessége $v_r = 360\ \mathrm{km/h} = 100\ \mathrm{m/s}$.
Vegyük fel az x tengelyt abba az irányba, amerre a gép repül.

Az első test helyvektora $\mathbf{r_1}(t) = \mathbf{r_0} + v_r\, t\, \mathbf{i} - ½\, g\, t^2\, \mathbf{k} = \mathbf{r_0} + 100\, t\, \mathbf{i} - 5\, t^2\, \mathbf{k}$.

A testek a gép elhagyása után megtartják a vízszintes sebességüket. A vízszintes sebesség nem változik, mivel a közegellenállás elhanyagolható, tehát vízszintes irányú erő nem hat a testekre.
Az első test tehát mindig a repülőgép alatt van. Ez azt jelenti, hogy a második testet függőleges kezdősebességgel kell kihajítani a gépről.
A második testet 10 s-mal később dobják ki, ezért a függőleges komponensében szereplő idő t–10:

$\mathbf{r_2}(t) = \mathbf{r_0} + v_r\, t\, \mathbf{i} + [v(t-10) - ½g(t-10)^2]\, \mathbf{k} = \mathbf{r_0} + 100\, t\, \mathbf{i} + [v(t-10) - 5(t-10)^2]\, \mathbf{k}$.

Mivel $\mathbf{r_1}(14) = \mathbf{r_2}(14)$, azaz $z_1(14) = z_2(14)$: $-5\cdot 14^2 = v\cdot 4 - 5\cdot 4^2 \Rightarrow v = -225\ \mathrm{m/s}$.

**3/5.** Két ferde hajítás kezdősebességének nagysága és a hajítás távolsága azonos. Az egyik hajítás maximális magassága a másik négyszerese. Számítsuk ki a hajítási idők arányát!

**MO.**
A kezdősebességek megegyeznek: $v_{01} = v_{02}$, a hajítás szöge $\alpha_1$ ill. $\alpha_2$.
A két hajítás távolsága megegyezik:
$d_1 = v_{01}^2 \sin 2\alpha_1 /g = d_2 = v_{02}^2 \sin 2\alpha_2 /g \Rightarrow \sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2$ [1]
A maximális magasságok aránya 1:4 :
$h_1 = v_{01}^2 \sin^2\alpha_1/(2g) = 4h_2 = 4\cdot v_{02}^2 \sin^2\alpha_2/(2g) \Rightarrow \sin^2\alpha_1 = 4\sin^2\alpha_2 \Rightarrow \sin\alpha_1 = 2\sin\alpha_2$ [2]
A kérdés: $\frac{t_{h1}}{t_{h2}} = \frac{2\frac{v_{01}\sin\alpha_1}{g}}{2\frac{v_{02}\sin\alpha_2}{g}} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$ (felhasználva, hogy $v_{01} = v_{02}$).
Mivel a [2] egyenletből $\sin\alpha_1 = 2\sin\alpha_2 \Rightarrow \frac{t_{h1}}{t_{h2}} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = 2$ a hajítási idők aránya.
Bár nem volt kérdés, de az [1] egyenletből kiindulva meghatározható a két hajítás szöge is:
$\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2 \Rightarrow 2\alpha_1 = 180° - 2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 90° - \alpha_1 \Rightarrow \sin\alpha_2 = \sin(90° - \alpha_1) = \cos\alpha_1$

Felhasználva, hogy $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = 2$: $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = tg\,\alpha_1 = 2 \Rightarrow \alpha_1 = 63{,}43°, \alpha_2 = 26{,}57°$.
[Vagy: $\sin 2\alpha_1 = 2\sin\alpha_1\cos\alpha_1 = \sin 2\alpha_2 = 2\sin\alpha_2\cos\alpha_2 \Rightarrow 2\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \Rightarrow \ldots$ ]

**Gyakorló feladatok a zárthelyire:**

**3/6.** Milyen szög alatt kell vízszintes terepen elhajítani egy testet, hogy a hajítási magasság megegyezzen a hajítási távolsággal?

**MO.**
$h = d$: $v_0^2 \sin^2\alpha /(2g) = v_0^2 \sin 2\alpha /g \Rightarrow 2 \sin 2\alpha = \sin^2\alpha \Rightarrow tg\,\alpha = 4 \Rightarrow \alpha \approx 76°$

**3/7.** h = 40 m magas torony tetejéről 45°-os szög alatt (fölfelé) elhajítanak egy testet $v_0$ = 40 m/s kezdősebességgel. Mekkora a távolság a kiindulási és földre érkezési pont között?

**MO.** A test helyvektorának
függőleges komponense $z(t) = h + (v_0 \sin\alpha)\cdot t - ½gt^2 = 40 - (40\cdot\sin45°)\cdot t - 5\cdot t^2$ ,
földet éréskor $z(t^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad t^* = 6{,}83$ s ;
vízszintes komponense: $x(t) = (v_0 \cos\alpha)\cdot t = (40\cdot\cos 45°)\cdot t$ ,
földet éréskor $x(t^*) = 193{,}1$ m .
A távolság a kiindulási és földet érési pont között $d = \sqrt{40^2 + 193{,}1^2} \approx 197{,}2\ m$
(Nem a „hajítás távolsága" képlet alkalmazandó, mivel a kiindulási és a földet érési pont nem azonos magasságon van.)

**3/8.** 7920 m magasságban állandó, 960 km/h vízszintes sebességgel haladó repülőgépről leesett az egyik ajtó. Szupermen is azon a repülőgépen utazott, de éppen aludt. 10 s-ig tartott, amíg felébresztették és elmondták neki, mi történt. Ekkor azonnal (0 s alatt) odaszaladt az ajtó helyén tátongó lyukhoz és …
**a)** … függőlegesen lefelé $v_0$ kezdősebességgel elrugaszkodva utána ugrott az ajtónak.
Mekkora kezdősebességgel ugrott ki Szupermen, ha 3 s alatt érte utol az ajtót?
**b)** … zérus kezdősebességgel, de különleges képességeit felhasználva állandó nagyságú, függőleges gyorsulással indult az ajtó után (ez a gyorsulás hozzáadódik a nehézségi erőből eredő gyorsulásához). Legalább mekkorának kellett lenni ennek a gyorsulásnak, hogy még a levegőben elérje az ajtót?
A g értékét vegyük 9,9 m/$s^2$-nek, a légellenállást hanyagoljuk el.

**MO.** Ha a légellenállást elhanyagolhatjuk, akkor a leesett ajtóra nem hat vízszintes irányú erő, megtartja a repülőgép sebességével megegyező vízszintes sebességkomponensét, mindig a repülőgép alatt lesz. A feladat megoldásához elég a z koordinátát felírni.
**a)** 10+3 s alatt az ajtó $s = ½ \cdot 9{,}9\cdot 13^2 = 836{,}6$ m -t zuhant.
Szupermen $t_S = 3$ s alatt $v_0$ kezdősebességről indulva tesz meg ekkora utat:
$s = v_0 t_S + ½ g\cdot t_S^2 \;\Rightarrow\; v_0 = (836{,}55 - ½ \cdot 9{,}9\cdot 3^2) / 3 = 264$ m/s.
**b)** Az ajtó h = 7920 m magasságból $t_a = \sqrt{2h/g} = 40$ s alatt ér földet. Ennél 10 s -mal kevesebb idő alatt kell Szupermennek földet érnie, ha még a levegőben el akarja kapni az ajtót.
$s = ½ (g+a)t^2 \;\Rightarrow\; a = 2s/t^2 - g = 2\cdot 7920/(40-10)^2 - 9{,}9 = 7{,}7$ m/$s^2$.

**3/9.** 50 m/s kezdősebességgel függőlegesen felfelé hajítanak egy tárgyat. Ugyanakkor 50 m magasról szabadeséssel leesik egy másik tárgy. Mikor és milyen magasan találkoznak?
**MO**. 1,0 s múlva, 45 m magasságban

**3/10.** Mekkora kezdősebességgel kell az origóból a vízszinteshez képest 60°-os szög alatt eldobni egy labdát, hogy az a P (4,3) pontba érkezzen?
**MO.** $x = (v_0 \cos60°)\, t = 4$ ; $z = (v_0 \sin60°)\, t - ½ gt^2 = 3 \quad \rightarrow \quad t = 0{,}8864$ s, $v_0 = 9{,}026$ m/s

**… és még ld. a kirakott zh-kat!**

**Egyéb: nem hajítás, de hasonló: konstans erő hatására mozgó test (zh-ban előfordulhat)**

**3/11.** Egy m = 1 g tömegű test a $t_1$ = 2 s időben az x tengely pozitív felén van az origótól $x_1$ = 10 cm-re, sebessége a +y tengely irányába mutat és nagysága $v_1$ = 10 cm/s. A test a $t_2$ = 5 s időpontban a $P_2$ (–0,5 cm, 15 cm, 0) pontban van, a sebessége a –x tengely irányába mutat és nagysága $v_2$ = 7 cm/s. A testre állandó erő hat.
**a)** Mekkora az erő nagysága?
**b)** Mekkora a test sebessége a $t_3$ = 8 s időpontban, és hol lesz a test akkor?

**MO.** Állandó erő esetén a gyorsulás állandó: **F**/m = **a** = konst. , azaz $\dot{\mathbf{v}}$ = konst., $\ddot{\mathbf{r}}$ = konst.

⇒ integrálással a sebességvektor: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}\cdot t + \mathbf{v}(0)$,
és a helyvektor: $\mathbf{r}(t) = ½\, \mathbf{a}\cdot t^2 + \mathbf{v}(0)\cdot t + \mathbf{r}(0)$.

A feladatban adott volt a helyvektor és a sebességvektor 2-2 időben:

$t_1 = 2$ s: $\mathbf{r}(2) = 0{,}1\ \mathbf{i}$ [m], $\mathbf{v}(2) = 0{,}1\ \mathbf{j}$ [m/s],
$t_2 = 5$ s: $\mathbf{r}(5) = -0{,}005\ \mathbf{i} + 0{,}15\ \mathbf{j}$ [m], $\mathbf{v}(5) = -0{,}07\ \mathbf{i}$ [m/s].

A fenti általános képletekbe behelyettesítve tehát

$½\, \mathbf{a}\cdot 2^2 + \mathbf{v}(0)\cdot 2 + \mathbf{r}(0) = 0{,}1\ \mathbf{i}$ , $\mathbf{a}\cdot 2 + \mathbf{v}(0) = 0{,}1\ \mathbf{j}$
$½\, \mathbf{a}\cdot 5^2 + \mathbf{v}(0)\cdot 5 + \mathbf{r}(0) = -0{,}005\ \mathbf{i} + 0{,}15\ \mathbf{j}$ , $\mathbf{a}\cdot 5 + \mathbf{v}(0) = -0{,}07\ \mathbf{i}$

3 ismeretlen vektorunk van: **a**, **v**(0) és **r**(0) és 4 egyenletünk, a feladat túlhatározott; **v**(2) és **v**(5) értékéből megkapjuk **a** és **v**(0) értékét, és bármelyik **r** -ből **r**(0)-at.

**a)** A gyorsulást megkapjuk a sebességekből:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(5) - \mathbf{v}(2)}{5-2} = -\frac{0{,}07}{3}\mathbf{i} - \frac{0{,}1}{3}\mathbf{j} \quad \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

Ennek nagysága $a = \frac{1}{3}\sqrt{0{,}07^2 + 0{,}1^2} = \frac{\sqrt{0{,}0149}}{3} \approx 0{,}04\ \mathrm{m/s^2}$,

a testre ható erő nagysága pedig $F = ma \approx 10^{-3}\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}04\ \mathrm{m/s^2} = 4\cdot 10^{-5}$ N.

**b)** A test kezdősebessége $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(t_1) - \mathbf{a}t_1 = \mathbf{v}(t_2) - \mathbf{a}t_2 = \frac{0{,}14}{3}\mathbf{i} + \frac{0{,}5}{3}\mathbf{j}$,

tehát a test sebessége $\mathbf{v}(t) = \left(-\frac{0{,}07}{3}t + \frac{0{,}14}{3}\right)\mathbf{i} + \left(-\frac{0{,}1}{3}t + \frac{0{,}5}{3}\right)\mathbf{j}$.

$t_3$ = 8 s-ban $\mathbf{v}(8) = \mathbf{a}\cdot 8 + \mathbf{v}(0) = -0{,}14\ \mathbf{i} - 0{,}1\ \mathbf{j}$, ennek nagysága $v(8) = \sqrt{0{,}14^2 + 0{,}1^2} \approx 0{,}17\ \mathrm{m/s}$.

A test helyvektora t = 0 s-ban

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(t_1) - 1/2\,\mathbf{a}t_1^{\,2} - \mathbf{v}(0)\cdot t_1 = \mathbf{r}(t_2) - 1/2\,\mathbf{a}t_2^{\,2} - \mathbf{v}(0)\cdot t_2 = \frac{0{,}16}{3}\mathbf{i} - \frac{0{,}80}{3}\mathbf{j},$$

tehát a test helyvektora

$$\mathbf{r}(t) = \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}07}{3}t^2 + \frac{0{,}14}{3}t + \frac{0{,}16}{3}\right)\mathbf{i} + \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}1}{3}t^2 + \frac{0{,}5}{3}t - \frac{0{,}80}{3}\right)\mathbf{j}.$$

$t_3$ = 8 s-ban $\mathbf{r}(8) = ½\, \mathbf{a}\cdot 8^2 + \mathbf{v}(0)\cdot 8 + \mathbf{r}(0) = \ldots = -0{,}32\ \mathbf{i}$ [m]

Megjegyzés: a fenti képletekbe a t = 0 s-hoz tartozó **v**(0) és **r**(0) értékeket írtuk be, de a **v**(t) és **r**(t) függvényeket felírhatjuk tetszőleges $t_0$ időhöz tartozó $\mathbf{v}(t_0)$ és $\mathbf{r}(t_0)$ értékekkel:

$\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}\cdot(t-t_0) + \mathbf{v}(t_0)$ , $\mathbf{r}(t) = ½\, \mathbf{a}\cdot(t-t_0)^2 + \mathbf{v}(t_0)\cdot(t-t_0) + \mathbf{r}(t_0)$ .

Így kiszámolhatjuk **v**(8)-at és **r**(8)-at úgy is, hogy nem kell számolni **v**(0)-t és **r**(0)-t. Ráadásul esetünkben $t_3$ és $t_2$ között ugyanannyi idő telik el, mint $t_2$ és $t_1$ között, Δt = 3 s, és mivel a gyorsulás állandó, ezért ugyanannyit változik a sebesség is ($\Delta\mathbf{v} = \mathbf{a}\cdot\Delta t$), azaz

$\mathbf{v}(8) = \mathbf{v}(5) + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(5) + [\ \mathbf{v}(5) - \mathbf{v}(2)\ ]$ ,
vagy az is igaz, hogy $\mathbf{v}(8) = \mathbf{v}(2) + 2\cdot\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(2) + 2\cdot[\ \mathbf{v}(5) - \mathbf{v}(2)\ ]$.
A helyvektor számolásánál pedig
$\mathbf{r}(8) = ½\ \mathbf{a}\cdot(8-5)^2 + \mathbf{v}(5)\cdot(8-5) + \mathbf{r}(5)$ vagy $\mathbf{r}(8) = ½\ \mathbf{a}\cdot(8-2)^2 + \mathbf{v}(2)\cdot(8-2) + \mathbf{r}(2)$.

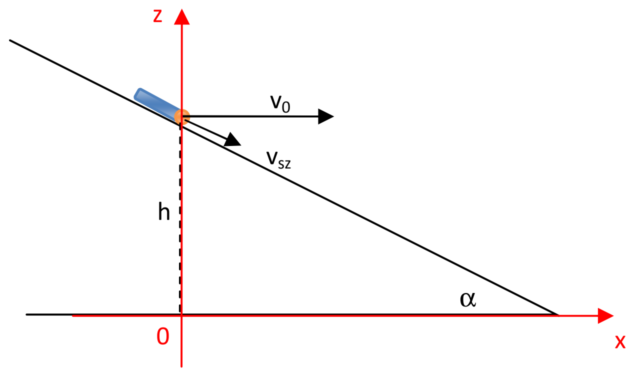
**Nehezebb hajításos feladatok, zh-ban nem várhatók ilyenek:**

**3/12.** Egy $\alpha = 30°$ hajlásszögű, $h = 1{,}6$ m magas lejtő tetejéről elengedünk egy ládát. Ugyanebben az időpontban a lejtő tetejéről egy labdát úgy dobunk el, hogy az a lejtő legalján éppen a ládába essen. Mekkora és milyen irányú kezdősebességgel kell a labdát eldobni? A láda és a lejtő közötti súrlódási együttható $\mu = \sqrt{3}/8$.
**MO.**
A láda súrlódással csúszik lefelé a lejtőn, a mozgásegyenlete
lejtőre merőlegesen: $ma_\perp = 0 = F_{ny} - mg\cos\alpha$
lejtővel párhuzamosan: $ma_\parallel = mg\sin\alpha - \mu F_{ny}$
tehát a gyorsulása a lejtő síkjában
$a = a_\parallel = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\, g = (\sin 30° - \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 30°)\cdot 10 = (0{,}5 - \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot 10 = 3{,}125\ \mathrm{m/s^2}$ .
Zérus kezdősebességről indulva $s = h / \sin\alpha = 1{,}6 / \sin 30° = 3{,}2$ m-t tesz meg a láda a fenti gyorsulással:
$s = \frac{a}{2}t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3{,}2}{3{,}125}} \approx 1{,}43\ s$ alatt ér le a láda.
Ennyi idő alatt kell a labdának ugyanabba a pontba érkeznie, azaz ha az origóból indul,
vízszintesen $h / \mathrm{tg}\alpha = 1{,}6 / \mathrm{tg}30° \approx 2{,}77$ m-t tesz meg és az $x \approx 2{,}77$ [m] pontba,
függőlegesen $h = 1{,}6$ m-t tesz meg és a $z = -1{,}6$ [m] pontba érkezik.
azaz $x = (v_0\cos\alpha)\, t = (v_0\cos\alpha)\cdot 1{,}43 = 2{,}77$
$z = (v_0\sin\alpha)\, t - g/2\ t^2 = (v_0\sin\alpha)\cdot 1{,}43 - g/2\cdot 1{,}43^2 = -1{,}6$
$\rightarrow v_0 \approx 6{,}34$ m/s, $\alpha \approx 72{,}2°$.

**3/13.** Állandó hajlásszögű egyenes lejtőn csúszunk lefelé a szánkónkkal $v_{sz} = 3$ m/s állandó sebességgel. A súrlódási együttható $\mu = 0{,}14$. A szánkó elején van egy csúzli, ami vízszintesen, $v_0 = 16$ m/s kezdősebességgel tud kilőni egy golyót. A lejtő végénél van egy céltábla. Milyen magasságban kell a mozgó szánkóból a csúzlit kilőni, hogy eltaláljuk a céltáblát?

**MO.**
A lejtő hajlásszögét abból tudjuk kiszámolni, hogy a szánkó – amit gyorsít a nehézségi erőnek a lejtővel párhuzamos komponense és fékez a súrlódási erő – állandó sebességgel csúszik, vagyis a (lejtővel párhuzamos) gyorsulása zérus: $ma_\parallel = mg\sin\alpha - \mu F_{ny} = 0$.
A lejtőre merőleges mozgásegyenletből: $ma_\perp = F_{ny} - mg\cos\alpha$ tudjuk, hogy $F_{ny} = mg\cos\alpha$,
és így a lejtővel párhuzamos mozgásegyenlet $ma_\parallel = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0$
$\rightarrow \mu = 0{,}14 = \mathrm{tg}\alpha \rightarrow \alpha = \mathrm{arc\ tg}\ 0{,}14 \approx 8°$ .
A szánkó sebességének vízszintes komponense $v_{sz,x} = v_{sz}\cdot\cos\alpha \approx 2{,}971$ m/s ,
függőleges komponense $v_{sz,z} = v_{sz}\cdot\sin\alpha \approx 0{,}416$ m/s.
A kilőtt golyó sebességének vízszintes komponense $v_{g0,x} = v_{sz,x} + v_0 \approx 2{,}971+16 = 18{,}971$ m/s ,
kezdősebességének függőleges komponense $v_{g0,z} = v_{sz,z} \approx 0{,}416$ m/s.

A koordinátarendszert az ábra szerint választva a golyó az $x = 0$, $z = h$ pontból indul és az $x = h/\mathrm{tg}\alpha$, $z = 0$ pontba kell megérkezzen, tehát




x: $(v_{sz,x} + v_0) \cdot t = h / \mathrm{tg}\alpha$

z: $h - v_{sz,z} \cdot t - ½\, g\, t^2 = 0.$

Az elsőből h-t kifejezve és átírva a másodikba

$(v_{sz,x} + v_0) \cdot t \cdot \mathrm{tg}\alpha - v_{sz,z} \cdot t - ½\, g\, t^2 = 0$,

amiből $t = 2\, v_0\, \mathrm{tg}\alpha / g \approx 0{,}448$ s és

visszahelyettesítve

**h** $= 2\, v_0\, \mathrm{tg}\alpha\, (v_{sz} \sin\alpha + v_0\, \mathrm{tg}\alpha) / g$ ≈ **1,19 m** .

**3/14.** A 200 m magas hegy talppontjától (a hegycsúcs alatti ponttól) 500 m-re lévő puska irányzékát milyen (legkisebb) szögre kell állítani, hogy átlőjön a hegycsúcs fölött? Mennyi idő telik el, amíg a puskagolyó a hegy csúcsa fölé érkezik? A puskagolyó kezdősebessége 1000 m/s.

**MO.**

vízszintesen $x = v_0\, t \cos\alpha$ : $500 = 1000\, t \cos\alpha \Rightarrow t \cos\alpha = 0{,}5$

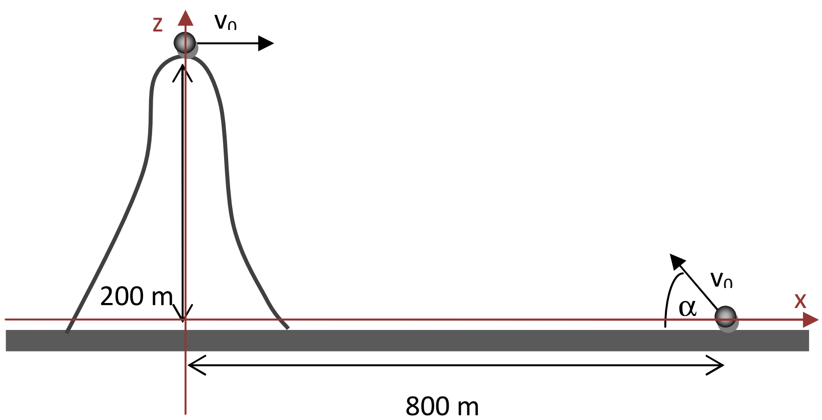
függőlegesen $z = v_0\, t \sin\alpha - ½\, g\, t^2$ : $200 = 1000\, t \sin\alpha - 5\, t^2 \Rightarrow t \sin\alpha = t^2/200 + 0{,}2$

Felhasználva, hogy $(t \cos\alpha)^2 + (t \sin\alpha)^2 = t^2$, egy $t^2$-ben másodfokú egyenletet kapunk:

$0{,}25 + t^4 / 40000 + 0{,}002\, t^2 + 0{,}04 = t^2$, amiből $t_1 = 0{,}539$ s és $t_2 = 199{,}8$ s.

A megfelelő szögek: $\alpha_1 = 21{,}93°$ (ez a minimális) és $\alpha_2 = 89{,}86°$ (ezt már veszélyes kipróbálni!)

**3/15.** A hegyről lövik a síkságon lévő lőállásokat. A hegyen és a síkságon lévő ágyúk egyformák, az ágyúgolyók kezdősebessége $v_0 = 500$ m/s. A hegyen lévő ágyú csöve vízszintesen áll. A síkságon lévő ágyúból a golyót pont 1 s-mal azután lövik ki, hogy meglátták a hegyi ágyú torkolattüzét. Sikerül is az ágyúgolyót még a levegőben eltalálni és eltéríteni a céltól. Hol találja el egymást a két ágyúgolyó? Mekkora a síkságon lévő ágyú csövének a vízszintessel bezárt szöge?




**MO.** A hegycsúcsról kilőtt ágyúgolyó helyvektora, ha az origó a hegy talppontjában van, az x tengely a síkságon lévő ágyú felé mutat, és az ágyúgolyót t = 0-ban lőtték ki:

$$\mathbf{r_1}(t) = 500t\, \mathbf{i} + (200 - 10/2t^2)\, \mathbf{k}\,,$$

a síkságon kilőtt ágyúgolyó helyvektora pedig

$$\mathbf{r_2}(t) = [800 - 500 \cdot \cos\alpha(t-1)]\, \mathbf{i} + [500 \cdot \sin\alpha(t-1) - 10/2(t-1)^2]\, \mathbf{k}$$

A két ágyúgolyó helyvektora egyenlő kell legyen; komponensenként felírva:

x koordináta: $500t = 800 - 500 \cdot \cos\alpha(t-1)$

z koordináta: $200 - 10/2t^2 = 500 \cdot \sin\alpha(t-1) - 10/2(t-1)^2$

Az első egyenletből $\cos\alpha(t-1) = (800-500t)/500 = 1{,}6-t$ ,

a másodikból $\sin\alpha(t-1) = (205-10t)/500 = 0{,}41-0{,}02t$ .

Ezeket négyzetre emelve és összeadva egy t-ben másodfokú egyenletet kapunk, aminek a megoldása $t_1 \approx 1{,}42$ s és $t_2 \approx 3040$ s.

A $t_1$ -ből számolt szög $\alpha_1 \approx 64{,}9°$, és az ágyúgolyók találkozásának helye

$x_1(t_1) = 500\cdot1{,}42 = x_2(t_1) = 800-500\cdot\cos64{,}9°\cdot0{,}42 \approx 711$ m

$z_1(t_1) = 200-5\cdot1{,}42^2 = z_2(t_1) = 500\cdot\sin64{,}9°\cdot0{,}42-5\cdot0{,}42^2 \approx 190$ m

$\mathbf{r}(t_1) = 711\,\mathbf{i} + 190\,\mathbf{k}$ [m].

A $t_2$ -ből számolt szög $\alpha_2 \approx 178{,}9°$,

és az ágyúgolyók találkozásának helye

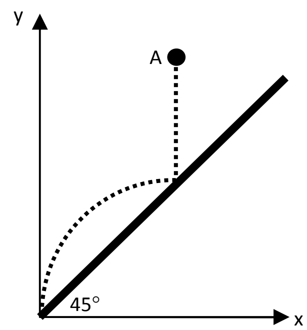
$x_1(t_2) = 500\cdot3040 = x_2(t_2) = 800-500\cdot\cos178{,}9°\cdot3039 \approx 1{,}52\cdot10^6$ m

$z_1(t_2) = 200-5\cdot3040^2 = z_2(t_2) = 500\cdot\sin178{,}9°\cdot3039-5\cdot3039^2 \approx -4{,}62\cdot10^7$ m

ami nem lehetséges, mert a föld felszínét (a $z = 0$-t) előbb elérik az ágyúgolyók.

(Ha a Föld sokkal nagyobb lenne – vagy a Föld lapos lenne -, és a homogén erőtér közelítés érvényes lehetne ekkora távolságon is, és az ágyúgolyók földet érési pontja előtt elkezdődne egy $4{,}62\cdot10^7$ m mély kráter, akkor lenne csak értelme ennek a megoldásnak.)

**3/16.** Melyek azok a pontok, amelyekből elejtve az A golyót, az a 45°-os lejtőről rugalmasan ütközve éppen a lejtő aljára pattan?




**MO.**

A golyó a lejtő fölött h magasságból indul, így a lejtőre érkezéskor v* (függőleges irányú) sebessége lesz:

$$z = -h = -\tfrac{1}{2}gt_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \Rightarrow \quad v^* = gt_1 = \sqrt{2gh}\,.$$

A lejtőről való elpattanáskor ez lesz a vízszintes irányú kezdősebessége, mivel a lejtő 45°-os. Egyenesen a lejtő aljába pattan, így vízszintesen $x = v^*\,t_2$, függőlegesen $z = \tfrac{1}{2}\,g\,t_2^2$ utat tesz meg, és mivel a lejtő 45°-os, $x = z$, azaz $v^*\,t_2 = \tfrac{1}{2}\,g\,t_2^2$ .

Ebből $t_2 = 2v^*/g$ és $x = z = 2\,v^{*2}/g$ , v*-t beírva $x = z = 4h$,

azaz azok a pontok, ahonnan elejtve a golyót, az a lejtőn rugalmasan ütközve éppen a lejtő aljára pattan, a $z = 5/4\,x$ egyenes pontjai.

**EGY IGAZÁN HALADÓ HAJÍTÁSOS FELADAT: (nem zh-ra való)**

**3/17.** A vízszinteshez képest mekkora szög alatt kell adott h magasságból adott $v_0$ kezdősebességgel elhajítani egy tárgyat, hogy az a lehető legmesszebb érjen földet?

**MO.**

h magasságból indulva $t_d$ időben 0 legyen a z test koordinátája:

$z(t_d) = 0 = h + (v_0 \sin\alpha)\, t_d - ½\, g\, t_d^2$ → $h = ½\, g\, t_d^2 - (v_0 \sin\alpha)\, t_d$

és eközben vízszintesen megtesz d távolságot:

$x(t_d) = d = (v_0 \cos\alpha)\, t_d$ . Ennek keressük a maximumát, ha $\alpha$ változhat ($v_0$ adott).

Rendezzük az egyenleteket úgy, hogy $t_d$-t kifejezve az egyikből és áthelyettesítve a másikba felírjuk d-t $\alpha$ függvényében, majd megkeressük a $d(\alpha)$ függvény szélsőértékét (deriváljuk $\alpha$ szerint és megoldjuk a $dd/d\alpha = 0$ egyenletet).

Tehát d-ből $t_d = d/(v_0\cos\alpha)$ →

$h = ½\, g/(v_0\cos\alpha)^2 \cdot d^2 - (v_0 \sin\alpha)/(v_0\cos\alpha) \cdot d$ , azaz $d^2 - (v_0^2/g)\cdot\sin2\alpha \cdot d - 2h(v_0^2/g)\cos^2\alpha = 0$

→ $d(\alpha) = \left(\frac{v_0^2}{2g}\right) sin2\alpha + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2 sin^2 2\alpha + 2h\left(\frac{v_0^2}{g}\right) cos^2\alpha}$ és

$$\frac{dd}{d\alpha} = \left(\frac{v_0^2}{g}\right) cos2\alpha + \frac{\left(\frac{v_0^2}{g}\right) sin2\alpha\, cos2\alpha - 2h\left(\frac{v_0^2}{g}\right) sin2\alpha}{2\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2 sin^2 2\alpha + 2h\left(\frac{v_0^2}{g}\right) cos^2\alpha}} = 0$$

Hosszas rendezgetés után ebből megkapjuk, hogy $ctg^2\alpha = 1 + \frac{2gh}{v_0^2}$ .