

1/1. Egy motorcsónak a folyón felfelé halad, és szembetalálkozik egy tutajjal. A találkozás után egy órával a motor elromlik. A javítás fél órát vesz igénybe (közben a folyóval együtt sodródnak), és utána a motorcsónak a folyón – bekapcsolt motorral – lefelé megy, majd az első találkozás helyétől 7,5 km-re éri utol a tutajt.

Tételezzük fel, hogy a motorcsónak a folyóhoz képest állandó v_{cs} sebességgel halad, a tutaj pedig a folyóval együtt mozog v_f sebességgel.

Mennyi a folyó sebessége? Mennyi a csónak sebessége?

MO. A feladat azt demonstrálja, hogy a **vonatkoztatási rendszer** megfelelő választásával a megoldás menete egyszerűbb is lehet. Oldjuk meg **(1)** a parthoz rögzített, **(2)** a tutajhoz rögzített koordinátarendszerben felírva a mozgást.

(1) A koordinátarendszerünk x tengelyét helyezük el a parttal párhuzamosan; origója legyen ott, ahol a motorcsónak és a tutaj először találkoznak; az x tengely pozitív értékei legyenek azok, amerre a folyó folyik. A folyó sebessége a parthoz képest v_f . A motorcsónak sebességének nagysága a folyóhoz képest v_{cs} , azaz a parthoz képest $v_f + v_{cs}$, ha a folyón lefelé megy, ill. $v_{cs} - v_f$, ha a folyón felfelé megy. Ezekkel kiszámolhatjuk a megtett utakat, de figyelembe kell venni azt is, milyen irányba mozgott a motorcsónak, ezért az utak helyett a motorcsónak x koordinátáját fogjuk felírni. (Vagyis ha felfelé megy a folyón, akkor $v_{cs} - v_f$ nagyságú sebességgel az x tengely negatív irányába mozog, ezért negatív lesz az elmozdulása.)

Írjuk fel a motorcsónak és a tutaj helyének x koordinátáját a második találkozásig:

$$\text{motorcsónak:} \quad -1 \cdot (v_{cs} - v_f) + 0,5 \cdot v_f + t^* \cdot (v_{cs} + v_f) = 7,5 \text{ [km]}$$

ahol $t^* \text{ [h]}$ az az idő, amíg a csónak a folyón lefelé halad bekapcsolt motorral;

$$\text{tutaj:} \quad (1 + 0,5 + t^*) \cdot v_f = 7,5 \text{ [km]}$$

Megjegyzés: az előjeleken nem kell gondolkoznunk, ha azt a szabályt követjük, hogy minden tagot $t \cdot (v_{cs} + v_f)$ alakban írunk fel, ahol v_f mindig pozitív (mert az x tengely irányát ehhez igazítottuk), v_{cs} előjele pedig pozitív ill. negatív attól függően, hogy a csónak az x tengely pozitív vagy negatív irányába mozog.

A 3 ismeretlenre csak 2 egyenletünk van. Átrendezve őket

$$(1 + 0,5 + t^*) \cdot v_f + (t^* - 1) \cdot v_{cs} = 7,5 + (t^* - 1) \cdot v_{cs} = 7,5 \quad \Rightarrow \quad t^* = 1 \text{ h}, \quad v_f = 3 \text{ km/h}$$

A csónak sebessége tetszőleges lehet.

(2) Vegyünk fel egy folyóval/tutajjal együtt mozgó koordinátarendszert. Az origója legyen a tutajra rögzítve, az x' tengely pozitív iránya mutasson arra, amerre az első órában távolodik a csónak a tutajtól. Ekkor a tutaj x' koordinátája természetesen végig zérus, és a motorcsónak x' koordinátáját írjuk fel a második találkozásig:

$$1 \cdot v_{cs} - t^* \cdot v_{cs} = 0$$

Ebből azonnal látható, hogy egyrészt mivel a csónak először 1 órát távolodik a tutajtól v_{cs} sebességgel és utána ugyancsak v_{cs} sebességgel közeledik hozzá, így a közeledés ideje is 1 óra, másrészt hogy a csónak sebessége tetszőleges.

1/2. A és B város vízparton helyezkednek el egymástól d távolságra. Egy motorcsónakkal, ami a vízhez képest v_{cs} sebességgel tud menni, elmegyünk A-ból B-be, majd vissza B-ből A-ba.

Megegyezik-e az oda-vissza út ideje, ha a víz folyó, ill. tó?

MO.

Ha a víz egy folyó és A-tól B felé folyik $v_f > 0$ sebességgel, akkor

A-ból B-be $t_{AB} = d / (v_{cs} + v_f)$ idő alatt,

B-ből A-ba $t_{BA} = d / (v_{cs} - v_f)$ idő alatt ér a csónak,

tehát az összes idő $t_{folyó} = d / (v_{cs} + v_f) + d / (v_{cs} - v_f)$.

Ha a víz egy tó, akkor oda- ill. visszaút ideje is $t = d / v_{cs}$, tehát $t_{tó} = 2d / v_{cs}$.

A két idő hányadosa

$$\frac{t_{folyó}}{t_{tó}} = \frac{\frac{d}{v_{cs}+v_f} + \frac{d}{v_{cs}-v_f}}{\frac{2d}{v_{cs}}} = \frac{\frac{v_{cs}-v_f+v_{cs}+v_f}{v_{cs}^2-v_f^2}}{\frac{2}{v_{cs}}} = \frac{v_{cs}^2}{v_{cs}^2-v_f^2} > 1,$$

tehát folyóban hosszabb idő kell, mint tóban.

[Hogyhogy? mert a folyó kevesebb ideig segíti a csónakot, mint akadályozza.]

1/3. Egy katica mászkál a teraszon, ami az x - y síkban fekszik. A katica helyvektorának x és y komponense:

$$x(t) = 3A \sin \frac{2\pi}{T} t$$

$$y(t) = 2A \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{2} \right)$$

ahol $A = 1 \text{ m}$, $T = 8 \text{ perc}$.

a) Írjuk fel a katica helyvektorát az idő függvényében!

b) Adjuk meg, hol van a katica 2 perc; 4 perc; 6 perc; 8 perc; 10 perc; 15 perc; ... múlva!

c) Rajzoljuk meg a katica pályáját!

MO.

a) $\mathbf{r}(t) = 3A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \mathbf{i} + 2A \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{j}$

[avagy más jelöléssel: $\mathbf{r}(t) = 3A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \mathbf{e}_x + 2A \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{e}_y$];

A és T értékét behelyettesítve

$$\mathbf{r}(t) = 3 \sin \left(\frac{2\pi}{8} t \right) \mathbf{i} + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{8} t + \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{j} \text{ [m]}, \text{ ha a } t \text{ időt percben mérjük, ill.}$$

$$\mathbf{r}(t) = 3 \sin \left(\frac{2\pi}{480} t \right) \mathbf{i} + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{480} t + \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{j} \text{ [m]}, \text{ ha a } t \text{ időt másodpercben mérjük.}$$

b) $\mathbf{r}(2) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ [m]; $\mathbf{r}(4) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$ [m]; $\mathbf{r}(6) = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ [m]; $\mathbf{r}(8) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$ [m];

$\mathbf{r}(10) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ [m]; $\mathbf{r}(15) = -2,12\mathbf{i} + 1,41\mathbf{j}$ [m]

c) Általánosan a pálya kifejezéséhez az $x(t)$ és $y(t)$ függvényekből ki kell küszöbölni a t -t.

Jelen esetben nem magát t -t, hanem $\sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right)$ -t érdemes kifejezni:

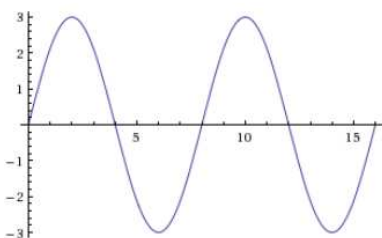
$$x(t)\text{-ből } \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) = \frac{x}{3A}.$$

$$y(t)\text{-t először átalakítjuk: } y = 2A \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{2} \right) = -2A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right),$$

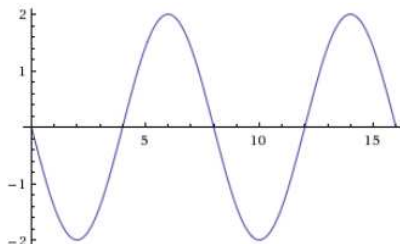
majd ebbe behelyettesítjük $\sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right)$ -t x -szel kifejezve:

$$y = -2A \cdot \frac{x}{3A} = -\frac{2}{3}x.$$

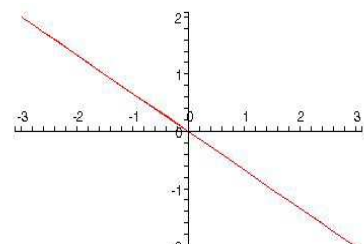
A pálya egy egyenes, de mivel x és y nem vehet fel tetszőleges értéket, ezért az $y = -2x/3$ egyenesnek csak a $P_1 (-3A, 2A)$ és $P_2 (3A, -2A)$ pontok közötti szakasza.



$x - t$



$y - t$



$y - x$

VEKTOROK (mely fizikai mennyiségek vektorok, melyek skalárok?)

Műveletek vektorokkal

– általánosan: szorzás skalárral; összeadás; skaláris szorzás; vektoriális szorzat.

– 3D Descartes-koordinátarendszerben

Pl. legyen $\mathbf{a} = 1\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

szorzás skalárral: pl. $\lambda = 4$: $\lambda\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$

összeadás: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

→ $\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}$: lineáris kombináció; sík egyenlete.

kivonás: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1)\cdot\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $\mathbf{b} - \mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$; „megváltozás”: későbbi–korábbi!

skaláris szorzat (2 vektorhoz egy skalárt rendel)

általánosan: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha$

– merőleges két vektor \Leftrightarrow a skalárszorzatuk zérus

– önmagával vett skaláris szorzat \rightarrow abszolút érték \rightarrow egységvektor

– két vektor által bezárt szög számítása

– egyik vektor előjeles vetülete a másik irányára (fizikában: pl. munka számolásánál)

– vektor felbontása egy másik vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre

Descartes-koordinátarendszerben:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4 + 10 - 18 = -4$$

$$\text{abszolút érték: } |\mathbf{a}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14} \approx 3,74$$

$$\rightarrow \mathbf{a} \text{ irányú egységvektor: } \mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$$

$$\text{közbezárt szög: } \cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{-4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{77}} \approx -0,122 \rightarrow \alpha \approx 97^\circ$$

$$\text{vetület: pl. } \mathbf{b} \text{ vetülete } \mathbf{a} \text{ irányára: } b_a = |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{-4}{\sqrt{14}}$$

\mathbf{b} -nek \mathbf{a} -val párhuzamos vektorkomponense (azaz \mathbf{b} vetülete \mathbf{e}_a -ra):

$$\mathbf{b}_a = \mathbf{b} \parallel = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \cdot \mathbf{a} = -\frac{4}{\sqrt{14}^2} \cdot (1\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = -\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{4}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

$$\text{és } \mathbf{b} \text{-nek } \mathbf{a} \text{-ra } \text{merőleges} \text{ komponense pedig } \mathbf{b}_\perp = \mathbf{b} - \mathbf{b}_a = \frac{30}{7}\mathbf{i} - \frac{39}{7}\mathbf{j} - \frac{36}{7}\mathbf{k}$$

(skalárszorzattal belátható, hogy \mathbf{b}_\perp és \mathbf{a} tényleg merőlegesek!)

vektoriális szorzat (2 vektorhoz egy vektort rendel)

általánosan: nagysága $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\alpha$,

iránya merőleges a két vektor által kifeszített síkra, és abba az irányba mutat,

ahogy jobb kezünk középső ujjja mutat, ha a hüvelykujjunk mutat \mathbf{a} irányába és

a mutatóujjunk \mathbf{b} irányába (fizikában: pl. forgatónyomaték-vektor)

párhuzamos két vektor \Leftrightarrow a vektoriális szorzatuk zérus

Descartes-koordinátarendszerben:

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \dots$ (determináns kifejtésével)... =

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} = 27\mathbf{i} + 18\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

[belátható, hogy ez merőleges az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok síkjára, azaz $\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}$ -re:

$$(\lambda_1 + 4\lambda_2) \cdot 27 + (-2\lambda_1 - 5\lambda_2) \cdot 18 + (3\lambda_1 - 6\lambda_2) \cdot 3 = (27 - 36 + 9)\lambda_1 + (108 - 90 - 18)\lambda_2 = 0]$$

2D polár – majd...

FÜGGVÉNYEK

A függvény független / függő változója skalár / vektor : PÉLDÁK!

$S \rightarrow S$: azaz skalártól függő skalár: pl. $s(t)$

$S \rightarrow V$: azaz skalártól függő vektor: pl. helyvektor $\mathbf{r}(t)$ – térgörbe paraméteres alakban \rightarrow pálya

$V \rightarrow S$: azaz vektortól függő skalár: pl. helyzeti energia $E_{\text{pot}}(\mathbf{r})$ – szintfelületek

$V \rightarrow V$: azaz vektortól függő vektor: pl. áramlási tér $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ – vektorvonalak

homogén/inhomogén; stacionárius, statikus