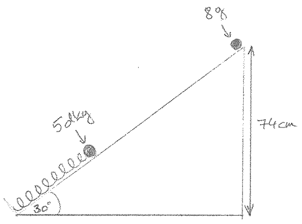
Fizika 1 – Mechanika 6. házi feladat megoldása



Egy 74 cm magas, 30°-os hajlásszögű lejtő aljához rögzítettünk egy 28 cm hosszú rugót, és annak a tetejére tettünk egy 5 dkg tömegű testet. A rugó ennek hatására az egyensúlyi helyzetében 4 cm-t nyomódik össze.
A lejtő tetejéről elengedtünk egy 8 g-os testet (kezdősebesség nélkül), ami a rugón levő testtel tökéletesen rugalmasan ütközve visszapattant a lejtőn.
a) Milyen magasra pattant vissza, ha a test és a lejtő közötti súrlódási együttható 0,16?
b) Mekkora volt a rugó maximális összenyomódása, ha a másik test esetén a súrlódás elhanyagolható?

Megoldás:
$M = 0{,}05$ kg; $m = 0{,}008$ kg. $g = 10$ m/s^2
Összenyomódás után a rugó 24 cm hosszú, az 5 dkg-os test $0{,}24 \cdot \sin 30° = 0{,}12$ m magasan van; a 8 g-os test $h = 0{,}74 - 0{,}12 = 0{,}62$ m-rel magasabbról indul.
A rugóállandó:

$$k \cdot x_{es} = mg \cdot \sin 30° \quad \rightarrow \quad k = Mg \cdot \sin 30° / x_{es} = 0{,}05 * 10 * 0{,}5 / 0{,}04 = 6{,}25 \text{ N/m}$$

a)
A 8 g-os test sebessége az ütközés előtt munkatétellel számolva:

$$mgh - \mu mg \cdot \cos 30° \cdot (h/\sin 30°) = ½\, mu^2 \quad \rightarrow \quad u = \sqrt{(2gh(1-2\mu \cdot \cos 30°))} = 2{,}994 \text{ m/s}$$

$(a_{le} = 3{,}614$ m/s^2, $t_1 = 0{,}8283$ s $)$

A rugalmas ütközés utáni sebességek:

impulzus-megmaradás: $mu = mv + MV$

energia-megmaradás: $½mu^2 = ½mv^2 + ½MV^2$

$\rightarrow$ $v = u \cdot (m-M)/(m+M) = -2{,}168$ m/s a 8 g-os testé,

$V = u \cdot 2m/(m+M) = 0{,}8259$ m/s az 5 dkg-os testé.

A 8 g-os test által felfelé megtett s út munkatétellel számolva:

$$- mg \cdot (s \cdot \sin 30°) - \mu mg \cdot \cos 30° \cdot s = - ½\, mv^2 \quad \rightarrow \quad s = v^2/g/(1+2\mu \cdot \cos 30°) = 0{,}3680 \text{ m}$$

$(a_{fel} = -6{,}386$ m/s, $t_2 = 0{,}3395$ s $)$

Tehát a 8 g-os test csak 0,3680 m-t csúszik felfelé, azaz $0{,}3680 \cdot \sin 30° = 0{,}1840$ m = 18,4 cm-rel jut feljebb az összenyomódott rugó végéhez képest, azaz
a lejtő aljától 12+18,4 = 30,4 cm-re jut fel, ill. a lejtő tetejétől 74–30,4 = 43,6 cm-re.
A test tehát a lejtő tetejéhez képest $\Delta h = 43{,}6$ cm-t veszít a magasságából,
vagyis a mechanikai energiája $\Delta E_{mech} = mg \cdot \Delta h = 0{,}03488$ J-lal csökkent a súrlódás és az ütközés során a másik testnek átadott energia miatt.
Ebből a súrlódási erő által végzett munka $W_s = \mu mg \cdot \cos 30° \cdot (h/\sin 30° + s) = 0{,}01783$ J,
és a másik testnek átadott mozgási energia $E_{kin,M} = ½MV^2 = 0{,}01705$ J.

b) Energia-megmaradással számolhatunk.
Például vegyük fel a helyzeti energia zérus szintjét az egyensúlyi állapotnál, és jelöljük d-vel az elmozdulást ettől a helyzettől a maximális összenyomódásig. Így induláskor a rugó összenyomódása x_{es}, a maximális összenyomódása $x_{es}+d$; a test magasságának csökkenése pedig $d \cdot \sin 30°$:

$$½kx_{es}^2 + ½MV^2 = ½k(x_{es}+d)^2 - Mg \cdot (d \cdot \sin 30°)$$

$$½kx_{es}^2 + ½MV^2 = ½kx_{es}^2 + kx_{es}d + ½kd^2 - Mg \cdot (d \cdot \sin 30°)$$

$$½kd^2 + (kx_{es} - Mg \cdot \sin 30°) \cdot d - ½MV^2 = 0$$

Vegyük észre, hogy a zárójelben levő mennyiség zérus! Így

$$d = \sqrt{(MV^2/k)} = 0{,}07387 \text{ m} = 7{,}4 \text{ cm},$$

a rugó maximális összenyomódása 4 + 7,4 = 11,4 cm.