

Egy 15 cm hosszú, 15 N/m rugóállandójú rugó egyik végére erősítünk egy 15 dkg-os testet, a másik végét a plafonhoz rögzítjük. A testet úgy engedjük el, hogy az a felfüggesztési pontnál 19 cm-rel van lejjebb, és 0,8 m/s kezdősebességet adunk neki felfelé.

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

a) Milyen távol lesz a test a felfüggesztési ponttól 9 s múlva? (a csillapodást elhanyagolva)

b) Mekkora és milyen irányú abban a pillanatban a testre ható rugóerő, ill. eredő erő?

### Megoldás

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{15}{0,15}} = 10 \text{ s}^{-1}; \quad T = 2\pi/\omega = 0,2\pi \text{ s} \approx 0,628 \text{ s}$$

Jelölések:

$x$  jelöli a megnyúlást a nyugalmi hosszhoz képest;

$y$  jelöli a megnyúlást az egyensúlyi helyzethez képest, azaz  $y = x - x_{es}$ ;

$L$  jelöli a rugó hosszát, azaz  $L = \ell_0 + x = \ell_0 + y + x_{es}$ . ( $\ell_0 = 0,15 \text{ m}$ )

A rezgés egyensúlyi helyzetéhez tartozó megnyúlás:

$$mg = k x_{es} \rightarrow x_{es} = mg/k = 0,15 \cdot 10/15 = 0,10 \text{ m} = 10 \text{ cm},$$

itt  $L = \ell_0 + x_{es} = 0,15 + 0,10 = 0,25 \text{ m}$  a rugó hossza, és  $y = 0$ .

Keressük a rezgés amplitúdóját és kezdőfázisát.

A rezgés kiinduló pontja  $L(0) = 0,19 \text{ m} = \ell_0 + y(0) + x_{es}$

→ az egyensúlyi helyzet körüli rezgést leíró  $y(t)$  függvény értéke induláskor

$$y(0) = L(0) - (\ell_0 + x_{es}) = -0,06 \text{ m};$$

a kezdősebesség pedig  $v_0 = -0,8 \text{ m/s}$  (negatív, mert a kezdősebesség felfelé mutat, az  $y$  tengely pedig lefelé).

$$y_0 = -0,06 = A \cos \varphi_0$$

$$v_0 = -0,8 = -A\omega \sin \varphi_0 = -10A \sin \varphi_0$$

$$\text{Ezekből } A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{0,06^2 + \left(\frac{0,8}{10}\right)^2} = 0,10 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{v_0}{x_0 \omega} = -\frac{0,8}{0,06 \cdot 10} = -\frac{4}{3} \rightarrow \varphi_0 = -0,9273 + k\pi$$

$$\varphi_0 = -0,9273 \text{ választással} \quad y(0) = 0,10 \cdot \cos(-0,9273) = 0,06 \text{ pozitív lenne és}$$

$$v(0) = -10 \cdot 0,10 \cdot \sin(-0,9273) = 0,8 \text{ pozitív lenne,}$$

ezért  $\varphi_0 = -0,9273 + \pi = 2,2143$ , amivel előjelhelyesen visszkapjuk a kezdeti feltételeket.

Tehát  $y(t) = 0,10 \cos(10 t + 2,2143) \text{ [m]}$ ,

és a rugó hossza  $L(t) = \ell_0 + x_{es} + y(t) = 0,25 + 0,10 \cos(10 t + 2,2143) \text{ [m]}$ .

$t = 9 \text{ s-nál}$   $L(9) = 0,25 + 0,10 \cos(10 \cdot 9 + 2,2143) = 0,2054 \text{ m} = 20,54 \text{ cm}$  a rugó hossza.

**b)** A rugó megnyúlása  $t = 9$  s-nál  $\Delta\ell = x(9) = L(9) - \ell_0 = 0,2054 - 0,15 = 0,0554$  m.

A rugóerő  $F_r = -k \cdot \Delta\ell = -15 \cdot 0,0554 \approx -0,8305$  N, felfelé hat a testre (a rugó meg van nyúlva).

A nehézségi erő  $mg = 1,50$  N;

az eredő erő  $F_e = 1,50 - 0,8305 = 0,6695$  N lefelé.

(Az eredő erő a testet az egyensúlyi helyzet felé gyorsítja, ami lejjebb van.)