Fizika 1 – Mechanika 5. házi feladat megoldás

Adott egy 1 kg tömegű test és adott a következő erő:

$\mathbf{F} = (y^2 + y)\,\mathbf{i} + (x + p\cdot xy)\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ [N], ahol p egy paraméter.

a) Számoljuk ki az **F** erő által végzett munkát, miközben a test a P_0 (2;–1;5) pontból a P_1 (4;0;2) pontba mozog a pontokat összekötő egyenes mentén p = 1 esetén!

b) Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy **F** konzervatív legyen, írjuk fel a potenciálfüggvényt, és számoljuk ki ismét az erő által végzett munkát a fenti pályára!

MO.

a) $\mathbf{F} = (y^2 + y)\,\mathbf{i} + (x + xy)\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ [N]

P_0-ban $t_0 = 0$ és P_1-ben $t_1 = 1$ választással

$x(t) = 2 + 2t$; $y(t) = t - 1$; $z(t) = 5 - 3t$

Ezekből $dx = 2\,dt$; $dy = dt$; $dz = -3\,dt$.

$$W_{P_0P_1} = \int_{(2,-1,5)}^{(4,0,2)} \{[y^2 + y]\cdot dx + [x + x\cdot y]\cdot dy + [2]\cdot dz\} =$$

$$= \int_0^1 \left\{[y(t)^2 + y(t)]\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right) + [x(t) + x(t)\cdot y(t)]\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right) + [2]\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)\right\} dt =$$

$$= \int_0^1 \{[(t-1)^2 + (t-1)]\cdot 2 + [(2+2t) + (2+2t)\cdot(t-1)]\cdot 1 + [2\cdot(-3)]dt\} =$$

$$= \int_0^1 \{4t^2 - 6\}dt = \left[\frac{4}{3}t^3 - 6t\right]_0^1 = -\frac{14}{3}\ \text{J}.$$

$$\textbf{b) rot F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + y & x + pxy & 2 \end{vmatrix} = (0-0)\mathbf{i} - (0-0)\mathbf{j} + \big((1 + py) - (2y + 1)\big)\mathbf{k}$$

rot F = **0**, ha p = 2.

Mivel $\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} = -F_x = -(y^2 + y)$, $\frac{\partial E_{pot}}{\partial y} = -F_y = -(x + 2xy)$ és $\frac{\partial E_{pot}}{\partial z} = -F_z = -2$,

a potenciálfüggvény $E_{pot} = -(xy + xy^2 + 2z)$.

$W_{P0,P1} = -\Delta E_{pot} = E_{pot}(P_0) - E_{pot}(P_1) = E_{pot}(2;-1;5) - E_{pot}(4;0;2) = -10 - (-4) = -6$ J.