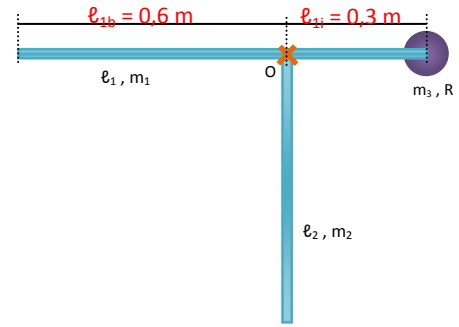


Az ábrán látható szerkezet

egy $\ell_1 = 0,9$ m hosszú, $m_1 = 0,6$ kg tömegű és egy $\ell_2 = 0,6$ m hosszú, $m_2 = 0,4$ kg tömegű rúd és egy $m_3 = 0,2$ kg tömegű, $R = 10$ cm sugarú korong összehegesztésével készült.

A szerkezet függőleges síkban súrlódásmentesen képes elfordulni az O ponton átmenő vízszintes tengely körül.

- A szerkezetet elengedve merre és mekkora gyorsulással indul a korong?
- Milyen helyzetben lenne egyensúlyban a szerkezet?



MO.

- A szerkezetre ható forgatónyomatékokat az egyes részeire ható erők forgatónyomatékainak előjeles összegeként kapjuk: $M = \sum(m_i g \cdot k_i)$; majd az $M = \Theta \cdot \beta$ impulzusmomentum-tételt alkalmazva megkapjuk a szöggyorsulást, és abból az adott pont gyorsulását: $a_k = \ell_{1j} \cdot \beta$.

Az ábrán általános helyzetben látható a szerkezet, írjuk fel így a forgatónyomatékokat.

A forgatónyomaték (és a tehetetlenségi nyomaték) számításához a vízszintes rudat képzeletben kettévághatjuk a forgástengelynél egy $\ell_{1b} = 0,6$ m-es és egy $\ell_{1j} = 0,3$ m-es rúdra, ekkor pozitív irányba forog

- az ℓ_{1b} hosszú, $m_{1b} = \ell_{1b}/\ell_1 \cdot m_1 = 0,6/0,9 \cdot 0,6 = 0,4$ kg tömegű darab, aminek a súlypontja a forgástengelytől $\ell_{1b}/2 = 0,3$ m-re van, és $m_{1b}g$ erőkarja $\cos\varphi \cdot \ell_{1b}/2 = 0,3\cos\varphi$;

negatív irányba forog

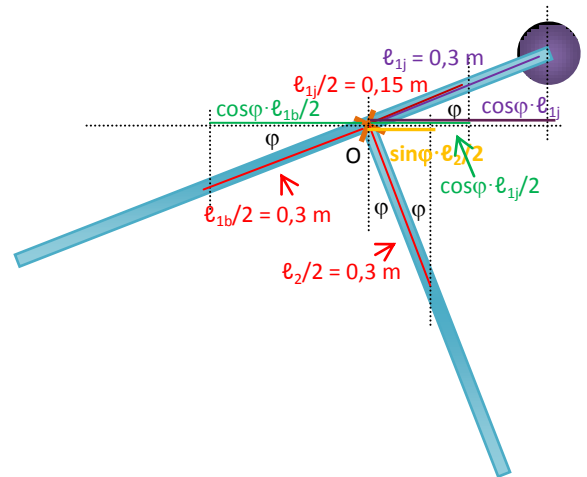
- az ℓ_{1j} hosszú, $m_{1j} = \ell_{1j}/\ell_1 \cdot m_1 = 0,3/0,9 \cdot 0,6 = 0,2$ kg tömegű darab, aminek a súlypontja a forgástengelytől $\ell_{1j}/2 = 0,15$ m-re van, és $m_{1j}g$ erőkarja $\cos\varphi \cdot \ell_{1j}/2 = 0,15\cos\varphi$;
- az ℓ_2 hosszú, $m_2 = 0,4$ kg tömegű darab, aminek a súlypontja a forgástengelytől $\ell_2/2 = 0,3$ m-re van, és m_2g erőkarja $\sin\varphi \cdot \ell_2/2 = 0,3\sin\varphi$;
- $m_3 = 0,2$ kg tömegű korong, aminek a súlypontja a forgástengelytől $\ell_{1j} = 0,3$ m-re van, és m_3g erőkarja $\cos\varphi \cdot \ell_{1j} = 0,3\cos\varphi$; tehát

$$M = m_{1b}g \cdot \cos\varphi \cdot \ell_{1b}/2 - m_{1j}g \cdot \cos\varphi \cdot \ell_{1j}/2 - m_2g \cdot \sin\varphi \cdot \ell_2/2 - m_3g \cdot \cos\varphi \cdot \ell_{1j} =$$

$$= 4 \cdot 0,3\cos\varphi - 2 \cdot 0,15\cos\varphi - 4 \cdot 0,3\sin\varphi - 2 \cdot 0,3\cos\varphi = 0,3 \cdot \cos\varphi - 1,2 \cdot \sin\varphi \quad (*)$$

(Ha nem vágjuk ketté a felső rudat: az ℓ_1 hosszú, $m_1 = 0,6$ kg tömegű darab súlypontja a forgástengelytől $\ell_1/2 - \ell_{1j} = 0,15$ m-re van, az m_1g erőkarja $\cos\varphi \cdot (\ell_1/2 - \ell_{1j}) = 0,15\cos\varphi$, pozitív irányba forog \rightarrow a $4 \cdot 0,3\cos\varphi - 2 \cdot 0,15\cos\varphi$ helyére $6 \cdot 0,15\cos\varphi$ kerül.)

A szerkezet indulásakor $\varphi = 0 \rightarrow M = 0,3$ Nm; pozitív, tehát a korong emelkedni kezd.



A tehetetlenségi nyomaték:

rúd tehetetlenségi nyomatéka a felezőpontjára $\frac{1}{12}m\ell^2$, a végpontjára $\frac{1}{3}m\ell^2$;

korong tehetetlenségi nyomatéka a középpontjára $\frac{1}{2}mr^2$.

Azért célszerű kettévágni a felső rudat, mert akkor csak a korongra kell Steiner-tételt alkalmazni:

$$\Theta = (\Theta_{s, \text{korong}} + m_3 \cdot \ell_{1j}^2) + \Theta_{v, 1b \text{ rúd}} + \Theta_{v, 1j \text{ rúd}} + \Theta_{v, 2 \text{ rúd}} = \left(\frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 0,1^2 + 0,2 \cdot 0,3^2\right) + \frac{1}{3} \cdot 0,4 \cdot 0,6^2 + \frac{1}{3} \cdot 0,2 \cdot 0,3^2 + \frac{1}{3} \cdot 0,4 \cdot 0,6^2 = 0,019 + 0,048 + 0,006 + 0,048 = 0,121 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Vagy: súlyponti tetákat használva

$$\Theta = (\Theta_{s, \text{korong}} + m_3 \cdot \ell_{1j}^2) + (\Theta_{s, 2 \text{ rúd}} + m_2 \cdot (\ell_2/2)^2) + (\Theta_{s, 1 \text{ rúd}} + m_1 \cdot (\ell_1/2 - \ell_{1j})^2) = \left(\frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 0,1^2 + 0,2 \cdot 0,3^2\right) + \left(\frac{1}{12} \cdot 0,4 \cdot 0,6^2 + 0,4 \cdot 0,3^2\right) + \left(\frac{1}{12} \cdot 0,6 \cdot 0,9^2 + 0,6 \cdot 0,15^2\right) = 0,019 + 0,048 + 0,054 = 0,121 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Impulzusmomentum-tétel: $M = \Theta \cdot \beta \rightarrow \beta_0 = M_0 / \Theta = 0,3 / 0,121 \approx 2,479 \text{ s}^{-2}$

\rightarrow a korong gyorsulása induláskor $a_{k,0} = \ell_{1j} \cdot \beta \approx 0,3 \cdot 2,479 = 0,7438 \text{ m/s}^2$ felfelé.

b) Egyensúlyban a szerkezetre ható forgatónyomaték zérus:

$$(*) \quad M = 0,3 \cdot \cos\varphi - 1,2 \cdot \sin\varphi = 0 \rightarrow \text{tg}\varphi = \frac{1}{4} \rightarrow \varphi \approx 14,04^\circ.$$

VAGY: ezt a szöget számolhatnánk abból is, hogy egyensúlyban a szerkezet súlypontjának a forgástengely alatt kell lennie:

a forgástengelyt véve origónak $x_s = -0,025 \text{ m}$, $y_s = -0,10 \text{ m} \rightarrow \text{tg}\varphi = \frac{1}{4}$.