**Fizika 1 – Mechanika 5. házi feladat megoldása**

Adott a térerősség a következő alakban:

$$\mathbf{E} = \left(p \cdot xz + \frac{2}{y}\right)\mathbf{i} - \left(q \cdot \frac{x}{y^2}\right)\mathbf{j} + (x^2 - r)\,\mathbf{k}\ \text{[N/kg]},\quad \text{ahol p, q és r paraméterek.}$$

**a)** Mekkora munkát végez az erőtér p = q = 1, r = 4 esetén, ha egy m = 8 kg tömegű testet mozgat a $P_0$ (2,4,6) pontból a $P_1$ (2,1,0) pontba a két pontot összekötő egyenes mentén?

**b)** A p, q, r paraméterek mely értékeire potenciálos az erőtér? Adjuk is meg a potenciálfüggvényt!

**MO.**

**b)** Kezdjük ezzel, hátha az **a)** részben megadott paraméterértékekkel éppen potenciálos az erőtér:

$$\mathbf{rot\,E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p \cdot xz + \frac{2}{y} & -q \cdot \frac{x}{y^2} & x^2 - r \end{vmatrix} = (0-0)\mathbf{i} - (2x - px)\mathbf{j} + \left(-\frac{q}{y^2} - \left(-\frac{2}{y^2}\right)\right)\mathbf{k}$$

**E** akkor konzervatív, ha **rot E** = **0** $\Rightarrow$ p = 2, q = 2, r tetszőleges.

Ekkor a potenciálfüggvény

parciális deriváltjai:

$\partial U/\partial x = -E_x = -2xz - 2/y \Rightarrow U = \int(-2xz - 2/y)dx = -x^2z - 2x/y + k_1(y,z)$

$\partial U/\partial y = -E_y = 2x/y^2 \Rightarrow U = \int 2x/y^2\,dy = -2x/y + k_2(x,z)$

$\partial U/\partial z = -E_z = -x^2 + r \Rightarrow U = \int(-x^2 + r)dz = x^2z + r z + k_3(x,y)$

$\Rightarrow U = -x^2z - 2x/y + r z$ .

**a)** A fentiek szerint p = q = 1, r = 4 esetén az erőtér nem konzervatív, vagyis csak az előírt pályán lehet vonalintegrállal az erőtér által végzett munkát kiszámolni.

A $P_0$-ból $P_1$-be mutató egyenes egyenlete t-vel paraméterezve, $P_0$-nál t=0, $P_1$-nél t=1 választással:

$x(t) = 2 \rightarrow dx/dt = 0$

$y(t) = 4-3t \rightarrow dy/dt = -3$

$z(t) = 6-6t \rightarrow dz/dt = -6$

azaz $\mathbf{r}(t) = 2\,\mathbf{i} + (4-3t)\,\mathbf{j} + (6-6t)\,\mathbf{k} \rightarrow d\mathbf{r} = (-3\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k})\,dt$ .

$$W = m \cdot \int_{r_0}^{r_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = m \cdot \int_{t_0}^{t} \left\{E_x \frac{dx}{dt} + E_y \frac{dy}{dt} + E_z \frac{dz}{dt}\right\} dt =$$

$$= 8 \cdot \int_{(2,4,6)}^{(2,1,0)} \left\{\left(p \cdot xz + \frac{2}{y}\right)dx + \left(-q \cdot \frac{x}{y^2}\right)dy + (x^2 - r)dz\right\} =$$

$$= 8 \cdot \int_0^1 \left\{\left(1 \cdot 2 \cdot (6-6t) + \frac{2}{4-3t}\right) \cdot 0 + \left(-1 \cdot \frac{2}{(4-3t)^2}\right) \cdot (-3) + (2^2 - 4) \cdot (-6)\right\} dt =$$

$$= 8 \cdot \int_0^1 \left\{\left(-1 \cdot \frac{2}{(4-3t)^2}\right) \cdot (-3)\right\} dt = 8 \cdot \int_0^1 \frac{6}{(4-3t)^2} dt = 8 \cdot \left[\frac{2}{4-3t}\right]_0^1 = 12\ \text{J}\ .$$

De ha észrevesszük, hogy

$E_x\,dx = 0$, mert $dx = 0$ és

$E_z\,dz = 0$, mert az adott r értékre $E_z = 0$,

nem is kell t-vel paraméterezni, hanem számolhatunk így:

$$W = m \cdot \int_{r_0}^{r_1} E_y dy = 8 \cdot \int_{(2,4,6)}^{(2,1,0)} \left(-q \cdot \frac{x}{y^2}\right) dy = 8 \cdot \int_4^1 \left(-1 \cdot \frac{2}{y^2}\right) dy = 8 \cdot \left[\frac{2}{y}\right]_4^1 = 12\ \text{J}\ .$$

Vagy: mivel **rot E** -nek az x komponense zérus, ezért az y-z síkban konzervatív az erőtér, és az előírt egyenes éppen ebben a síkban van, tehát választható helyette a koordinátatengelyekkel párhuzamos út.