

7. házi feladat

Egy $\mathbf{E} = (3-2y)\mathbf{i} - 2(x+yz)\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$ [N/kg] alakú erőterben egységnyi tömegű test mozog az $\mathbf{r} = (t^2+1)\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ [m] görbe mentén.

Mekkora munkát kell végeznünk, míg a $P_0(2,-2,-2)$ pontból a $P_1(2,0,2)$ pontba juttatjuk a testet?

Megoldás:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{E}, m = 1 \text{ kg}, \mathbf{F} = (3-2y)\mathbf{i} - 2(x+yz)\mathbf{j} - y^2\mathbf{k} \text{ [N]}$$

Nézzük meg, konzervatív-e az erőter:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3-2y & -2(x+yz) & -y^2 \end{vmatrix} = (-2y+2y)\mathbf{i} - (0-0)\mathbf{j} + (-2+2)\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

tehát konzervatív.

$$\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x} = -(3-2y), \quad \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y} = 2(x+yz), \quad \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z} = y^2, \text{ tehát}$$

a potenciálfüggvény $E_{\text{pot}} = 2xy + y^2z - 3x$.

$$W_{P_0, P_1} = E_{\text{pot}, P_0} - E_{\text{pot}, P_1} = -22 - (-6) = -16 \text{ J.}$$

Persze megoldható a feladat az eredeti görbére számolt vonalintegrállal is:

$$x = t^2+1, y = t-1, z = 2t \rightarrow dx = 2t dt, dy = dt, dz = 2 dt$$

P_0 -nál $t_0 = -1$, P_1 -nél $t_0 = +1$.

Behelyettesítések és összevonások után

$$W_{P_0, P_1} = \int_{-1}^1 (-12t^2 + 10 - 18t - 4) dt = -16 \text{ J.}$$

Vagy mivel az erőter konzervatív, választhatunk más utat is, pl.

$$(2, -2, -2) \rightarrow (2, 0, -2) \rightarrow (2, 0, 2):$$

$$W_{P_0, P_1} = \int_{2, -2, -2}^{2, 0, -2} -2(x+yz) dy + \int_{2, 0, -2}^{2, 0, 2} -y^2 dz = \int_{-2}^0 -2(2-2y) dy + \int_{-2}^2 -0^2 dz = -16 \text{ J.}$$

A kiszámolt W_{P_0, P_1} az a munka, amit ez \mathbf{F} erő végez, miközben a test a P_0 -ból a P_1 -be jut. Az erő negatív; ahhoz, hogy a test P_0 -ból a P_1 -be jusson, nekünk kell +16 J munkát végeznünk.