

6. házi feladat

Sík terepen megy az aranyvonat állandó 54 km/h sebességgel. A szerelvény egy 14 t tömegű mozdonyból és 3 db 10 t tömegű vagonból áll. A vonatablók feljutottak a szerelvényre és menet közben le akarják kapcsolni az utolsó vagonot. Tudják, hogy a vonatot fékezi egyrészt a súrlódás: $\mu = 0,016$, másrészt a légellenállás. Ki akarják számítani, hogy a lekapcsolás helyétől milyen távolságra várakozzon a teherautójuk, amibe a lopott aranyat majd átrakják. Felteszik, hogy a közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányos, a k közegellenállási együttható értéke független attól, hogy az egész szerelvény vagy csak egy vagon mozog, $k = 20 \text{ kg/m}$.

a) Hová kell állniuk a teherautóval?

b) Feltéve, hogy a mozdony húzóereje állandó, mennyi lesz a mozdonyos rész új állandósult sebessége az utolsó vagon lekapcsolása után?

Megoldás:

a) Az $m = 10 \cdot 10^3 \text{ kg}$ tömegű vagon lassul a súrlódás és a közegellenállás miatt:

$$ma = m \frac{dv}{dt} = -\mu mg - kv^2.$$

A kérdés az, hogy mekkora utat tesz meg a vagon a megállásig, ezért térjünk át $\frac{dv}{dt}$ -ről $\frac{dv}{ds}$ -re:

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = mv \frac{dv}{ds}, \text{ így } mv \frac{dv}{ds} = -\mu mg - kv^2.$$

Szeparáljuk, integráljuk:

$$\int ds = \int -\frac{mv}{\mu mg + kv^2} dv = -\frac{m}{2k} \int \frac{2v}{\mu mg/k + v^2} dv$$

$$s = -\frac{m}{2k} \ln \left(\frac{\mu mg}{k} + v^2 \right) + K, \text{ és mivel } s = 0 \text{ -nál } v = v_0, \text{ ezért } K = \frac{m}{2k} \ln \left(\frac{\mu mg}{k} + v_0^2 \right),$$

$$\text{tehát } s = \frac{m}{2k} \ln \frac{\frac{\mu mg}{k} + v_0^2}{\frac{\mu mg}{k} + v^2}.$$

$v_0 = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}$, a megállásig ($v = 0$ -ig) megtett út:

$$s = \frac{m}{2k} \ln \frac{\frac{\mu mg}{k} + v_0^2}{\frac{\mu mg}{k}} = \frac{m}{2k} \ln \left(1 + \frac{kv_0^2}{\mu mg} \right) = \frac{10^4}{2 \cdot 20} \ln \left(1 + \frac{20 \cdot 15^2}{0,016 \cdot 10^4 \cdot 10} \right) \approx 334,6 \text{ m}.$$

b) A mozdony + 3 vagon tömege $M = 44 \cdot 10^3 \text{ kg}$. Állandó $v_1 = 15 \text{ m/s}$ sebességgel megy, tehát a gyorsulása nulla. A mozdony húzóereje F_m ; a közegellenállási erő nagysága $F_{k1} = k \cdot v_1^2 = 20 \cdot 15^2 = 4500 \text{ N}$, a súrlódási erő nagysága $F_{s1} = \mu Mg = 0,016 \cdot 44 \cdot 10^3 \cdot 10 = 7040 \text{ N}$.
 $F_m - F_{k1} - F_{s1} = 0 \rightarrow F_m = F_{k1} + F_{s1} = 11540 \text{ N}$.

A mozdony húzóereje nem változik, amikor az utolsó vagonot lekapcsolják, így a szerelvény gyorsul, addig, amíg a nagyobb sebességhez tartozó nagyobb közegellenállási erővel az erők eredője zérust ad (persze a súrlódási erő is változik a tömeg csökkenése miatt):

$$F_m - F_{k2} - F_{s2} = 0 \rightarrow F_{k2} = F_m - F_{s2} = 11540 - 0,016 \cdot 34 \cdot 10^3 \cdot 10 = 6100 \text{ N} = k \cdot v_2^2$$

$$\rightarrow v_2 \approx 17,5 \text{ m/s} \approx 62,9 \text{ km/h}.$$