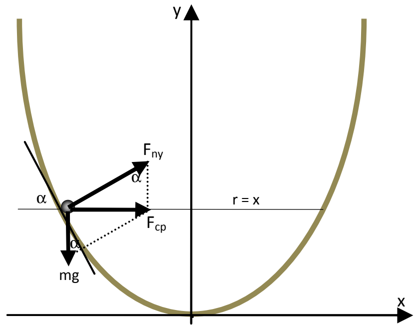
4. házi feladat
Beadási határidő: márc. 19. csütörtök

Az $y = a\cdot x^4 + b\cdot x^6$ $a = 3\ m^{-3}$, $b = -2\ m^{-5}$
egyenletű görbe y tengely körüli forgatásával keletkező forgástestben milyen magasságban lesz a benne állandó magasságban, súrlódásmentesen keringő test periódusideje minimális? (y és x m-ben értendőek)

Megoldás:
Hasonlóan az órai feladathoz



$$m\cdot a_{cp} = mg \cdot tg\alpha = mg \cdot \frac{dy}{dx}\ ,$$

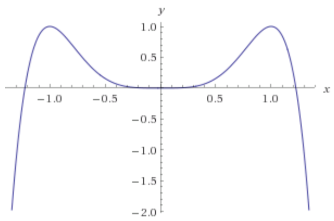
ahol $a_{cp} = r\cdot\omega^2$; $r = x$ (ld. az ábrát) ; $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\frac{dy}{dx} = 4a\ x^3 + 6b\ x^5 = 12\ x^3 - 12\ x^5 = 12\ x^3\ (1 - x^2)$$

tehát $m\cdot x\cdot\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = mg \cdot 12\ x^3\ (1 - x^2)$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{12x^2(1-x^2)\cdot g}}$$

Megjegyzés: $x^2 \geq 1$ esetén a kifejezés értelmetlen. Ez azért van, mert az $y(x) = 3\cdot x^4 - 2\cdot x^6$ függvény így néz ki:



vagyis x = 1-nél nagyobb sugáron nem keringhet a test.

A periódusidőnek ott lehet szélsőértéke, ahol $\frac{dT}{dx} = 0$:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{1}{2}\left(12x^2(1-x^2)\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (24x - 48x^3) \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{g}} = 24x\cdot(2x^2-1)\left(12x^2(1-x^2)\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{g}} = 0$$

→ $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ m sugáron → $y(x) = 3\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}^{\,4} - 2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}^{\,6} = \frac{1}{2}$ m magasságban.

Megjegyzések:
1.) Az x = 0 megoldás azt jelentené, hogy a test nem kering.
2.) $\frac{dT}{dx}$ újabb deriválásával ellenőrizhetjük, hogy a szélsőérték tényleg minimum.
3.) Egyszerűbb a deriválás, ha T minimuma helyett ω maximumát keressük:

$m\cdot x\cdot\omega^2 = mg \cdot 12\ x^3\ (1 - x^2)$ → $\omega = \sqrt{12x^2(1-x^2)\cdot g}$

vagy még egyszerűbb, ha ω^2 maximumát ($\omega > 0$): $\omega^2 = 12x^2(1-x^2)\cdot g$

$\frac{d\omega^2}{dx} = 24x(1-2x^2)\cdot g = 0$ stb.