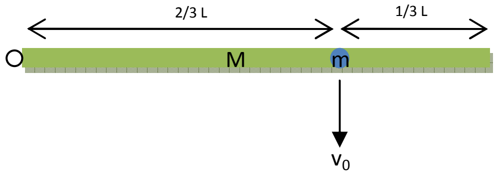
**Mechanika számolási gyakorlat 2014. tavasz 8. házi feladat**

Egy vékony fonallal vízszintes helyzetben tartott, M tömegű, L hosszúságú, egyik végén csuklóval megfogott homogén rúdra a csuklótól $\frac{2}{3}$ L távolságra ráerősítünk egy m tömegű pontszerű testet. A fonalat elvágjuk, és ugyanabban a pillanatban az m tömegű testet (nem a rúd végpontját!) $v_0$ sebességgel meglökjük függőlegesen lefelé. Mekkora lesz a rúd <u>végpontjának</u> sebessége a függőleges helyzeten való áthaladáskor?




**MO.**

A rúd és a ráerősített m tömeg együttes tehetetlenségi nyomatéka a rúd baloldali végén lévő forgástengelyre:

$$\Theta = \frac{1}{3}\mathrm{ML}^2 + \mathrm{m}\left(\frac{2\mathrm{L}}{3}\right)^2 = \frac{3\mathrm{M}+4\mathrm{m}}{9}\mathrm{L}^2$$

A rúd kezdeti szögsebességét a forgástengelytől $\frac{2}{3}$ L távolságban lévő pontjának sebességéből tudjuk kiszámolni: $\omega_0 = \frac{v_0}{\left(\frac{2}{3L}\right)} = \frac{3v_0}{2L}$

és a szögsebesség a végpont sebességével kifejezve $\omega = \frac{v}{L}$.

A függőleges helyzeten való áthaladásának $\omega_f$ szögsebességét kétféleképpen számolhatjuk:

1) energia-megmaradással; 2) a mozgásegyenlet integrálásával.

1) A helyzeti energia 0 szintjét a rúd kezdeti magasságához választva:

$$\mathrm{Mg}\cdot 0 + \mathrm{mg}\cdot 0 + \frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 = \mathrm{Mg}\cdot\left(-\frac{L}{2}\right) + \mathrm{mg}\cdot\left(-\frac{2L}{3}\right) + \frac{1}{2}\Theta\omega_f^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{3\mathrm{M}+4\mathrm{m}}{9}\mathrm{L}^2\cdot\left(\frac{3v_0}{2\mathrm{L}}\right)^2 = -\frac{3\mathrm{M}+4\mathrm{m}}{6}\mathrm{gL} + \frac{1}{2}\frac{3\mathrm{M}+4\mathrm{m}}{9}\mathrm{L}^2\cdot\left(\frac{v}{\mathrm{L}}\right)^2$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\left(\frac{3v_0}{2}\right)^2 + 3\mathrm{gL}}$$

2) a mozgásegyenlet:

$\Theta\beta = \mathrm{Mg}\cdot\frac{L}{2}\cdot\cos\varphi + \mathrm{mg}\cdot\frac{2L}{3}\cdot\cos\varphi$, ahol $\varphi$ a vízszintestől mért szög,

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi},$$

így egy szeparálható differenciálegyenletet kapunk:

$\Theta\,\omega\,d\omega = \frac{3\mathrm{M}+4\mathrm{m}}{6}\mathrm{gL}\cdot\cos\varphi\,d\varphi$, aminek megoldása $\frac{1}{2}\Theta\,[\omega^2]_{\omega_0}^{\omega_f} = \frac{3\mathrm{M}+4\mathrm{m}}{6}\mathrm{gL}\cdot[\sin\varphi]_0^{\pi/2}$,

$\frac{1}{2}\Theta\,(\omega_f^2 - \omega_0^2) = \frac{1}{2}\frac{3\mathrm{M}+4\mathrm{m}}{9}\mathrm{L}^2\,(\omega_f^2 - \omega_0^2) = \frac{3\mathrm{M}+4\mathrm{m}}{6}\mathrm{gL} \quad \rightarrow \quad \rightarrow$ v = …