

## Mechanika számolási gyakorlat 2014. tavasz 1. házi feladat

Egy  $m = 5$  kg tömegű test sebességét az alábbi függvény írja le:

$$\mathbf{v} = a \cos(bt) \mathbf{i} + a \cos(bt + c) \mathbf{k} \quad [\text{m/s}],$$

$$\text{ahol } a = 10 \text{ m/s}, \quad b = 5 \text{ s}^{-1}, \quad c = \pi/2.$$

A test a  $t = 0$  s-ban az  $\mathbf{r} = 2 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} - 1 \mathbf{k}$  [m] pontban volt.

a./ Milyen pályán mozog a test? Rajzoljuk is meg!

b. / Mikor lesz merőleges a sebesség a gyorsulásra?

### Megoldás:

a./ A helyvektor komponenseit a sebesség integrálásával kapjuk a kezdeti feltétel figyelembevételével:

$$v_x = a \cos(bt) = 10 \cos(5t)$$

$$x(t) = a/b \cdot \sin(bt) + x_0 = 2 \sin(5t) + x_0$$

$$\text{mivel } t = 0 \text{ -ban } x = 2: \quad x(0) = 2 \sin(0) + x_0 = 0 + x_0 = 2 \quad \rightarrow \quad x_0 = 2$$

$$x(t) = 2 \sin(5t) + 2$$

$$v_y = 0 \quad \text{és } t = 0 \text{ -ban } y = 3 \quad \rightarrow \quad y(t) = 3$$

$$v_z = a \cos(bt+c) = 10 \cos(5t + \pi/2) = -10 \sin(5t)$$

$$z(t) = a/b \sin(bt+c) + z_0 = 2 \sin(5t + \pi/2) + z_0 = 2 \cos(5t) + z_0$$

$$\text{mivel } t = 0 \text{ -ban } z = -1: \quad z(0) = 2 \sin(0+\pi/2) + z_0 = 2 \cos(0) + z_0 = 2 + z_0 = -1 \quad \rightarrow \quad z_0 = -3$$

$$z(t) = 2 \sin(5t + \pi/2) - 3 = 2 \cos(5t) - 3$$

$$\mathbf{r}(t) = [2\sin(5t)+2] \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} + [2\cos(5t)-3] \mathbf{k}$$

A pálya kifejezéséhez azt használjuk ki, hogy  $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ :

$$\sin(5t) = (x-2)/2 \quad \text{és} \quad \cos(5t) = (z+3)/2$$

$$\text{amiből } (x-2)^2 + (z+3)^2 = 2^2,$$

ami egy  $x = 2, z = -3$  középpontú,  $r = 2$  sugarú **kör** az  $y = 3$  síkban.

b./ A gyorsulásvektort a sebességvektor deriválásával kapjuk:

$$a_x = -ab \sin(bt) = -50 \sin(5t)$$

$$a_y = 0$$

$$a_z = -ab \sin(bt+c) = -50 \sin(5t+\pi/2) = -50 \cos(5t)$$

$$\mathbf{a}(t) = -50 \sin(5t) \mathbf{i} - 50 \cos(5t) \mathbf{k}$$

Két vektor merőleges, ha a skalárszorzatuk zérus:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 10 \cos(5t) \cdot (-50 \sin(5t)) + (-10 \sin(5t)) \cdot (-50 \cos(5t)) = \dots = 0,$$

vagyis a sebesség és a gyorsulás vektora **minden pillanatban merőlegesek egymásra**, ami igaz, ha a test egyenletes körmozgást végez. Azt már láttuk, hogy a mozgás pályája kör, a

sebesség nagysága pedig  $v(t) = 10 \sqrt{\cos^2(5t) + \sin^2(5t)} = 10$  m/s, tényleg állandó.