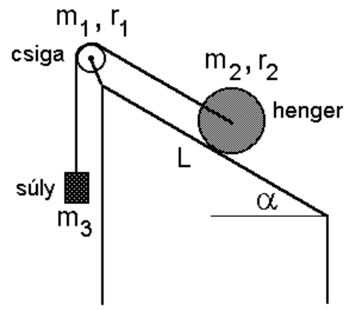
Fizika 1 Mechanika számolási gyakorlat 2013. tavasz
8. házi feladat

Egy r_2 sugarú, m_2 tömegű henger tengelyéhez egy kötelet kötöttünk, a kötelet átvetettük a lejtő tetejéhez rögzített r_1 sugarú, m_1 tömegű csigán, a kötél másik végére egy m_3 tömegű súlyt kötöttünk. A hengert az L hosszú, α hajlásszögű lejtő közepére tettük (a kötél párhuzamos a lejtővel) és az összekötött rendszert elengedtük.



A kötél nem csúszik meg a csigán, a csiga súrlódásmentes, a henger tisztán gördül a lejtőn.
$m_1 = 5$ kg, $r_1 = 10$ cm, $m_2 = 25$ kg, $r_2 = 50$ cm, $m_3 = 10$ kg, $L = 20$ m, $\alpha = 30°$.
a/ Vegyük a rendszer potenciális energiáját a kezdeti helyzetben zérusnak. Mennyi lenne a potenciális energia, ha a henger a lejtő alsó, ill. felső végénél állna?
b/ Milyen irányban mozog a henger a lejtőn középről indulva? (Meg tudjuk válaszolni a gyorsulás kiszámolása nélkül?)
c/ Mekkora sebességgel mozog a súly, amikor a henger a lejtő végéhez ér?

Megoldás:
a/ Ha a henger a lejtő közepéről a lejtő tetejére mozdul el, akkor $h_2 = L/2 \cdot \sin 30° = 5$ m-t emelkedik, miközben a súly $h_3 = L/2 = 10$ m-t süllyed, tehát $E_{mech,\,fent} = m_2 h_2 g - m_3 h_3 g = 25\cdot5\cdot10 - 10\cdot10\cdot10 = 250$ J; a lejtő aljára mozdulva pedig $E_{mech,\,lent} = -250$ J.
b/ Olyan irányba fog elmozdulni, hogy a rendszer összes mechanikai energiája csökkenjen, azaz a henger a lejtőn lefelé mozog.
c/ A sebesség kiszámolható abból, hogy a helyzeti energia változása egyenlő a mozgási energiák változásával. A henger és a súly sebessége megegyezik (mivel a kötéllel össze vannak kötve), ezen felül a henger és a csiga forog is, a szögsebességük $\omega = v/r$, a tehetetlenségi nyomatékuk $\Theta = ½\, mr^2$, tehát: a súlyra $E_{kin,s} = ½\, m_3 v^2 = 5v^2$, a csigára $E_{kin,cs} = ½\, \Theta_1 \omega_1^2 = ½\, (½ m_1 r_1^2)(v/r_1)^2 = ¼\, m_1 v^2 = 1{,}25v^2$, a hengerre $E_{kin,h} = ½\, m_2 v^2 + ½\, \Theta_2 \omega_2^2 = ½\, m_2 v^2\ ½\, (½ m_2 r_2^2)(v/r_2)^2 = ½\, m_2 v^2 + ¼\, m_2 v^2 = ¾\, m_2 v^2 = 18{,}75v^2$.
Az energia-megmaradás: $0 = -m_2 h_2 g + m_3 h_3 g + ½\, m_3 v^2 + ½\, \Theta_1 \omega_1^2 + ½\, m_2 v^2 + ½\, \Theta_2 \omega_2^2 = -250 + 25v^2$
$\rightarrow$ $v = \sqrt{10} \approx 3{,}16$ m/s.

Persze megoldható a feladat úgy is, hogy felírjuk a mozgásegyenleteket:

$m_2 a = m_2 g \sin 30° - K_1$
$\Theta_2 \beta_2 = (½ m_2 r_2^2)(a/r_2) = F_t \cdot r_2$
$\Theta_1 \beta_1 = (½ m_1 r_1^2)(a/r_1) = (K_1 - K_2) \cdot r_1$
$m_3 a = K_2 - m_3 g$

Ezekből $a \approx 0{,}5$ m/s^2. Ekkora gyorsulással $s = L/2$ úton $v = \sqrt{2as} = \sqrt{aL} = \sqrt{10}$ m/s-re gyorsul.