Fizika 1 Mechanika számolási gyakorlat 2013. tavasz

5. házi feladat

Egy 42 cm hosszú, 8 N/m rugóállandójú rugó végéhez rögzítünk egy 12,5 dkg tömegű testet.

Írjuk fel a test kitérését az idő függvényében (a körfrekvencia, amplitúdó, kezdőfázis kiszámolásával), ha

a) vízszintes, súrlódásmentes síkon rögzítjük a rugó végét, majd a rugót 10 cm-rel kihúzzuk és úgy engedjük el, hogy a testnek 0,8 m/s kezdősebességet adunk az egyensúlyi helyzete felé;

b) a rugó végét a plafonhoz rögzítjük, és kezdősebesség nélkül elengedjük a testet úgy, hogy a rugó hossza éppen a nyugalmi hossz! (a rugó függőleges)

Az x = 0 pont legyen a rugó rögzítési pontja mindkét esetben.

<u>**Megoldás**</u>

a) Legyen y az egyensúlyi helyzettől való eltérés, vagyis a rugó nyugalmi hosszától mért távolság, ezzel a mozgásegyenlet $ma = m\ddot{y} = -ky$

→ a körfrekvencia $\boldsymbol{\omega} = \sqrt{k/m} = \sqrt{8/0{,}125} = \mathbf{8\ s^{-1}}$

A kitérés ill. a sebesség:

$y(t) = A\cos(\omega t+\varphi_0) = A\cos(8t+\varphi_0)$ ill. $v(t) = -A\omega\sin(\omega t+\varphi_0) = -8A\sin(8t+\varphi_0)$

A kezdeti feltételek szerint: $y_0 = 0{,}1$ m és $v_0 = -0{,}8$ m/s, azaz

$y(0) = A\cos(8\cdot 0+\varphi_0) = 0{,}1$ ill. $v(0) = -8A\sin(8\cdot 0+\varphi_0) = -0{,}8$

→ $A\cos(\varphi_0) = 0{,}1$ és $A\sin(\varphi_0) = 0{,}1$ → $\mathbf{A = 0{,}1\cdot\sqrt{2} \approx 0{,}141\ [m]}$ **és** $\boldsymbol{\varphi_0}$ = arc tg 1 = $\boldsymbol{\pi/4 \approx 0{,}785}$ **rad**

A rugó rögzítési pontjához rakott x koordináta 0,42 m-rel van eltolva, $x(t) = 0{,}42 + y(t)$, azaz

$\mathbf{x(t) = 0{,}42 + 0{,}1\sqrt{2}\cos(8t + \pi/4)\ [m]}$ vagy: $x(t) = 0{,}42 + 0{,}1\sqrt{2}\sin(8t + 3\pi/4)$ [m]

b) Írjuk fel a mozgásegyenletet az x koordinátával (aminek zérus pontja a rugó rögzítési pontja); ekkor a rugóerőt a nyugalmi hossztól (0,42 m-től) kell számolni: $ma = m\ddot{x} = mg - k(x-0{,}42)$

Ennek a rezgésnek az egyensúlyi helyzete most nem a rugó nyugalmi helyzete lesz, hanem ahol $\ddot{x} = 0$, azaz $mg - k(x_{es}-0{,}42) = 0$ → $x_{es} = 0{,}42 + mg/k = 0{,}42 + 0{,}125\cdot 10/8 = 0{,}42 + 0{,}15625 = 0{,}57625$ m.

Írjuk most át a mozgásegyenletet úgy, hogy bevezetjük y-t, az egyensúlyi helyzettől való eltérést:

$y(t) = x(t) - x_{es}$, amivel $x(t) = x_{es} + y(t)$, tehát $m(\ddot{x_{es} + y}) = mg - k((x_{es}+y) - 0{,}42)$.

Mivel x(t) és y(t) csak egy konstansban különböznek, ezért a második deriváltjuk egyenlő.

→ $m\ddot{y} = mg - k((0{,}42 + mg/k + y) - 0{,}42) = mg - k(mg/k + y) = mg - mg - ky = -ky$, vagyis az egyensúlyi helyzettől való eltérésre felírt differenciálegyenletünk ugyanolyan, mint a vízszintesen elhelyezkedő rugó mozgásegyenlete: $m\ddot{y} = -ky$.

A körfrekvencia tehát ugyanannyi lesz a függőleges rezgésnél is, mint a vízszintesnél, $\omega = 8\ s^{-1}$.

A kezdeti értékek pedig $y_0 = -0{,}15625$ m [vagy: $x_0 = 0{,}42$ m] és $v_0 = 0$, azaz

$y(0) = A\cos(8\cdot 0+\varphi_0) = -0{,}15625$ [vagy: $x(0) = 0{,}57625 + A\cos(8\cdot 0+\varphi_0) = 0{,}42$]

és $v(0) = -8A\sin(8\cdot 0+\varphi_0) = 0$. A sebességből $\sin\varphi_0 = 0$ → $\varphi_0 = 0$ vagy π,

a kitérésből $y(0) = A\cos\varphi_0 = -0{,}15625$ [vagy: $x(0) = 0{,}57625 + A\cos\varphi_0 = 0{,}42$]

→ $A = 0{,}15625$ és $\varphi_0 = \pi$,

vagyis $x(t) = 0{,}57625 + 0{,}15625\cos(8t + \pi)$ vagy: $x(t) = 0{,}57625 + 0{,}15625\sin(8t + 3\pi/2)$

vagy: $x(t) = 0{,}57625 - 0{,}15625\cos(8t)$