5 . házi feladat

Beadási határidő: márc. 28. hétfő, ill. márc. 31. csütörtök

Egy repülőgép v_0 = 72 km/h kezdősebességgel ér földet és gurulni kezd. A fékezőerő nagysága

F(v) = k(v+b)^2 [N] ,

ahol b = 10 m/s és v a pillanatnyi sebesség nagysága m/s-ban,

k = 1 kg/m.

A gép tömege m = 500 kg.

a/ Mennyi idő alatt áll meg a gép?

b/ Mekkora utat tesz meg addig?

MO.

A mozgásegyenlet

$$m\frac{dv}{dt} = -k(v+b)^2.$$

Szeparáljuk és integráljuk:

$$\int_{v_0}^{v} -(v'+b)^{-2}\,dv' = \frac{k}{m}\int_0^t dt'$$

$$\left[\frac{1}{v'+b}\right]_{v_0}^{v} = \frac{k}{m}[t']_0^t \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{v+b} - \frac{1}{v_0+b} = \frac{k}{m}t$$

azaz $v = \frac{m}{k}\frac{1}{t+\frac{m}{k(v_0+b)}} - b = 500\frac{1}{t+\frac{50}{3}} - 10$

a/ v = 0 ha $t = \frac{m}{k}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{v_0+b}\right) \approx 33{,}3\ s$

b/ A megtett utat megkapjuk a v(t) függvény integrálásával:

$$\int_0^x dx' = \int_0^t \left(\frac{m}{k}\frac{1}{t'+\frac{m}{k(v_0+b)}} - b\right)dt'$$

$$x = \frac{m}{k} ln\left[1 + \frac{k}{m}(v_0+b)t\right] - bt = 500\ ln\left(1 + \frac{30}{500}t\right) - 10\ t$$

a megállásig megtett távolság x(33,3) ≈ 216 m.

VAGY:

a $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$ átalakítással $m\,v\frac{dv}{ds} = -k(v+b)^2$,

ezt szeparálva $\int ds = -\frac{m}{k}\int\frac{v}{(v+b)^2}dv$

és integrálva $s = -\frac{m}{k}\left[\ln(v+b) + \frac{b}{v+b}\right]_{v_0}^{v} = -\frac{m}{k}\left(ln\frac{v+b}{v_0+b} + \frac{b}{v+b} - \frac{b}{v_0+b}\right) = 500\left(ln\frac{30}{v+10} + \frac{10}{30} - \frac{10}{v+10}\right)$

A megállásig (v=0) megtett út s(0) = 500(ln3–2/3) ≈ 216 m.