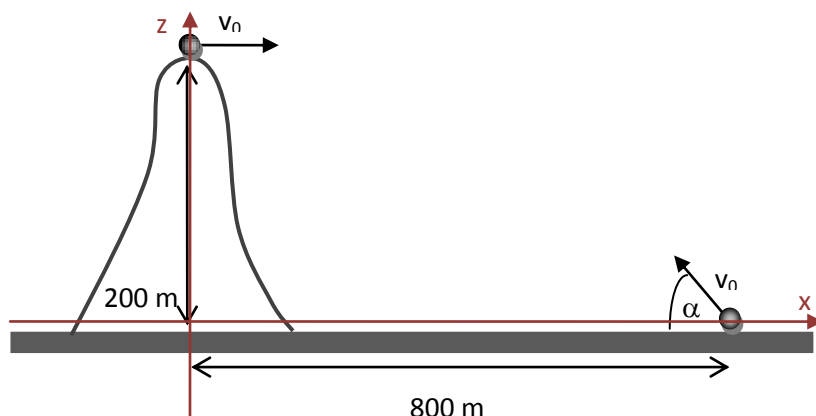


2. házi feladat

A hegyről lövik a síkságon lévő lőállásokat. A hegyen és a síkságon lévő ágyúk egyformák, az ágyúgolyók kezdősebessége $v_0 = 500 \text{ m/s}$. A hegyen lévő ágyú csöve vízszintesen áll. A síkságon lévő ágyúból a golyót pont 1 s-mal azután lövik ki, hogy meglátták a hegyi ágyú torkolattüzét. Sikerül is az ágyúgolyót még a levegőben eltalálni és eltéríteni a céltól. Hol találja el egymást a két ágyúgolyó? Mekkora a síkságon lévő ágyú csövének a vízszintessel bezárt szöge? $g = 10 \text{ m/s}^2$



MO.

A hegycsúcsról kilőtt ágyúgolyó helyvektora, ha az origó a hegy talppontjában van, az x tengely a síkságon lévő ágyú felé mutat, és az ágyúgolyót $t = 0$ -ban lőtték ki:

$$\mathbf{r}_1(t) = 500t \mathbf{i} + (200 - 10/2t^2) \mathbf{k},$$

a síkságon kilőtt ágyúgolyó helyvektora pedig

$$\mathbf{r}_2(t) = [800 - 500 \cdot \cos\alpha(t-1)] \mathbf{i} + [500 \cdot \sin\alpha(t-1) - 10/2(t-1)^2] \mathbf{k}$$

A két ágyúgolyó helyvektora egyenlő kell legyen; komponensenként felírva:

$$x \text{ koordináta: } 500t = 800 - 500 \cdot \cos\alpha(t-1)$$

$$z \text{ koordináta: } 200 - 10/2t^2 = 500 \cdot \sin\alpha(t-1) - 10/2(t-1)^2$$

$$\text{Az első egyenletből } \cos\alpha(t-1) = (800 - 500t)/500 = 1,6 - t,$$

$$\text{a másodikból } \sin\alpha(t-1) = (205 - 10t)/500 = 0,41 - 0,02t.$$

Ezeket négyzetre emelve és összeadva egy t -ben másodfokú egyenletet kapunk, aminek a megoldása $t_1 \approx 1,42 \text{ s}$ és $t_2 \approx 3040 \text{ s}$.

A t_1 -ből számolt szög $\alpha_1 \approx 64,9^\circ$, és az ágyúgolyók találkozásának helye

$$x_1(t_1) = 500 \cdot 1,42 = x_2(t_1) = 800 - 500 \cdot \cos 64,9^\circ \cdot 0,42 \approx 711 \text{ m}$$

$$z_1(t_1) = 200 - 5 \cdot 1,42^2 = z_2(t_1) = 500 \cdot \sin 64,9^\circ \cdot 0,42 - 5 \cdot 0,42^2 \approx 190 \text{ m}$$

$$\mathbf{r}(t_1) = 711 \mathbf{i} + 190 \mathbf{k} \text{ [m]}.$$

A t_2 -ből számolt szög $\alpha_2 \approx 178,9^\circ$,

és az ágyúgolyók találkozásának helye

$$x_1(t_2) = 500 \cdot 3040 = x_2(t_2) = 800 - 500 \cdot \cos 178,9^\circ \cdot 3039 \approx 1,52 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$z_1(t_2) = 200 - 5 \cdot 3040^2 = z_2(t_2) = 500 \cdot \sin 178,9^\circ \cdot 3039 - 5 \cdot 3039^2 \approx -4,62 \cdot 10^7 \text{ m}$$

ami nem lehetséges, mert a föld felszínét ($z = 0$ -t) előbb elérik az ágyúgolyók.

(Ha a Föld sokkal nagyobb lenne – vagy a Föld lapos lenne –, és a homogén erőtér közelítés érvényes lehetne ekkora távolságon is, és az ágyúgolyók földet érési pontja előtt elkezdődne egy $4,62 \cdot 10^7 \text{ m}$ mély kráter, akkor lenne csak értelme ennek a megoldásnak.)