Vázlat 2016. febr. 15. 1.

MECHANIKA mivel foglalkozik?
- tömegpont pl. molekula, Föld
- tömegpont-rdsz. pl. Naprendszer
- kiterjedt test pl. molekula, Föld
  - merev test (nem változik) (információ terjedése)
  - deformálható test / szilárd rugalmas alakváltozásra
  - fluidum

→ KINEMATIKA $\underline{r}, \underline{v}, \underline{a}$

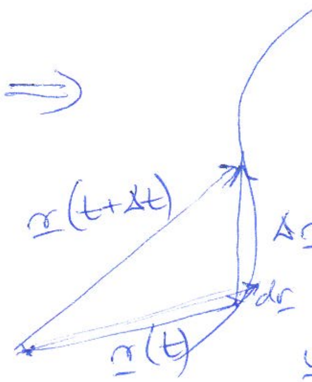
→ DINAMIKA $\underline{F}, \underline{M}, m$

SI s: Ce^{133} (Cs!) ; m: fénysebesség [állandó! biciklis, nyíl, űrhajós, lézer] ; kg: etalon ; A, cd, K, mol

KINEMATIKA

von. rdsz. (fizikai test) pl. Nap, szék, űrhajó ⟹

koord. rdsz. (csak a fejünkben létezik) a számszerűsítéshez



$\underline{r}(t)$ helyvektor

$\Delta\underline{r} = \underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)$ elmozdulásvektor

$\langle \underline{v} \rangle \triangleq \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$ átlagseb. ⊛

pillanatnyi seb. (autó sebességmérő)

$\underline{v} \triangleq \frac{d\underline{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \dot{\underline{r}}$

infinitezimálisan kicsi

~~[illegible]~~

$\underline{v} \parallel d\underline{r}$: pálya érintője

[nagysága nem volt]

(mi az, hogy vektort deriválunk — majd koord. rdsz.)

[„pálya" volt?]

⟸

$\Delta \underline{v} = \underline{v}(t+\Delta t) - \underline{v}(t)$

$\langle \underline{a} \rangle \triangleq \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t}$ átlaggyorsulás

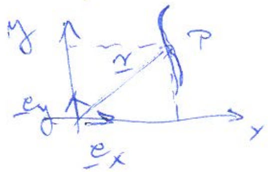
pillanatnyi gyorsulás

$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{r}}$

⟸ hogy deriválunk nyilakat, azaz vektort? koord. rdsz. kell 2D! Descartes %

⊛ átlagseb.: nem a sebességek átlaga!
pl. 10 km 10 km/h-val, 10 km 20 km/h-val

2D Descartes



új jelölés: $P(x,y)$

$$\underline{r} = x\,\underline{e}_x + y\,\underline{e}_y \quad \boxed{=(x,y) \text{ rövidítő jelölés}} \qquad x = r_x,\ y = r_y$$

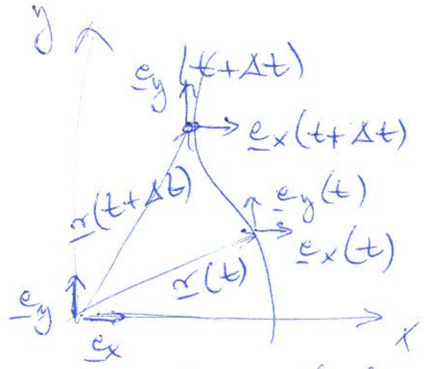
(rögtön ide írom):

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = \frac{d}{dt}\left(x\underline{e}_x + y\underline{e}_y\right) = \dot{x}\,\underline{e}_x + x\,\dot{\underline{e}}_x + \dot{y}\,\underline{e}_y + y\,\dot{\underline{e}}_y =$$

$$= \dot{x}\,\underline{e}_x + \dot{y}\,\underline{e}_y \quad \boxed{= (\dot{x},\dot{y}) \text{ rövidítő jelölés}}$$

(ami az adott egységvektort szorozza (a vektor komponensei)

$\dot{x} = v_x,\ \dot{y} = v_y$



az egységvektorokat oda kell képzelni, ahol a test van!

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\,\underline{e}_x + \dot{y}\,\underline{e}_y\right) = \ddot{x}\,\underline{e}_x + \ddot{y}\,\underline{e}_y \quad \boxed{=(\ddot{x},\ddot{y}) \text{ röv. jel.}} \qquad \ddot{x} = a_x,\ \ddot{y} = a_y$$

nagyságok

$$|\underline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$$

Nándi 2016. febr. 22.

$\boxed{2.\ \text{ea}}$

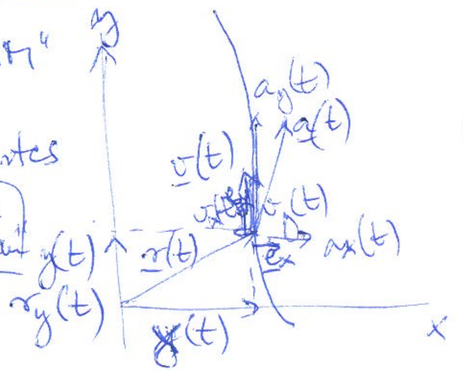
kismozdony terepasztal

$\underline{r}(t)$ piros, $\underline{v}(t)$ sárga, $\underline{a}(t)$ zöld, $\underline{e}$... kék

„ISM"

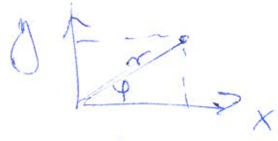
Descartes

$\boxed{\text{(első) a fejünkben}}$



$r_x(t)$

más: poláris



$P(x, y)$

$\hookrightarrow P(r, \varphi)$

a ponthoz odarajzoljuk az $\underline{e}_x, \underline{e}_y$ egységvektorokat

$\rightarrow$ hogyan is?

$\begin{cases} \underline{e}_x: & x \text{ nő}, y \text{ nem változik} \\ \underline{e}_y & y \quad x \end{cases}$

hasonlóan

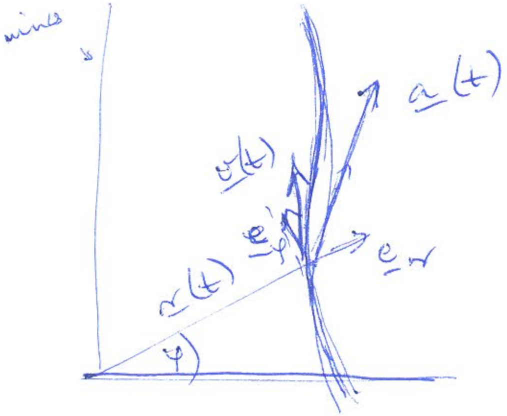
$\begin{cases} \underline{e}_r & r \quad \varphi \\ \underline{e}_\varphi & \varphi \quad r \end{cases}$

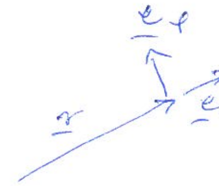
$\underline{r}(t) = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y$

$\underline{v}(t) = \underbrace{\dot{x}}_{v_x}\underline{e}_x + \underbrace{\dot{y}}_{v_y}\underline{e}_y \qquad v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y}$

$\underline{a}(t) = \underbrace{\ddot{x}}_{a_x}\underline{e}_x + \underbrace{\ddot{y}}_{a_y}\underline{e}_y \qquad a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$

mire





„rövidített jelölés"

$\underline{r}(t) = \ldots\underline{e}_r + \ldots\underline{e}_\varphi = r\underline{e}_r + 0\underline{e}_\varphi = r\underline{e}_r \left[= (r, 0) \right]$

$\underline{v}(t) = \ldots\underline{e}_r + \ldots\underline{e}_\varphi =$

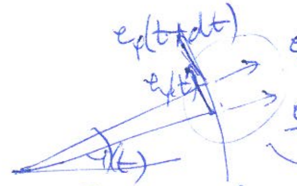
$\underline{a}(t) = \ldots\underline{e}_r + \ldots\underline{e}_\varphi$

ez kell most

„az a szám, ami az $\underline{e}_\square$-t szorozza"

$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}} = \frac{d}{dt}(r\underline{e}_r) = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\underline{e}}_r$

$\underline{e}_r$ változik, ahogy mozog a mozdony! (és $\underline{e}_\varphi$ is)



$\underline{e}_r(t+dt)$

$\underline{e}_r(t)$

$\underline{e}_r(t+dt)$ $d\underline{e}_r$

$\underline{e}_r(t)$

$\circledast$ nagyon rövid $d\underline{e}_r = d\varphi\,\underline{e}_\varphi$

rad

$\dot{\underline{e}}_r = \frac{d\underline{e}_r}{dt} = \frac{\underline{e}_r(t+dt) - \underline{e}_r(t)}{dt} = \frac{d\varphi\,\underline{e}_\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\underline{e}_\varphi$

$\circledast$ $d\underline{e}_r$ merőleges $\underline{e}_r$-re, mert csak (szár, kar Δ) és a hossza $d\varphi$, rad miatt

~~$d\underline{e}_r = \ldots$~~

tehát $\underline{v}(t) = \underbrace{\dot{r}}_{v_r}\underline{e}_r + \underbrace{r\dot{\varphi}}_{v_\varphi}\underline{e}_\varphi \left[= (\dot{r}, r\dot{\varphi}) \right] \qquad v_r = \dot{r} \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}$

↓ ./.

$$\underline{a} = \underline{\dot{v}} = \ddot{r}\underline{e}_r + \dot{r}\underline{\dot{e}}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\underline{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\underline{\dot{e}}_\varphi =$$

$$= \ddot{r}\underline{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\underline{e}_\varphi + r\dot{\varphi}(-\dot{\varphi}\underline{e}_r) =$$

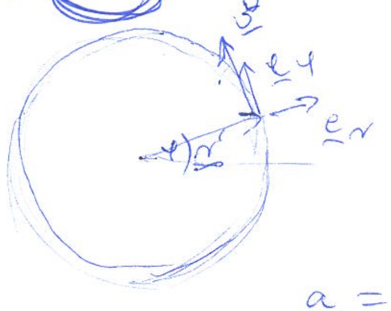
$$= \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)}_{a_r}\underline{e}_r + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})}_{a_\varphi}\underline{e}_\varphi = \left[(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2,\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\right]$$

$$\underline{\dot{e}}_\varphi = \frac{d\underline{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\varphi\cdot(-\underline{e}_r)}{dt} = -\dot{\varphi}\underline{e}_r$$

de_φ, $e_\varphi(t+dt)$, $e_\varphi(t)$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$
$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$$

miért különböztettük ki?
körmozgásnál ez az egyenlő



kör: $r(t) = \text{áll.}$ $\dot{r} = \ddot{r} = 0$

$\underline{v} = (0, r\dot{\varphi})$

$\omega \triangleq \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ szögsebesség $\frac{rad}{s}$

$v = r\omega$ kerületi sebesség

„mozgása szögváltozás, ostoba [illegible] idő alatt"

((nem határoztuk [illegible]))

$$\underline{a} = (-r\dot{\varphi}^2, r\ddot{\varphi})$$

$-r\dot{\varphi}^2 < 0 \Rightarrow$ befelé mutat

$\boxed{\alpha\ \cancel{\beta}} \triangleq \ddot{\varphi} = \dot{\omega}$ szöggyorsulás $\frac{rad}{s^2}$

! $\longrightarrow$ jelölés! Néhol α-t választott

$r\ddot{\varphi}$ lehet poz. v. neg v. 0

$v = r\omega$

$a_r = -r\dot{\varphi}^2 = -r\omega^2 = a_{cp}$ új név: centripetális, a kör kp felé mutat $|a_{cp}| = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} = v\omega$

$a_\varphi = r\ddot{\varphi} = r\alpha = a_t$ tangenciális

fizikai tartalma

$a_{cp} \perp v$

$a_t \parallel v$

a_{cp} a $\underline{v}$ irányát változtatja

$$a_t = r\cdot\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

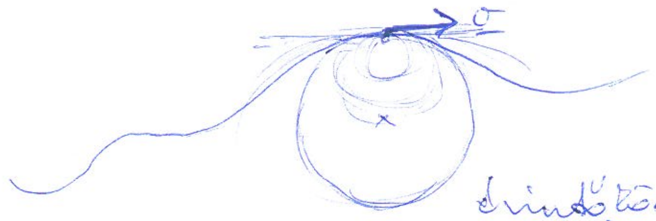
a_t a $\underline{v}$ nagyságát változtatja

$$\underline{a} = \frac{dv}{dt}$$

spec: egyenletes kör: $\omega = \text{áll.}$ $\dot{\omega} = \ddot{\varphi} = 0$

$\underline{v} = (0, r\dot{\varphi})$ $\underline{a} = (-r\dot{\varphi}^2, 0)$ $a_t = 0$

polahat nem csak körmozgásnál → tetszőleges görbe vonalú



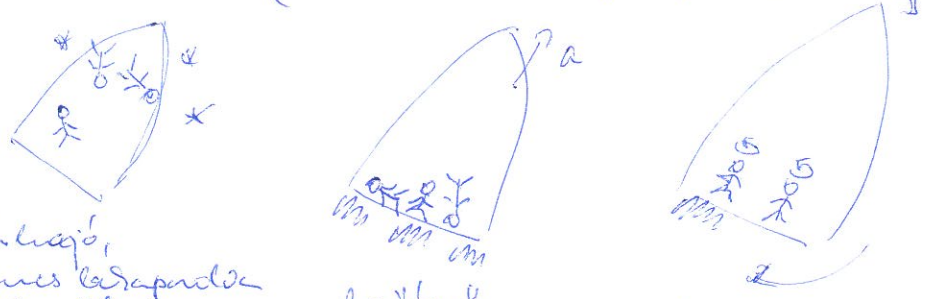
simulókör / érintőkör — érintő a görbült szorosan

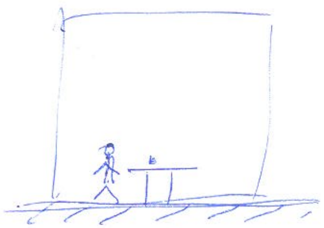
ha ismerjük az adott pontban $\underline{v}$-t és a_{cp}-t $\Rightarrow$ $a_{cp}=\frac{v^2}{R}$

R az érintőkör sugara

(M 35) DINAMIKA

- von. rdsz.: fizikai test, amihez képest leírjuk a mozgást pl. szoba, rét, űrhajó
- inerciarendsz. (a von. rdsz.-ek egy fajtája)





űrhajó, nincs kapaszkodó a hajtómű kikapcsol

$\underline{F}_e=0$

$\Rightarrow \underline{a}=0$

$\Rightarrow$ I.R.

hajtómű bekapcsolva

$\underline{F}_e=0$

de $\underline{a}\neq 0$

$\Rightarrow$ N.I.R.

kívülről nézve helyben marad, de az űrhajó gyorsul alóla, így hogy látjuk...

forog — itt is

szoba

$\underline{F}_e=0$ — eredő erő!

$\Rightarrow \underline{a}=0$

$\Rightarrow$ I.R.

mindegyikben elengedünk egy követ (megpöccintjük)

Nahadi 2016. febr. 19. 3. (IR ism)

Newton I. Inerciarendszerben ha $\underline{F}_e = 0$, akkor $\underline{a} = 0$ [← I.R. def]

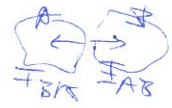
egy testre nem hat erő / eredő — a test nem gyorsul

II. IR-ben ha $\underline{F}_e \neq 0$, akkor $\underline{a} \sim \underline{F}_e$ egyenesen arányos $\underline{a} = \frac{1}{m} \cdot \underline{F}_e$ $\boxed{\underline{F}_e = m\underline{a}}$

m: mennyire nehéz gyorsítani a testet „tömeg"

III. Ha A test erőt fejt ki B-re, akkor B is A-ra

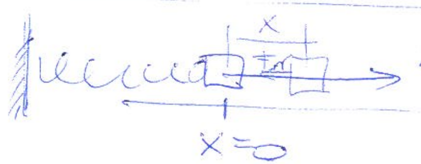
$\boxed{\underline{F}_{AB} = -\underline{F}_{BA}}$ erő-ellenerő az erők párosával lépnek fel (egyik ill. másik testre hat)



IV. Több erő esetén $\boxed{\underline{F}_e = \Sigma \underline{F}_i}$ (vektoriálisan összegződnek)

Fontos erőtípusok a mechanikában

1.) rugóerő



tapasztalat: $F_r \parallel x$ (F_e és x ellentétes előjelű) pl.

$F_r \sim x$

[„egyensúlyi helyzet" felé !] nem volt: „nyugalmi hossz"

$\boxed{F_r = -kx}$ k rugóállandó $\left[\frac{N}{m}\right]$ $\left[\frac{kg}{s^2}\right]$ nem volt

2.) felületi nyomóerő, normálerő

$\boxed{\underline{F}_{ny} \perp \text{felület}}$ és nyomóerő

3.) fonálerő

F_f mindig a fonál irányába mutat és húzóerő

2.), 3.) } kényszererők, pályántartáshoz
a test csak meghatározott módon mozdul el

NEM VOLT: tömegmérések

$\underline{0}$ és $\underline{a}$ MAS!!! gyakorlatra!

4.) súrlódási erő

csúszás $\vec{F}_{húzó}$

$\vec{F}_{súrlódási}$

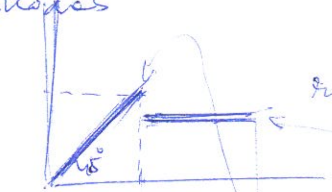
| súrl. erő alkalmazása

jutás

$\rightarrow F_t$

csúszó
↳ fékezés
↳ hegedű
medalműve ∴

$F_{súrlódás}$



$F_{vízszintes}$ (erre fügőleges)

tapadó | csúszó

$\rightarrow F_t$ $\quad F_s$

kísérleti tapasztalatok: csúszó: $F_s \sim F_{ny}$

$\boxed{F_s = \mu_s F_{ny}}$

μ_s : csúszó súrl. eh. [-]

tapadó: $F_{t,max} \sim F_{ny}$

$F_{t,max} = \mu_t F_{ny}$

μ_t : tapadó súrl. eh.

$\boxed{F_t \le \mu_t F_{ny}}$

5.) közegellenállás

pl. légellenállás, víz [dissipatív erő, mint F_s, azaz hő keletkezik]

tapasztalat

$\underline{F}_{ke} \uparrow\downarrow \underline{v}$

$\boxed{F_{ke} \sim v}$ kis sebességre, ill. kis Re-szám esetén (pl. biciklis)

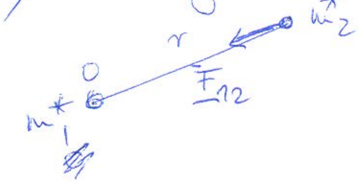
vagy vagy

$\boxed{F_{ke} \sim v^2}$ (pl. repülő)

$\boxed{F_{ke} = -k \cdot v}$

vektoriál mikor ?!?

6.) ~~Tömegpontok~~ gravitációs erő két tömegpont (vagy gömbszimmetrikus test) között

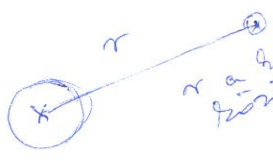


tapasztalat

$F_{12} \sim \frac{1}{r^2}$

$F_{12} \sim m_1^* m_2^*$

$\left.\begin{matrix} m_1^* \\ m_2^* \end{matrix}\right\}$ „milyen súlyosan vesznek részt ebben a kölcsönhatásban"



r a középpontok közötti távolság

$F_{12} = \gamma \frac{m_1^* m_2^*}{r^2}$ $\quad \gamma \left[\frac{Nm^2}{kg^2}\right]$ $\quad$ 6,67 · 10⁻¹¹ egyetemes grav. áll.

$\boxed{\underline{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1^* m_2^*}{r^2} \underline{e}_r}$ $\quad$ [$\underline{e}_r$ a rajzon m_1-től m_2-ig tart! ∴]

$m^* = m$

rejtély, hogy ezt miért tapasztaljuk

m^* : gravitációs tömeg: mennyire súlyosan vesz részt grav. kh-ban

m : tehetetlen tömeg: mennyire nehéz rávenni, hogy gyorsuljon

megoldást: Einstein, ált. rel. elm.

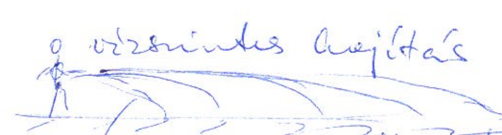
7.) gravitációs erő a Föld felszínén $\quad F_g = \gamma \frac{M_F m}{R_F^2}$

egyszerűbb ; $\quad g = 9{,}81\ m/s^2$

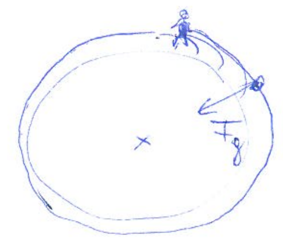
$F_g = mg$ (ha a Föld felszínén)

Nándi 2016. febr. 25. $\boxed{\text{3. folyt}}$

N II. alkalmazása pl. vízszintes hajítás



parabolapálya de itt már nem sík!



v_1 : első kozmikus sebesség

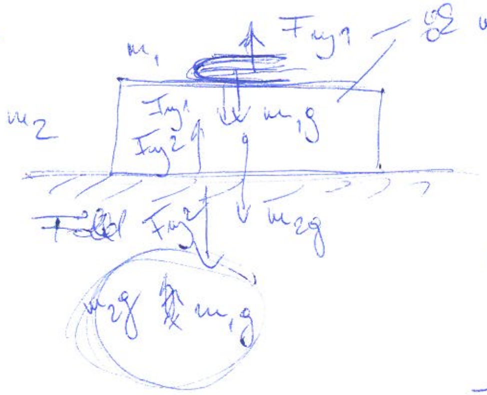
$\underline{F}_e = m\underline{a}$: $F_g = ma$ $\quad mg = m\frac{v_1^2}{R_F}$ $\quad v_1 = \sqrt{gR_F} = 7{,}9\ \mathrm{km/s}$

$[\underline{F}_e \uparrow\uparrow \underline{a}]$

N III. gyakorlása

erő-ellenerő

berajzoljuk az összes erőt, és azonosítjuk az erő-ellenerő párokat



ez nem erő-ellenerő

színkódolás dolgok szerint
(m_1 narancssárga)
m_2 piros
Föld lila

m_1-re : $m_1 g$, F_{ny1}

m_2-re : $m_2 g$, F_{ny1}, F_{ny2}

Földre : $m_1 g$, $m_2 g$, F_{ny2}

Nándi 2016. márc. 5. (kontakt) 4.

mozgásegyenlet (= N. II. másik neve) $\underline{F}_e(t, \underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t)) = m \cdot \ddot{\underline{r}}(t)$

pl. rugó $F_r = -kx(t)$; pl. közegell. $F_k = -kv(t)$

másodrendű diff. e. $\underline{r}(t)$-re
MO: $\underline{r}(t)$ mozgásfüggvény

pl. $m\underline{a} = \underline{F}_e$ rugó rezgőmozgás

$m\ddot{x}(t) = -kx(t)$ megoldása? $x(t) = ?$

$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t)$

általában ["mennyiség"(t)]$''$ = − konst · ["mennyiség"(t)] ⇒ "mennyiség(t)" $= K_1 \sin(\omega t + K_2)$

"mennyiség$'(t)$" $= K_1 \omega \cos(\omega t + K_2)$

"mennyiség$''(t)$" $= -K_1 \omega^2 \sin(\omega t + K_2)$

$\ddot{M}(t) = -\text{konst} \cdot M(t)$

igaz, ha $\omega^2 = \text{konst}$, $\omega = \sqrt{\text{konst}}$

K_1, K_2: 2 kezdőfeltételből (persze)

$\boxed{\sin}\ \boxed{\varphi}$
⇕ ⇕
$\boxed{\cos}\ \boxed{\varphi_0}$

pl. $k = 4\frac{N}{m}$, $m = 1\,kg$
+ 2 kezdőfeltétel:
$t = 0$ $x_0 = -0{,}1\,m$, $v_0 = 3\,m/s$

$A = ?$ $\omega = ?$ $\varphi = ?$

$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2\ \frac{rad}{s}$

$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi) = v(t)$

$x_0 = A\sin\varphi = -0{,}1$
$v_0 = A\omega\cos\varphi = 3$ ⇒ A, φ

a mozgásegyenlet determinisztikus
determinizmus: a fizikai rdsz. és a kezdőfelt. pontos ismeretében $\underline{r}(t)$ tetszőleges időpontban meghatározható (kiszámolható)

%

% determ.

DE: 1) a kezdőfeltételeket ∞ tizedesjegy pontossággal kell ismerni.

integrálható	kaotikus
pl. inga	pl. kettős inga
pl. Naprendsz. „rövid" távon (millió évig)	pl. Naprendsz.
	pl. kockadobás
pl. biliárd	
elliptikus	körön henger(ek)

2) Heisenberg-féle határozatlansági reláció $\Delta x \cdot \Delta v >$ valamilyen konstans

$\boxed{\underline{p}}$ ⇒ $\boxed{!}$

új mennyiség: $\underline{p} \triangleq m \cdot \underline{v}$ impulzus

$m \xrightarrow{\underline{v}}$

hasznos mennyiség, mert

1) NT. felírható $\underline{p}$-vel $\boxed{\underline{F}_e = m\underline{a} = m\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d(m\underline{v})}{dt} = \frac{d\underline{p}}{dt}}$ „impulzustétel tömegpontra" (NT. újabb neve)

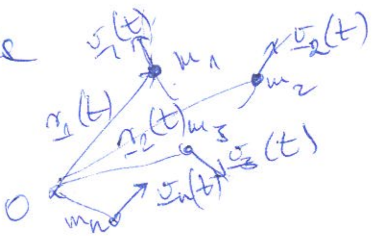
megjegyzés: $\underline{F}_e = m\underline{a}$ csak ha $v \ll c$

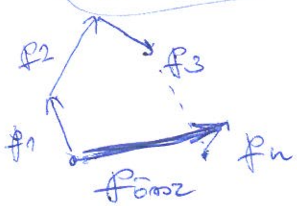
$\underline{F}_e = \dot{\underline{p}}$ mindig igaz, ha $\underline{p}$ def. $\underline{p} \triangleq \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

2) zárt rendszerben $\underline{p}_{össz}$ megmaradó mennyiség ld. később (nem sokára)

kívülről nem hat erő — tetsz. — ill. ütközésekkor

tömegpont-rendszer n db





$\underline{p}_{össz} = \sum \underline{p}_i$ NT. m_1-re $\underline{F}_{e(b)1} + \underline{F}_{e(k)1} = \dot{\underline{p}}_1$ (belső - külső erő)

m_2-re . . . . . .

impulzustétel (tömegpontrendszerre) $\boxed{\underline{F}_{ek} = \dot{\underline{p}}_{össz}}$ ⇒ ⊕

Nahodi 2016. márc. 5. $\boxed{\text{4. folyt}}$

(*) ~~spec. [illegible] zárt~~
spec. eset: zárt rendszer $\quad F_{\text{külső erő}} = 0 \Rightarrow \boxed{P_{\text{össz}} = \text{állandó}}$ (időben)

impulzusmegmaradás

fontos példa: ÜTKÖZÉSEK (van ~~külső~~ erő, de elhanyagolható a belső erőkhöz képest)

→ tök. rugalmatlan (összetapadnak)

→ tök. rugalmas (nincs mozg. E veszteség)

Nándi | 2016 márc. 7. (5.)

tökéletesen rugalmas ütközés

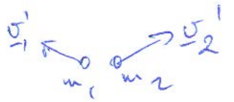
előtte

adott $\underline{v}_1, \underline{v}_2$

imp. megm. $\underline{p}$ össz előtt = $\underline{p}$ össz után

$$m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2 = m_1\underline{v}_1' + m_2\underline{v}_2'$$ 1D v. 2D v. 3D

utána



keressük $\underline{v}_1', \underline{v}_2'$-t

mozgási E megm. $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$

1D ho: $v_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2$

2 egyenlet
2 ismeretlen

$v_2' = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2 + \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1$

2 konkrét eset:

ha $m_1 = m_2$: $v_1' = v_2$, $v_2' = v_1$ sebességcsere

ha $m_1 \gg m_2$: v_1' = elhanyagolható $\frac{m_2}{m_1}$-gyel ... $= v_1$; $v_2' = -v_2 + 2v_1$

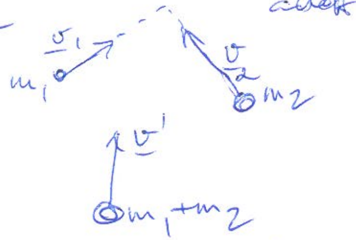
$v_2 = 0$-val ~~...~~?

$v_2' = 2v_1$
imp. megm.!
a képlet ad
közelítés

2D: 3 egyenlet, 4 ismeretlen } alulhatározott
3D: 4 egyenlet, 6 ismeretlen

tök. rugalmatlan ütk.

előtte



adott $\underline{v}_1, \underline{v}_2$

keressük $\underline{v}'$-t

mozgási E nem marad meg (pl. hővé alakul)

imp. megm. $m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2 = (m_1+m_2)\underline{v}'$

$$\underline{v}' = \frac{m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2}{m_1+m_2}$$

1D 1 egyenlet, 1 ismeretlen
2D 2 " 2 "
3D 3 " 3 "

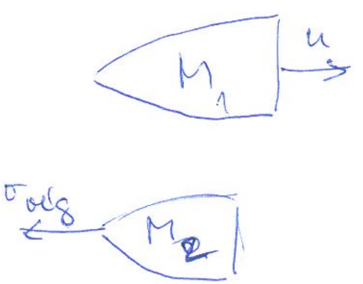
pl. szimmetrikus $m \xrightarrow{v}$ $\xleftarrow{v} m$; $2m$: áll } látható, hogy a mozgási E nem marad meg%

$E_{mozg,előtt} > E_{mozg,után}$

% rugalmatlan ütközés időben visszafelé: robbanás (meghasadás)

$E_{mozg,előtt} < E_{mozg,után}$ $\qquad$ $p_{előtt} = p_{után}$

(V) RAKÉTAMOZGÁS

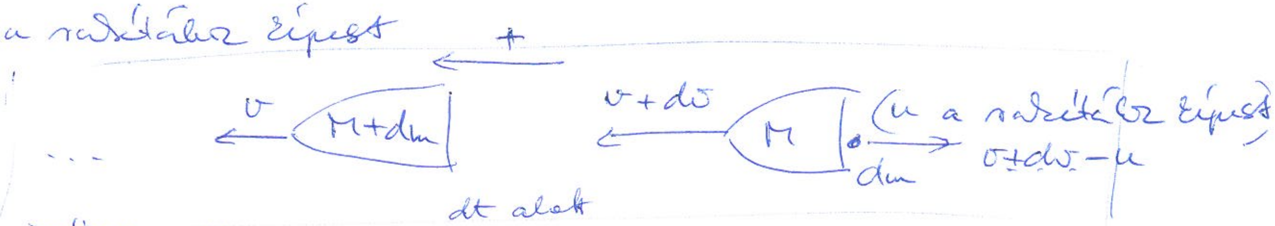


u: a hajtógáz seb. a rakétához képest

M_1: kezdőtömeg

M_2: végtömeg

$v_{vég} = ?$



az egészre nem,,
de ilyen rövid időre felírható az i-g. megm.

$$(M+dm)v = M(v+dv) + dm(v+dv-u)$$

$$\cancel{Mv} + \cancel{dm\,v} = \cancel{Mv} + M\,dv + \cancel{dm\,v} + \underbrace{dm\,dv}_{\text{elhanyagolható}} - dm\,u$$

$$M\,dv = u\,dm \qquad dM = -dm$$

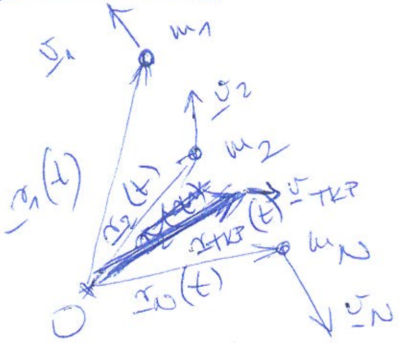
a rakéta tömegének megvált.

$$\int_0^{v_{vég}} dv = -u\int_{M_1}^{M_2}\frac{dM}{M} \qquad u \text{ konstans}$$

$$\boxed{v_{vég} = -u\left[\ln M\right]_{M_1}^{M_2} = -u\underbrace{\ln\frac{M_2}{M_1}}_{<0} = \ln\frac{M_1}{M_2}}$$

mert $M_2 < M_1$

Nándi 2016. márc. 7. 5. folyt.



(nem $\underline{r}_{TKP}$, hanem $\underline{r}_{tkp}$)

TÖMEGKÖZÉPPONT

a sok pont átlagos pozíciója

$$\boxed{\underline{r}_{TKP} \triangleq \frac{m_1\underline{r}_1 + m_2\underline{r}_2 + \ldots m_N\underline{r}_N}{m_1+m_2+\ldots+m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i}{M}}$$

„igazságos és hasznos"!

a rendszer össztömege

a tömegközéppontban nincsen semmi!

milyen gyorsan mozog? $\underline{v}_{TKP} \triangleq \frac{d\,\underline{r}_{TKP}}{dt} = \dot{\underline{r}}_{TKP}$

$$\underline{v}_{TKP} = \dot{\underline{r}}_{TKP} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum m_i \underline{r}_i}{M}\right) = \ldots = \frac{1}{M}\left(m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2 + \ldots + m\underline{v}_N\right) = \frac{1}{M}\cdot \underline{p}_{össz}$$

$\underline{p}_{össz} = M\cdot\underline{v}_{TKP}$ a pontrendszer összimpulzusa olyan képletből számolható, mintha az össztömeg a TKP-ban összpontosulna, és $\underline{v}_{TKP}$ sebességgel mozogna

a TKP gyorsulása

$$\underline{a}_{TKP} \triangleq \frac{d\,\underline{v}_{TKP}}{dt} = \dot{\underline{v}}_{TKP}$$

$$\underline{a}_{TKP} = \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{M}\left(m_1\underline{a}_1 + m_2\underline{a}_2 + \ldots + m_N\underline{a}_N\right) =$$

N II.

$$= \frac{1}{M}\left(\underline{F}_{e1} + \underline{F}_{e2} + \ldots + \underline{F}_{eN}\right) =$$

$$= \frac{1}{M}\left(\underline{F}_{eb1} + \underline{F}_{ek1} + \underline{F}_{eb2} + \underline{F}_{ek2} + \ldots + \underline{F}_{ebN} + \underline{F}_{ekN}\right) =$$

összesen 0 N III. miatt

$$\boxed{= \frac{1}{M}\underline{F}_{külső\ erdő}}$$

$$\boxed{\underline{F}_{külső\ erő} = M\,\underline{a}_{TKP}}$$

tömegközéppont tétele ⊛

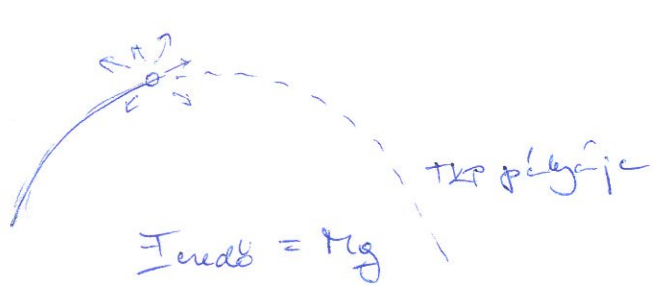
⊛ a tömegpontrendszer TKP-ja úgy gyorsul, mintha az össztömeg ott összpontosulna és csak a külső erők erőt érzékelné!

nem igaz

és mégis ... szemléletes

pl. %

pl. tűzijáték



$\underline{F}_{eredő} = Mg$

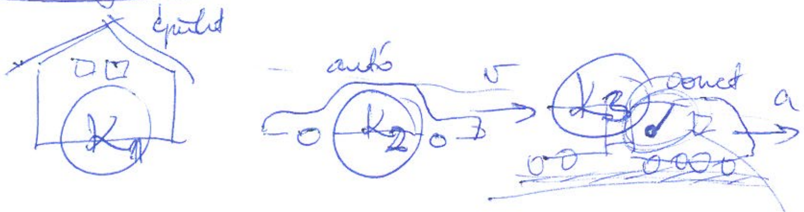
$\underline{a}_{TKP} = g$

MOZGÁS LEÍRÁSA NIR-ben lesz

Nahodi 2016. márc. 21. 6

mozgás leírása nem-inerciarendszerben

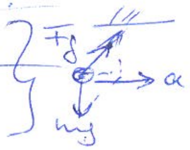
1.



IR?. érvényes N II?

k_1 igen ← $F_k + mg = ma$ ✓

k_2 igen ⇐ — " —



k_3 nem ← $F_k + mg \neq 0$?! ϟ

ezt figyeld meg (járdán álló ürge)

ha egy von. rdsz. egy IR-hez képest

→ v = konst. mozog ⇒ IR

→ gyorsul ⇒ NIR

→ forog ⇒ NIR

2. KÖRHINTA + ROBOT

k_4 nem ← $F_{ny} + mg \neq ma_{cp}$ ϟ

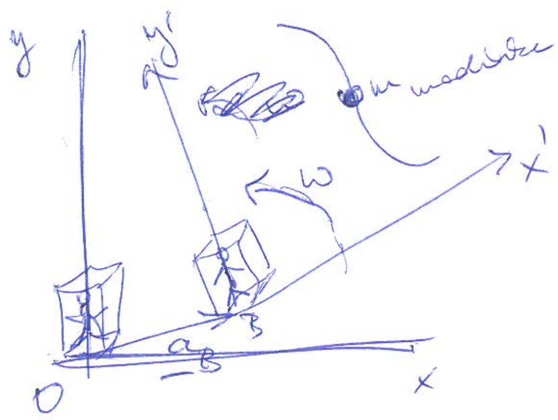
k_5 IR ← $mg + F_{ny} = 0$ ✓

Von. rdsz.
fizikai objektum, amelyhez képest...
„mozgatni kellene"

IR
olyan von. rdsz, amiben érvényes N $\underline{I} + \underline{II} + \underline{III}$

NIR amiben nem...

hogy döntöm el?
kísérlet!
pl.



K IR $\quad \underline{F}_e = m\underline{a}$ helyes $\quad \underline{a}, \underline{v}, \underline{r}$

K' NIR $\quad \underline{F}_e = m\underline{a}'$ helytelen $\quad \underline{a}', \underline{v}', \underline{r}' \quad \underline{\omega}$

VEKTOR-SZORZAT!
$\underline{\omega}$ vektor!

K' számol az $\underline{F}_e = m\underline{a}$ helyes képletből és ekvivalens átalakításokat végez (kezdésnél emeltem)

$$m\left(\underline{a}' + \underline{a}_B - 2\underline{v}'\times\underline{\omega} - \underline{\omega}\times(\underline{r}'\times\underline{\omega}) - \underline{r}'\times\dot{\underline{\omega}}\right) = \underline{F}_e$$

$$m\underline{a}' = \underline{F}_e \underbrace{- m\underline{a}_B + 2m\underline{v}'\times\underline{\omega} + m\underline{\omega}\times(\underline{r}'\times\underline{\omega}) + m\underline{r}'\times\dot{\underline{\omega}}}$$

tegyünk úgy, mintha ezek is „erők” lennének
(ezek nem erők, ezeket nem érzi a madár)
nem léteznek, nem érezhetők

„tehetetlenségi erők”

$-m\underline{a}_B$ transzlációs

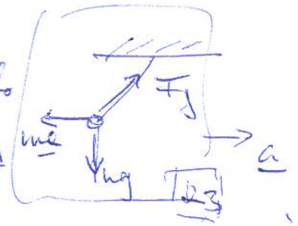
$2m\underline{v}'\times\underline{\omega}$ Coriolis

$m\underline{\omega}\times(\underline{r}'\times\underline{\omega})$ centrifugális

$m\underline{r}'\times\dot{\underline{\omega}}$ Euler

↓ $m\underline{a}' = \underline{F}_e +$ „$\underline{F}_{teh}$”

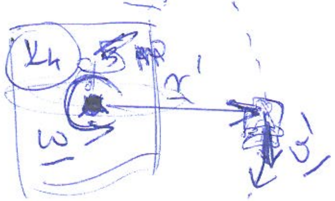
1pl.



hogyan alkalmazza „NII”-t?

$m\underline{g} + \underline{F}_t - m\underline{a} \overset{?}{=} 0$ ✓

2pl.
ω=konst.



$m\underline{a}' = \underline{F}_e +$ „$\underline{F}_{teh}$”

$\underline{F}_t + m\underline{g}$

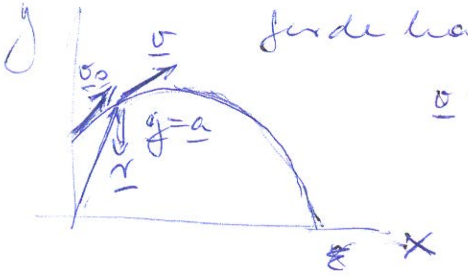
$m\underline{a}_{cp} = 0 + 2m\underline{v}'\times\underline{\omega} + m\underline{\omega}\times(\underline{r}'\times\underline{\omega})$

Coriolis:
$2m\underline{v}'\times\underline{\omega}$ ← befelé $2mv'\omega = 2mr'\omega^2$

centrifugális:
$m\underline{\omega}\times(\underline{r}'\times\underline{\omega})$ → kifelé $mr'\omega^2$ ✓

Nahdi 2016. márc. 21. 6. folyt.

Mozgás homogén erőtér-ben



ferde hajítás

$\underline{v} = \dot{\underline{r}} \quad \underline{a} = \dot{\underline{v}}$

Descartes $\underline{a} = (0, -g)$

$\underline{v} = (v_{0x}, v_{0y} - gt)$

$\underline{r} = (x_0 + v_{0x} \cdot t, y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{g}{2} t^2)$

Nahdi
↓
függőleges: $y \Leftrightarrow z$
⇑
egyéb.

NANDI 2016. ápr. 4. $\boxed{7.}$

ferde hajítás

x–y síkban $v_x = v_{0x}$ $v_y = v_{0y} - gt$

$x = v_{0x}t\,[+x_0]$ $y = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2\,[+y_0]$

→ pálya alakja $y(x) = \dots$ lefelé szélesedő parabola

→ max. emelkedési magasság $h(t_{em})$ ahol $t_{em} = \frac{v_{0y}}{g}$ $h = \frac{v_{0y}^2}{2g}$

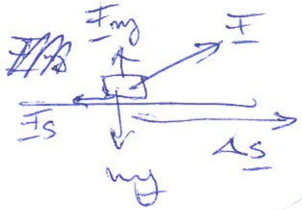
→ hajítás távolsága $L = x(t_{\dots}) = x(2t_{em}) = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

max: 45°

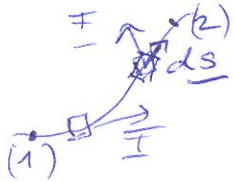
MUNKA

$\underline{F}$ munkája

$W \triangleq \underline{F} \cdot \Delta\underline{s} = \underbrace{\boxed{|F| \cdot |\Delta s| \cdot \cos\alpha}}_{F_{ee}\text{, az } F \text{ elmozdulás irányú komponense}}$ ← csak ha F közben nem változik



általánosan: $\underline{F}$ változhat és a pálya görbült



$dW = \underline{F} \cdot d\underline{s}$

$W = \int dW = \int_{(1)}^{(2)} \underline{F} \cdot d\underline{s}$ $[Nm] = [J]$

speciális eset:

az eredő erő munkája

$$W_e = \int_{(1)}^{(2)} \underline{F_e} \cdot d\underline{s} = \int_{(1)}^{(2)} m\underline{a} \cdot d\underline{s} = \int_{(1)}^{(2)} m \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \underset{(dx,\,dy,\,dz)}{d\underline{s}} = m\left[\int_{(1)}^{(2)} \frac{dv_x}{dt}dx + \int_{(1)}^{(2)} \frac{dv_y}{dt}dy + \int_{(1)}^{(2)} \frac{dv_z}{dt}dz\right] = m\left[\int_{(1)}^{(2)} v_x\,dv_x + \int_{(1)}^{(2)} v_y\,dv_y + \int_{(1)}^{(2)} v_z\,dv_z\right] = \,\text{./.}$$

$\frac{d\underline{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right)$

$$= m\left\{\left[\frac{v_x^2}{2}\right]_{(1)}^{(2)} + \left[\frac{v_y^2}{2}\right]_{(1)}^{(2)} + \left[\frac{v_z^2}{2}\right]_{(1)}^{(2)}\right\} = \frac{1}{2}m\left\{v_{x2}^2 - v_{x1}^2 + v_{y2}^2 - v_{y1}^2 + v_{z2}^2 - v_{z1}^2\right\} \xrightarrow{\text{térbeli Pit. tétel}} = \frac{1}{2}m\left\{v_2^2 - v_1^2\right\} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$E_{kin} \triangleq \frac{1}{2}mv^2$ kinetikus (mozgási) energia

$W_e = \Delta E_{kin}$ munkatétel

különféle erőtípusok munkája milyen matematikai alakban írható
hátha rájövünk valami általános összefüggésre

1. rugóerő

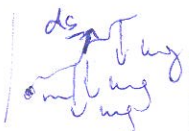
$$\boxed{W_r = \int_{(1)}^{(2)} \underline{F}_r \cdot d\underline{s} = \int_{(1)}^{(2)} -kx\,dx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = -\left[\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right]}$$

$\underline{F}_r = (-kx, 0, 0)$, $d\underline{s} = (dx, dy, dz)$

2. gravitációs erő
→ Földfelszínen

$\underline{F} = m\underline{g}$

$\underline{F} = -mg\,\underline{j}$!

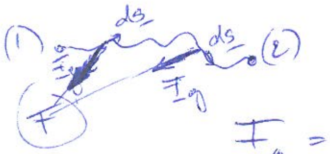


$$W_g = \int_{(1)}^{(2)} \underline{F}_g \cdot d\underline{s} = \int_{(1)}^{(2)} -mg\,dy = -mg(y_2 - y_1) = -\left[mgy_2 - mgy_1\right]$$

$\underline{F}_g = (0, -mg, 0)$

→ általános alak

$$W_g = \int_{(1)}^{(2)} \underline{F}_g \cdot d\underline{s} = \int_{(1)}^{(2)} -\gamma\frac{Mm}{r^2}\,dr = -\gamma Mm\int_{(1)}^{(2)} r^{-2}\,dr = \gamma Mm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = -\left[\left(-\frac{\gamma Mm}{r_2}\right) - \left(-\frac{\gamma Mm}{r_1}\right)\right]$$



$\underline{F}_g = -\gamma\frac{Mm}{r^2}\underline{e}_r$ → polárban $\left(-\gamma\frac{Mm}{r^2}, 0\right)$

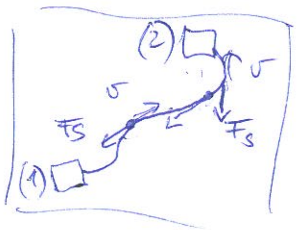
$d\underline{s} = (dr, r\,d\varphi)$

1 → nem függ a test által bejárt úttól, csak a kezdő- és végpont helyzetétől függ

2 → ilyen alakban írható:
$-\left[U(\text{poz }2) - U(\text{poz }1)\right]$
azonos alakú fv.

NÁNDI 2016. ápr. 4. 7. folyt

3. csúszódási erő



$$W_s = \int_{(1)}^{(2)} \underline{F}_s \cdot d\underline{s} = \int_{(1)}^{(2)} -F_s\, ds = -\mu_s F_{ny} \int_{(1)}^{(2)} ds = \boxed{-\mu_s F_{ny} \cdot s}$$

$\underline{F}_s$ ellentétes irányú $d\underline{s}$-sel $\Rightarrow \cos\alpha = -1$

a bejárt út hossza

→ 1, → 2 } nem igaz!

kétféle erő → 1, 2 igaz: konzervatív (pl. rugó, grav)
→ 1, 2 nem igaz: nem konzervatív (pl. súrl, légell.)

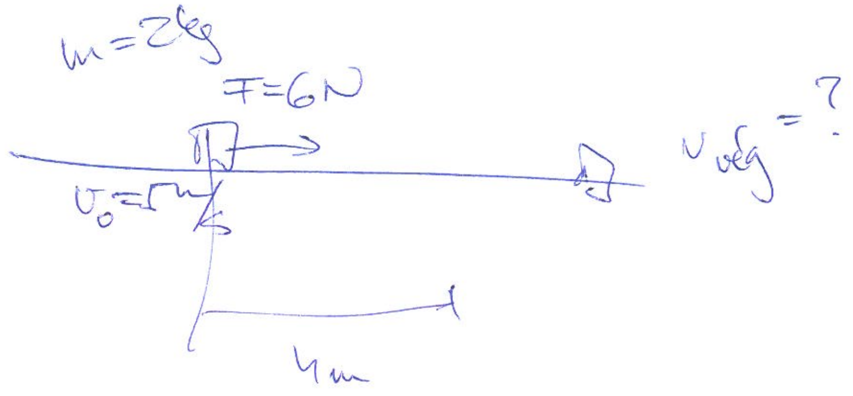
KONZERVATÍV ERŐK def.: amire igaz 1 azaz $\int_{(1)}^{(2)} \underline{F} \cdot d\underline{s}$ független az úttól

bevezethető/definiálható helyzeti/potenciális energia $E_{pot} (= U)$

$$\int_{(1)}^{(2)} \underline{F} \cdot d\underline{s} = \ldots = -\underbrace{\left[E_{pot2} - E_{pot1}\right]}_{\Delta E_{pot}} = -\Delta E_{pot}$$

E_{pot} def: $\Delta E_{pot} \stackrel{\Delta}{=} -\int_{(1)}^{(2)} \underline{F} \cdot d\underline{s}$

E_{pot}-nak nincs fizikai tartalma! csak ΔE_{pot}-nak van


$m = 2kg$
$F = 6N$
$v_0 = 5 \frac{m}{s}$
$v_{vég} = ?$
4m

Naludi   2016 ápr. 11. $\boxed{8.}$

konzervatív erő ...

$$\Delta E_{pot} \triangleq -\int_{(1)}^{(2)} \underline{F} \cdot d\underline{s}$$

pl	E_{pot} (poz)	$\underline{F}$	kapcsolat E_{pot} és $\underline{F}$ között
~~lineáris~~ rugóerő	$E_{pot}(x) = \frac{1}{2}kx^2$	$F_x = -kx$	$F_x = -\frac{dE_{pot}}{dx}$
mg földi	$E_{pot}(y) = mgy$	$F_y = -mg$	$F_y = -\frac{dE_{pot}}{dy}$
ált. grav. erő	$E_{pot}(r) = -\gamma\frac{mM}{r}$	$F_r = -\gamma\frac{mM}{r^2}$	$F_r = -\frac{dE_{pot}}{dr}$

csak ΔE_{pot}!

U − t használni

$d\underline{r} \leftrightarrow d\underline{s}$

grav. erő $y \leftrightarrow z$

Naludi rugóerő: x volt ki „megnyúlás"?

integrális alak

kapcs. $\underline{F}$ és E_{pot} között differenciális alakban

$$dE_{pot} = -\underline{F} \cdot d\underline{s}$$

$$\underline{F} = -\text{grad}\, E_{pot}$$

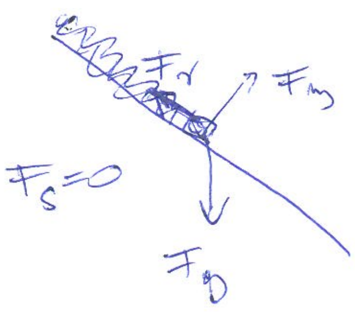
$$\cancel{\underline{F} = -\frac{dE_{pot}}{d\underline{s}}}$$

totál hülyeség, mivel $d\underline{s}$-sel nem osztható

→ helyette gradiens

$$\underline{F} = -\left(\underbrace{\frac{\partial E_{pot}}{\partial x}}_{F_x}, \underbrace{\frac{\partial E_{pot}}{\partial y}}_{F_y}, \underbrace{\frac{\partial E_{pot}}{\partial x}}_{F_z}\right)$$

[pl. $E_{pot} = 3x^2 + 5y\sin z$ $F_x = -6x$ $F_y = -5\sin z$ $F_z = -5y\cos z$]



munkatétel ~~[illegible]~~ $W_{eredő} = \Delta E_{kin}$ bármilyen erőből áll is $F_{eredő}$

ha csak konzervatív erők hatnak a testre (pl. itt, mert $F_s=0$)

W_{ny}!

akkor $W_{eredő} = -\Delta E_{pot}$

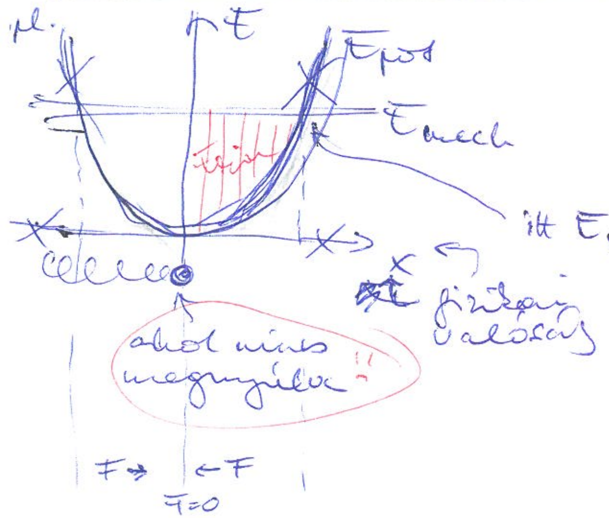
közegell.?

$$0 = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = \Delta \underbrace{(E_{kin}+E_{pot})}_{E_{mech}} = \Delta E_{mech}$$

$\boxed{E_{mech} = E_{kin} + E_{pot} = \text{áll.!}}$ mech E megm. törvénye

mikor? ha

potenciális E diagram



$E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2$

$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot} = \text{áll.}$

itt $E_{kin}=0$, azaz $v=0$, de $a\neq0$, mert erő hat a testre

$F_r = -kx = -\frac{dE_{pot}}{dx}$

leolvasható róla

→ E_{kin} (azaz: milyen gyorsan mozog)

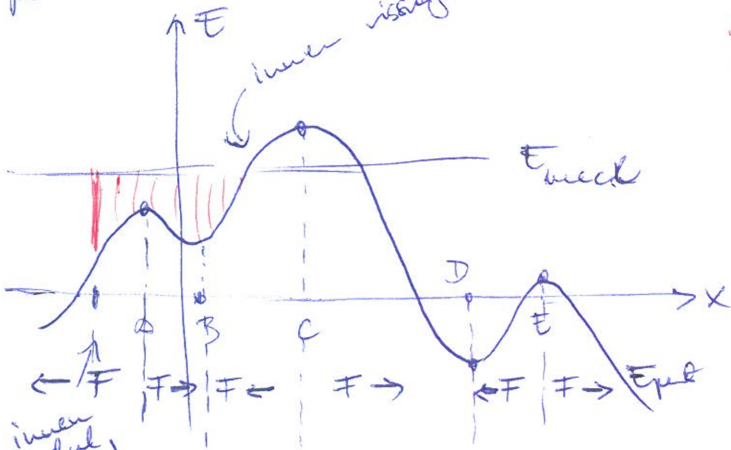
→ milyen tartományokba juthat el a test

→ mekkora és milyen irányú erő hat a testre

→ stabil és instabil egyensúlyi helyzetek)

Nalacli 2016 ápr. 11. 8 folyt.

2. pl.



tényleg Epot volt !!

$F_A, F_B \ldots F_E = 0$

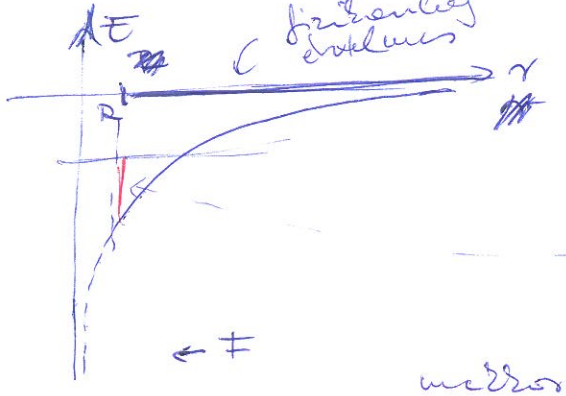
A, B, … E egyensúlyi helyek

A, C, E: instabil e.h.

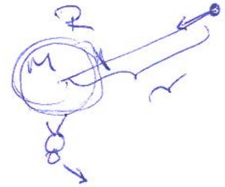
B, D: stabil e.h.

mi van, ha picit kitérítjük)

3. pl. grav.



$E_{pot} = -\gamma \frac{Mm}{r}$



$E_{kin,fold} = \frac{1}{2} m v_{eld}^2 \Leftarrow v_{eld}$

mekkora sebességgel kell eldobni egy követ, hogy végtelenül el tudjon távolodni a Földtől? azaz: v_{2kozm}

(2. kozmikus ill. szökési)

minimum h. $E_{mech} \overset{!}{=} 0$ $E_{kin} + E_{pot} \overset{!}{=} 0$

$\frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{Mm}{r} \overset{!}{=} 0$

$r = R$-re:

$\frac{1}{2} m v_{2kozm}^2 - \gamma \frac{Mm}{R} = 0$ $R = \sqrt{2\gamma \frac{M}{R}} = 11\ km/s$

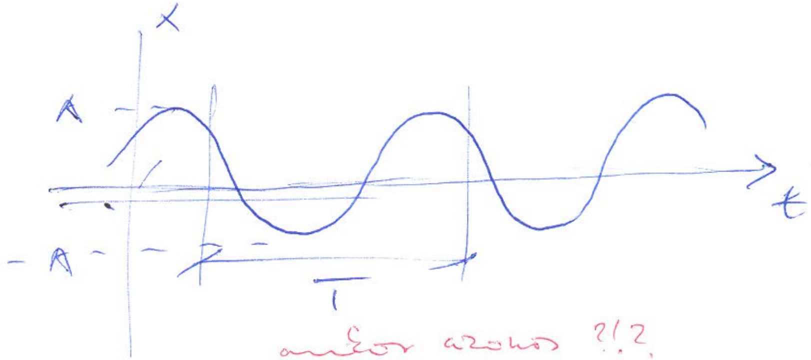
emlékeztető:

M, R $\rightarrow$ $v_{1kozm} = \sqrt{gR} = 7{,}9\ km/s$

$$v_{2kozm} = \sqrt{2\gamma \frac{M}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}\, v_{1kozm}$$

grav. erő: $g = \gamma \frac{M}{R^2}$

IV aludi   2016. ápr. 18   9.



amikor azonos ?!?

REZGÉSTAN   harmonikus rezgőmozgés
szinusos

amplitúdó

fázisállandó φ_0

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

körfrekvencia $\left[\frac{rad}{s}\right]$

$f = \frac{1}{T}$ frekvencia

ugyanaz szinte

ω bevezetése: $x(t) = x(t+T)$

$\omega t + \varphi + 2\pi = \omega(t+T) + \varphi$

(... egyenletes körmozgás vetülete...)

~~1. csillapítatlan szabadrezgés~~

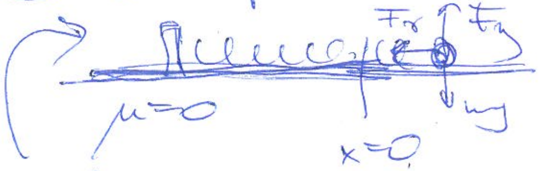
$v = A\omega\cos(\omega t+\varphi)$

$a = -A\omega^2\sin(\omega t+\varphi) = -\omega^2 x$

$\ddot{x}(t) = -\text{konst.}\cdot x(t)$

ilyen alakú DE mo. harm. rezgés & $\omega = \sqrt{\text{konst.}}$

1. csillapítatlan szabadrezgés



$m\underline{a} = \underline{F}_e = \underline{F}_r + m\underline{g} + \underline{F}_N$

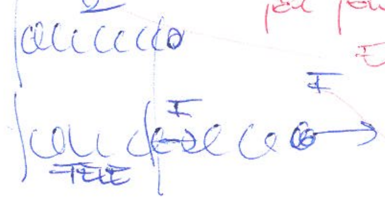
$m\ddot{x} = -kx$

$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t)$

$\Rightarrow$ harm. rezgés, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

1. példa: rugóhoz rögzített test

független a rugó jól jó! ÉS helyzet, φ_0



$k' = \frac{F}{\frac{x}{2}} = 2k$

KÍSÉRLET

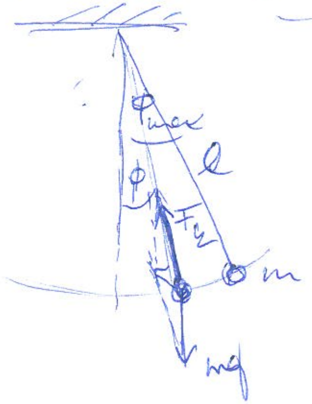
10 s alatt

eredeti   8,5 rezgés

$m\uparrow$ 7,5 rezgés $\omega\downarrow$

$k\uparrow$ (két rugó)   11 rezgés $\omega\uparrow$

2. példa: matematikai inga



$\varphi(t) = ?$

$\underline{F_e} = m\underline{a}$

$F_K - mg\cos\varphi = ma_y$

$? \; mg\sin\varphi = ma_t \qquad |a_t| = l\beta \qquad \beta = \ddot{\varphi}$

$-g\sin\varphi = l\ddot{\varphi}$

$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l}\cdot\sin\varphi(t)$ bonyolult!

→ kis kitérés

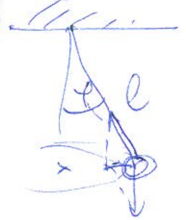
$\varphi_{max} \ll 1 \quad (\varphi_{max} < 5°) \Rightarrow \quad \sin\varphi \approx \varphi$ (rajz)

$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l}\,\varphi(t) \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\varphi(t) = \varphi_{max}\sin(\omega t + \psi) \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

mat. ingás feladat a számegyenesen?

KITÉRŐ: KÚPINGA

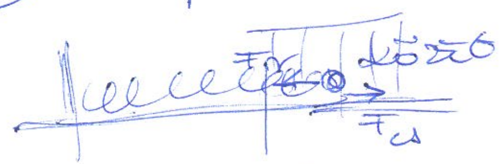


$\varphi, l \Rightarrow v = ?$

$\underline{F_e} = m\underline{a} \qquad mg\,\mathrm{tg}\,\varphi = m\frac{v^2}{l\sin\varphi} \qquad v = \sqrt{gl\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin\varphi}$!

Nádudi 2016 ápr. 18. | 9. folyt.

2. csillapított szabadrezgés



F_{cs}: v-vel ellentétes irányú csillapítási erő

$b: \left[\frac{kg}{s}\right]$

sokszor $F_{cs} = -b \cdot v$ ← csillapítási tényező

$\left(\frac{kg\,m}{s^2} = \frac{kg}{s}\,\frac{m}{s}\right)$

$-kx - bv = ma$

$-kx(t) - b\dot{x}(t) = m\ddot{x}(t) \xrightarrow{\text{DE mo}} x(t) = A \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, ahol $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

„mozgásfüggvény"

RAJZ

lelassul

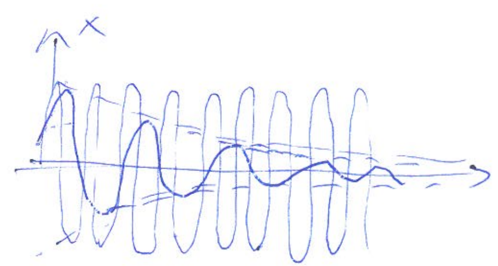
$b \to \omega \downarrow$

$b \to A$ exp. csök.

1.) $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$ alulcsillapított eset

2.) $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$ túlcsillapított eset

3.) $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$ kritikus csillapítás — " —

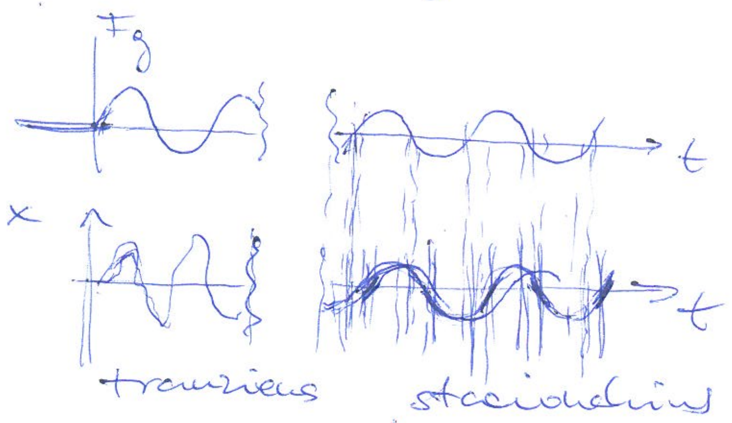


3. csillapított kényszerrezgés

NÁNDI 2016. ápr. 25. 10.

3. CSILLAPÍTOTT KÉNYSZERREZGÉS

$\rightarrow F_g = F_0 \sin \omega_g t$



$$-k\cancel{x} - b\dot{\cancel{x}} + F_0 \sin \omega_g t = m\ddot{x}$$

↳ bonyolult

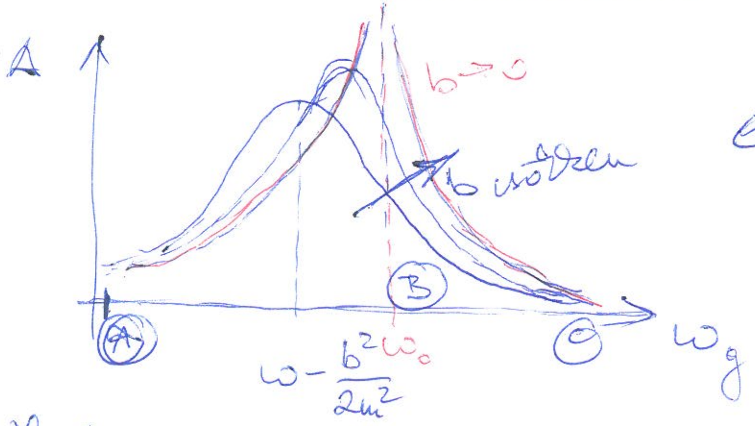
megoldás a stac. állapotban

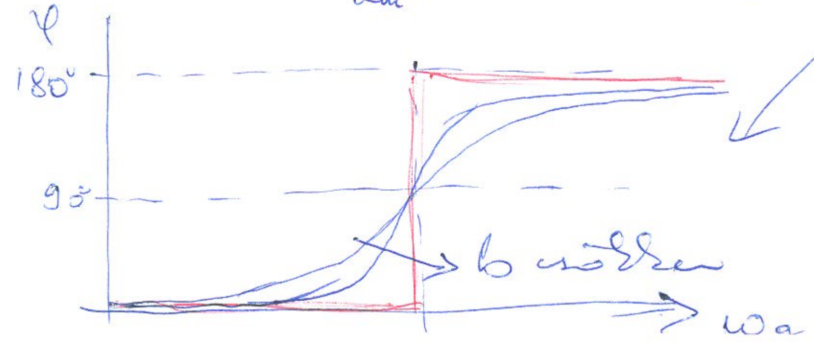
$$x(t) = A(\omega_g) \sin(\omega_g t - \varphi(\omega_g))$$

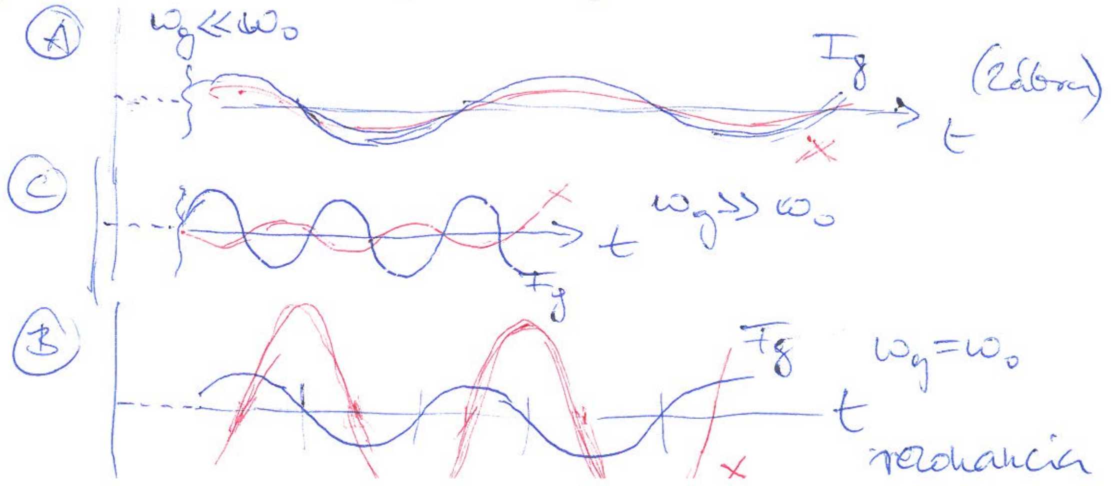
fáziskésés

$$A(\omega_g) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_g^2-\omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega_g}{m}\right)^2}} \quad \text{ahol } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_g = \text{arc tg}\left(\frac{\frac{b\omega_g}{m}}{\omega_0^2-\omega_g^2}\right)$$







REZONANCIA: amikor a gerjesztőerő által betáplált (átlagos) teljesítmény a lehető legnagyobb

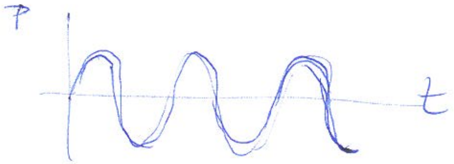
$\llcorner \quad P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot ds}{dt} = F \cdot v$

F_g átlagtelj:

$$\langle P_g(t) \rangle = \langle F_g(t) \cdot v(t) \rangle = \langle \underbrace{F_0 \sin \omega_g t} \cdot \underbrace{A \omega \cos(\omega_g t - \varphi)} \rangle = F_0 A \omega \langle \sin \omega_g t \cdot \cos(\omega_g t - \varphi) \rangle \circledast$$

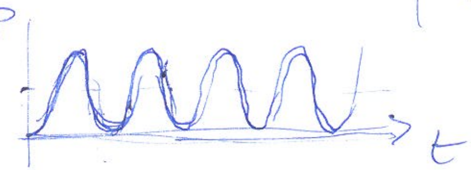
$\varphi = 0$ (és 180°) $\quad \sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$

$\sin \omega_g t \cdot \cos \omega_g t = \frac{\sin 2\omega_g t}{2}$



$\langle . \rangle = 0$

$\varphi = 90°$ $\quad \sin^2 \omega_g t$



$\langle . \rangle = \frac{1}{2}$

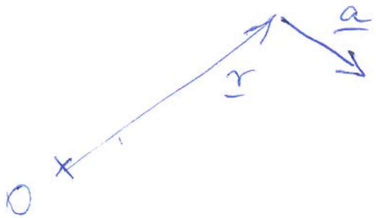
$$\overset{\circledast}{=} F_0 A(\omega_g) \omega_g \frac{\sin \varphi(\omega_g)}{2}$$

$\leftarrow$ keressük a maximumát ω_g szerint

$\frac{dP_g}{d\omega_g} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega_g = \omega_0$ rezonanciafrekvencia

NÁNDI 2010. ápr. 25. 10. folyt

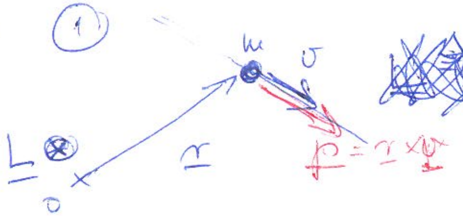
n^{ed} vektor nyomatéka (momentuma) adott pontra



$\underline{n}$: $\underline{a}$ vektor O-ra von. nyomatéka

$\underline{n} \triangleq \underline{r} \times \underline{a}$ „mert hasznos lesz"

pl. (1)

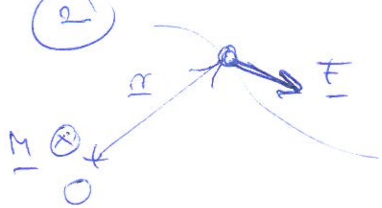


$\underline{p} = m\underline{v}$

~~[illegible]~~ → imp. nyomaték, imp. momentum, „perdület"

$\underline{L} \triangleq \underline{r} \times \underline{p}$ $\frac{kgm^2}{s}$

(2)



→ erőnyomaték, erő momentum, forgatónyomaték

$\underline{M} \triangleq \underline{r} \times \underline{F}$ Nm

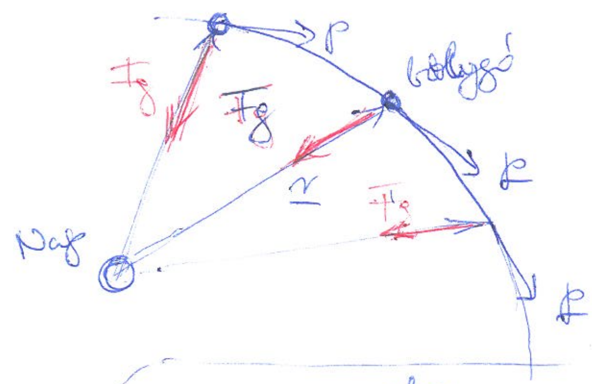
ÖTLET: tanultuk, hogy $\underline{F}_e = \dot{\underline{p}}$ ⇒ hátha $\underline{M}_e = \dot{\underline{L}}$ (ahol $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$ és $\underline{M}_e = \underline{r} \times \underline{F}_e$)

ill. $\underline{M}_e = \underline{r} \times \underline{F}_e = \underline{r} \times \dot{\underline{p}}$

$\dot{\underline{L}} = \cancel{} = \frac{d}{dt}(\underline{r} \times \underline{p}) = \underbrace{\dot{\underline{r}} \times \underline{p}}_{\underline{v} \times m\underline{v} = 0} + \underline{r} \times \dot{\underline{p}} = \underline{r} \times \dot{\underline{p}}$

$\boxed{\underline{M}_e = \dot{\underline{L}}}$ imp. mom. tétel tömegpontra pl. az imp. mom. tétel hasznosságára

bolygómozgás



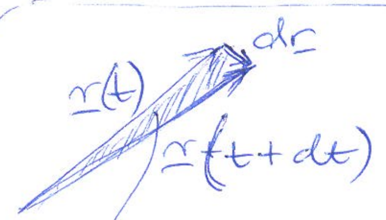
$\underline{F}_c = \underline{F}_g$ és $\underline{F}_g$ mindig O felé mutat;

centrális erő

$$\underline{M}_e = \underline{r} \times \underline{F}_e = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\underline{L}} = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{L} = \text{áll.}}$$



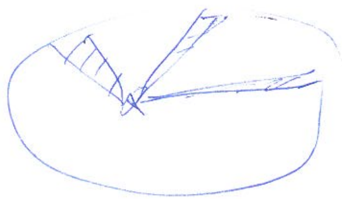
$$dA = \frac{1}{2}\left|\underline{r} \times d\underline{r}\right| =$$

$$= \frac{1}{2m}\left|\underbrace{\underline{r} \times m\frac{d\underline{r}}{dt}}_{\underbrace{\underline{r}\times\underline{p}}_{\underline{L}}}\right| dt = \frac{1}{2m}\left|\underline{L}\right| dt$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{|\underline{L}|}{2m} = \text{áll.}}$$

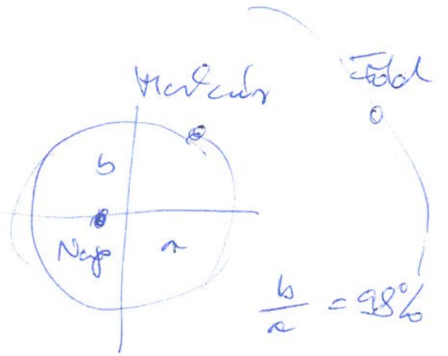
területi sebesség

Kepler II. törv.



NÁNDI 2016. máj. 2. M

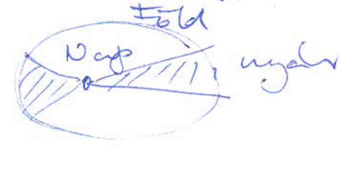
Kepler törvényei (1600–1630) (előzmény: Tycho Brahe, XVI. szd. vége, szabad szemmel)

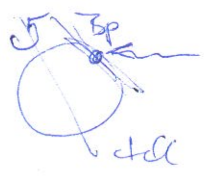


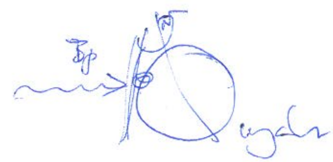
K1. ellipszis...

K2. területi seb... $\Rightarrow$ a tél rövidebb 1 héttel, mert ott gyorsabb a Föld F_{gr}!

[ld. múlt óra vége]





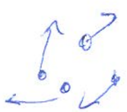


K3 $\frac{T^2}{a^3} = \text{konst.}$

---

volt: $\underline{M} = \frac{d\underline{L}}{dt}$ tömegpontra

pontrendszerre volt: $\sum \underline{F}_{kt} = m\,\underline{a}_{kp} = \frac{d\underline{p}_{össz}}{dt}$



$\underline{M}_{kt} = \frac{d\underline{L}_{össz}}{dt}$

külső erők

pl. merev test forgása rögzített tengely körül

merev test $\rightarrow$ $v_i = r_i \cdot \omega$

$L_{össz} = \sum(m_i v_i r_i) = \sum(m_i r_i \omega r_i) = \underbrace{\sum(m_i r_i^2)}_{\Theta}\,\omega = \Theta\omega$

$\underline{L}_{össz} = \Theta \cdot \underline{\omega}$ (jobbcsavar-szabály)

$\underline{L}_1 = \underline{r}_1 \times m_1 \underline{v}_1$

$\underline{L}_2 = \underline{r}_2 \times m_2 \underline{v}_2$

$\vdots$

lefelé/felfelé mutatnak a tengely irányában, ugyanúgy)

$L_1 = r_1 m_1 v_1$

$L_2 = r_2 m_2 v_2$

$\vdots$

$L_{össz}$

$\underline{L}_{össz} = \Theta\,\underline{\omega}$

↳ tehetetlenségi nyomaték — SKALÁR !!

megmutatja milyen nehéz egy testet „beszöggyorsítani"

$\Theta = \sum m_i r_i^2$ $\Theta = \int_m r^2\,dm$ ⊗ szö. lap

$\Theta = \sum m_i l_i^2$

$\Theta = \int l^2\,dm$

→ rögzített tengely körül forgó merev test mozgási ~~energiája~~ kísérlet

$E_{kin} = \sum\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = \sum\left(\frac{1}{2} m_i (r_i\omega)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$

„erőkar" nem volt

példák: $\underline{M}_{ke} = \frac{d\underline{L}_{össz}}{dt}$

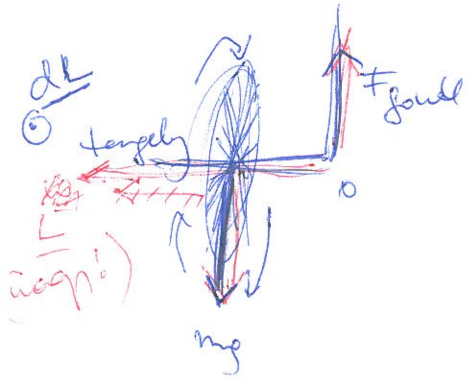
1) forgószék $\underline{M}_{ke} = 0$ (mert $\underline{r} \times m\underline{g}$ ill. $\underline{r} \times \underline{F}_{ny} = 0$) és $F_s \approx 0$

$\Longrightarrow L = \text{konst.}$ $\Theta_1\omega_1 = \Theta_2\omega_2$ súlyzót be-ki

2) pörgettyűs forgószék

3) pörgettyű: amíg nagy az impulzusmomentum

bicikli kerék

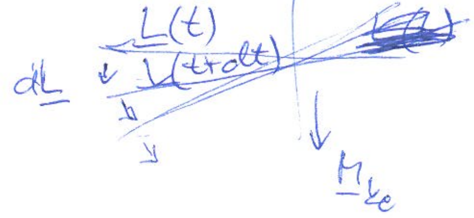


$\underline{M}_{ke}$ 0 körül

$\underline{M} = \underline{r} \times m\underline{g}$ $\begin{cases} \text{nagysága } M_k = rmg \\ \text{iránya } \odot \end{cases}$

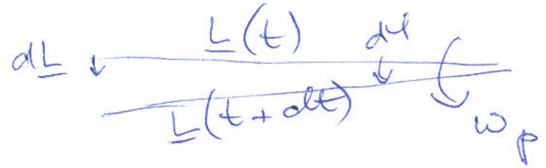
$\underline{M}_{ke} = \frac{d\underline{L}}{dt}$ $\underline{M}_{ke} \parallel d\underline{L}$

felülről:



NANDI 2016. máj. 2. 11. folyt.

precesszió (forgástengely lassú forgása a vízszintes síkban)



$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\frac{dL}{dt}}{L} = \frac{1}{L}\cdot\frac{dL}{dt} = \frac{1}{L}\cdot M_{ke} = \frac{1}{L}\cdot rmg = \frac{rmg}{\Theta\omega}$$

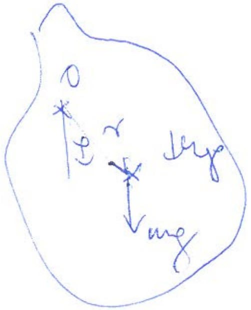
kezdő szögseb.

(*) kiegészítés a Θ kiszámításához: Steiner-tétel $\Theta_0 = \Theta_{tkp} + md^2$

NÁNDI 2010. máj. 9. 12.

$M_{k,e} = \frac{dL}{dt}$

pl. folyt. fizikai inga lengésideje   merev test, nem tkp-ban felfüggesztve



$T = ?$ $\varphi(t) = ?$

O körül $\underline{M} = \underline{r} \times mg$ $M = mg \cdot r \sin\varphi$

$L = \Theta\omega$ $\frac{dL}{dt} = \Theta \frac{d\omega}{dt} = \Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

$-mgr\sin\varphi = \Theta\ddot{\varphi}$

$\ddot{\varphi} = -\frac{mgr}{\Theta}\sin\varphi$ mint mat. inga

$\varphi \ll 1 \rightarrow \sin\varphi \approx \varphi$ $\ddot{\varphi} = -\frac{mgr}{\Theta}\varphi$

$\rightarrow$ megoldás $\varphi(t) = \varphi_{max}\sin(\omega t + \Phi)$

ahol $\omega = \sqrt{\frac{mgr}{\Theta}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgr}}$

FLUIDUMOK mechanikája   folyadékok, gázok

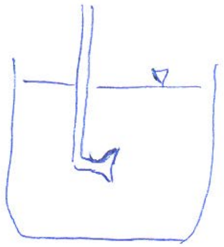
nyugvó fluidumban nem lehet nyírófeszültség

→ ideális fluidum: amelyben áramlás közben sem lehet nyírófeszültség

→ reális / viszkózus — " — : ——— " ——— × ——— " ———

→ kompresszibilis fluidum: pl. gázok: a sűrűsége nem ugyanakkora mindenhol

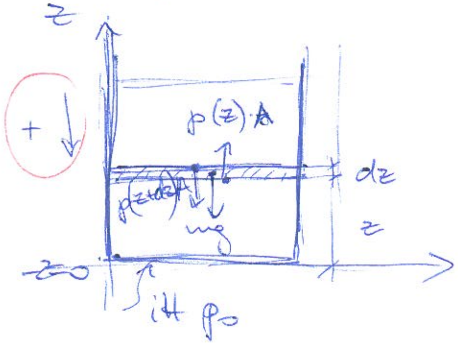
→ in ——— " ——— : folyadékok (és áramló gázok): — " — × ——— " ———



$p = \frac{F}{A}$ $\left[\frac{N}{m^2}\right] = [Pa]$

Pascal-tv. : adott helyen a nyomás minden irányban ugyanakkora

inkompresszibilis fluidum homogén gravitációs térben



$-p(z)\cdot A + mg + p(z+dz)\cdot A = 0$

$mg = \rho A\,dz$

$p(z+dz) - p(z) = -\rho g\,dz$

$dp = -\rho g\,dz$ diff. egyenlet $\frac{dp}{dz} = -\rho g$

$\int_{p_0}^{p} dp = -\rho g \int_0^z dz$ ρ = konst. mert inkompresszibilis

$p(z) = p_0 - \rho g z$

pl. búvárkodás

$p_0 = 10^5\,Pa$

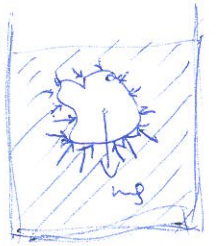
$\rho = 10^3\,kg/m^3$

z	p(z)
0	$10^5\,Pa$
−10m	$2\cdot10^5\,Pa$
−20m	$3\cdot10^5\,Pa$
−30m	$4\cdot10^5\,Pa$

a regulátor egyre nagyobb nyomású levegőt ad

mélyebbre nem!

pl. Arkhimédesz-tv.



a környező folyadék nyomásából származó erő a felhajtóerő

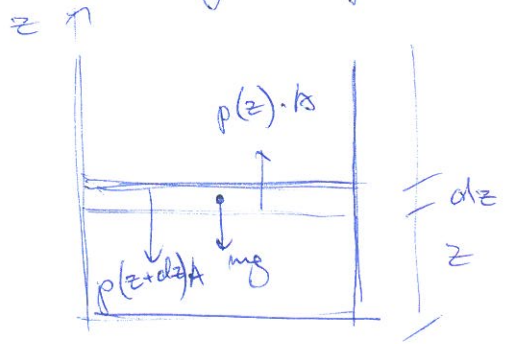
$F_{felh} = \rho_{folyadék}\, V_{bemerülő}\, g$

szabadesés közben? $F_{felh} = 0$ → nem wszedelne?) el pl. a buborékos)

szabadesés = súlytalanság – ekkor nincsen kitüntetett irány?!? „g = 0" → $F_{felh} = 0$

NÁNDI 2016. máj. 9. (12. folyt.)

izoterm gáz nyomásának magasságfüggése



$$p(z+dz)\cdot A - p(z)\cdot A + mg = 0$$

$$dp = -\rho g\, dz$$

de itt $\rho(z)$!

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{N m_1}{V}$$ m_1: egy molekula tömege

$$pV = N k_B T$$

$$\rho = \frac{p}{k_B T} m_1$$

$$dp = -\frac{m_1 g}{k_B T}\, p\, dz$$

$$\int_{p_0}^{p} \frac{1}{p}\, dp = -\frac{m_1 g}{k_B T} \int_{z_0=0}^{z} dz$$

T = konst, mert izoterm

g = konst.

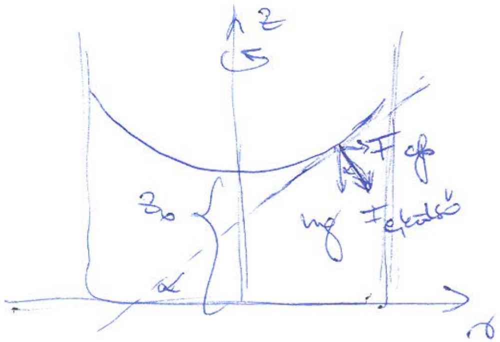
barometrikus magasságformula

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{m_1 g}{k_B T}\cdot z} \longleftarrow \ln\frac{p}{p_0} = -\frac{m_1 g}{k_B T}\cdot z$$

pl. .... $T = 300\,K$, $h = 4000\,m$: $p \approx 0{,}6\, p_0$! → fejfájás

Newtoni folyadékban nyugvó)

forgó folyadék felszíne $\qquad z(r) = ?$



nem nyugvó,
de forgó von.-rdsz-ben áll

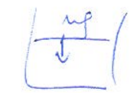
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{F_{cf}}{mg} = \frac{m r \omega^2}{mg}$$

az érintő $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{dz}{dr}$

$$z(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + z_0 \quad \Longleftarrow \quad \frac{dz}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}$$

forgási paraboloid

megfigyelés:
nyugvó folyad. esetén



a felület
⊥ a külső
erőre

(a folyadékon belüli
nyomást nem rajzoltuk fel)

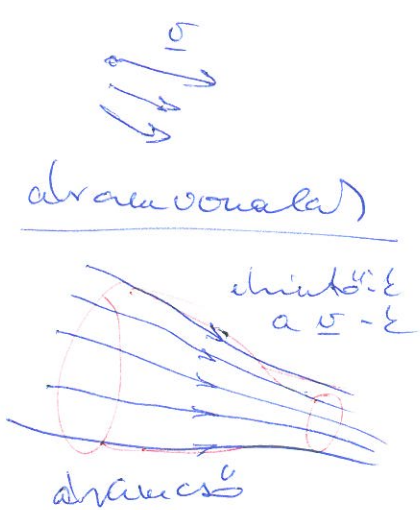
Nándi 2016. máj. 23. 13.

FLUIDUMOK ÁRAMLÁSA

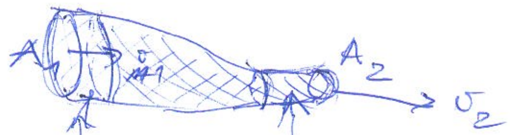
nem egy részecskét követünk, hanem a tér egy adott pontját nézzük: $\underline{v}(\underline{r},t)$ sebességtér

stacionárius áramlás: $\frac{\partial v}{\partial t}=0$

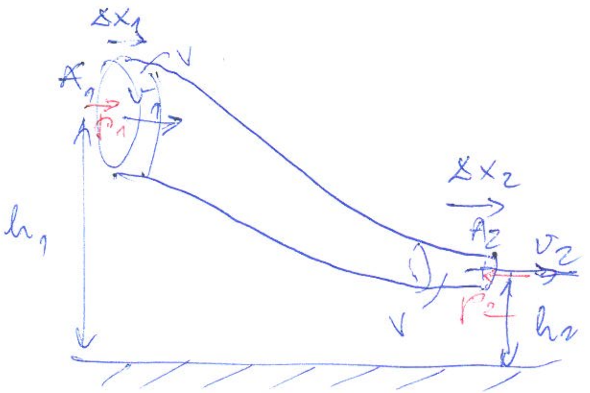
áramvonalak



inkompresszibilis folyadék stac.



$A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t \Rightarrow Av = konst$ kontinuitási egyenlet



munkatétel $W_{eredő} = \Delta E_{kin}$

$$p_1 \underbrace{A_1 \Delta x_1}_{V} - p_2 \underbrace{A_2 \Delta x_2}_{V} + \underbrace{m}_{\rho V} g (h_1 - h_2) = \frac{1}{2} \underbrace{m}_{\rho V} v_2^2 - \frac{1}{2} \underbrace{m}_{\rho V} v_1^2$$

$$p_1 - p_2 + \rho g h_1 - \rho g h_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = konst.$ Bernoulli-tv.

inkompresszibilis, ideális (nincs visz.) fluidum
stac. áramlás

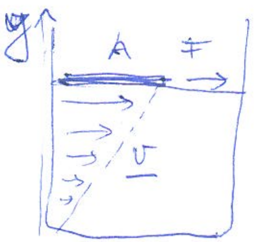
pl. 

 ← gyorsabb áramlás ⇒ kisebb nyomás

kiírt elfordítva is stabil

VISZKÓZUS / REÁLIS FOLYADÉKOK

VISZKOZITÁS, BELSŐ SÚRLÓDÁS



a folyadék tapad a felület alkotó falaphoz

nyírófesz.: $\frac{F}{A}$

$\frac{F}{A} \sim \frac{\partial v}{\partial y}$; Newtoni foly.

$\xrightarrow{\eta}$

pl. víz, méz, bitumen, ...

$\eta_{bitumen} \sim 2 \cdot 10^{8} \eta_{méz}$

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{\partial v}{\partial y}$$

η : viszkozitás

$\eta(F)$

nem ~

ketchup

falfesték?

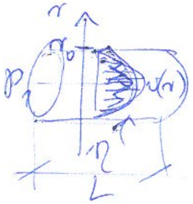
$F\uparrow \Rightarrow \eta\downarrow$

Trinity College, Dublin

ÁRAMLÁSA (1) lamináris (rétegezett stac.)

(2) turbulens: nem stac, örvénylő, szabálytalan

[EDDIG: hengeres cső]



p_2 parabolikus

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4L\eta}(r_0^2 - r^2)$$

REYNOLDS szám : geometriától függő;

hengeres csőre $Re = \frac{\rho r v}{\eta}$

HIDRODINAMIKAI ELLENÁLLÁS (KÖZEGELLENÁLLÁS)

→ IDEÁLIS fluidum

szimmetrikus áramlási kép

Bernoulli

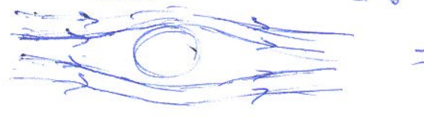
$p_1 = p_2 \Rightarrow F_{ell.} = 0$

hidrodin. paradoxon

⇒ a víz nem ideális

A) VISZKÓZUS fluidum

⇒ $Re < Re_{krit}$ lamináris: $F_{ell} \sim v$

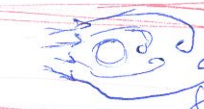


$F =$ „konst” · „r” · v

↖ tárgy mérete

$Re > Re_{krit}$ turbulens

B) $F_{ell} \sim v^2$



örvények

Kármán féle örvénysor (zászló)

a felhő miért nem esik le?

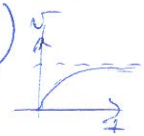
$v\downarrow$ $\uparrow \rho V g$ $\downarrow mg$

$$\underbrace{mg - \rho V g}_{A} - F_{ellen} = ma$$

$$A - Bv = m\dot{v}$$

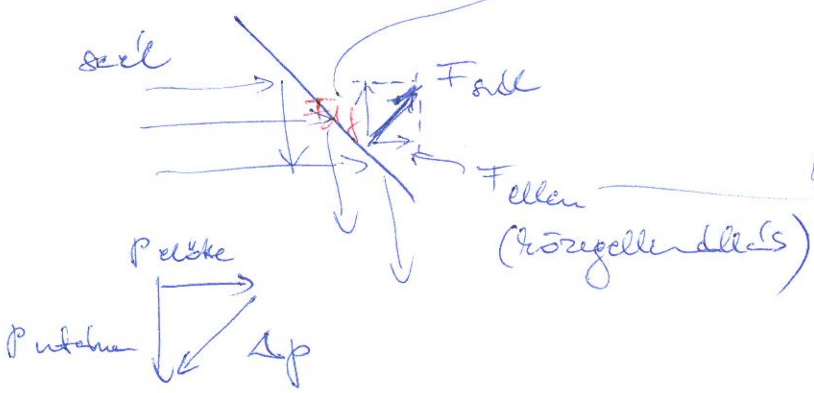
$$\Rightarrow v = v_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$v_0 \sim [\text{méret}]^2$



Naludi 2016. máj. 23. 13. folyt.

HIDRODINAMIKAI „FELHAJTÓERŐ”



repülő, sárkány

olyan profil legyen, hogy $F_{szél}$ minél függőlegesebb legyen

szélforgó, szélkerék

F_{fel} nem felfelé hat