**Fizika 1 – Mechanika órai feladatok megoldása 4. hét**

**4/1.** Az ábra szerint elhanyagolható tömegű nyújthatatlan kötéllel egymáshoz kötünk egy M = 7 kg, egy m1 = 5 kg, és egy m2 = 3 kg tömegű testet és α = 38°-os hajlásszögű lejtőre tesszük. A lejtő tetején egy ideális (súrlódásmentes, elhanyagolható tömegű) csiga van. Az m1 ill. m2 tömegű testek és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható μ = 0,08.

α

m2

M

m1





**a)** Mekkora a testek gyorsulása, és mekkorák a kötélerők?

**b)** Ha az M tömegű testet eltávolítjuk, mekkora erővel kell húzni a kötelet, hogy az m1 és m2 tömegű testek gyorsulása ne változzon?

**c)** Hányszorosára nő a testek gyorsulása, ha az M tömeg kétszeresére nő? (a kötelet nem húzzuk)

α

m2

M

m1





Fg

Fg1

Fg2

Fny2

Fny1

Fs1

Fs2

Fk2

Fk2

Fk1

Fk1

**MO.**

**a)** A testek mozgásegyenletei vektori alakban:

M**a**M = **F**g + **F**k1

m1**a**m1 = **F**g1 + **F**ny1 + **F**k1 + **F**k2 + **F**s1

m2**a**m2 = **F**g2 + **F**ny2 + **F**k2 + **F**s2

A kötélerő egy-egy kötélszakasz két végén egyenlő, mivel a kötelek tömege elhanyagolható.

A testek gyorsulása megegyezik, mert a kötél nyújthatatlan: aM = am1 = am2 = a. Ez lesz a kötéllel összekötött rendszer gyorsulása, ami m1 és m2 esetén a lejtővel párhuzamos, M esetén pedig függőleges. Ebben a feladatban nem tudjuk, hogy merre gyorsul a rendszer (jobbra vagy balra).

Az m1-re ill. m2-re ható gravitációs erőket lejtővel párhuzamos és lejtőre merőleges komponensekre bontjuk:

a lejtőre merőleges komponens (Fg1)⊥ = m1 g cosα ill. (Fg2)⊥ = m2 g cosα;

a lejtővel párhuzamos komponens (Fg1)‖ = m1 g sinα ill. (Fg2)‖ = m2 g sinα.

m1 ill. m2 mozgásegyenletének lejtőre merőleges komponensei

m1a⊥ = Fny1 – (Fg1)⊥ = Fny1 – m1 g cosα

m2a⊥ = Fny2 – (Fg2)⊥ = Fny2 – m2 g cosα

Mivel a testek a lejtőn mozognak, ezért a⊥ = 0 → Fny1 = m1 g cosα, ill. Fny2 = m2 g cosα.

A mozgásegyenlet lejtővel párhuzamos (azaz kötél irányú, tehát M esetén függőleges) komponensének felírása előtt ki kell jelölnünk, melyik legyen a pozitív irány.

Tegyük fel, hogy az M tömeg felfelé gyorsul, így

Ma = Fk1 – Mg

m1a = Fk2 – Fk1 + (Fg1)‖ – Fs1 = Fk2 – Fk1 + m1g sinα – Fs1

m2a = – Fk2 + (Fg2)‖ – Fs2 = – Fk2 + m2g sinα – Fs2

A csúszási súrlódási erők: Fs1 = μ Fny1 = μ m1g cosα, Fs2 = μ Fny2 = μ m2g cosα; tehát

Ma = Fk1 – Mg

m1a = Fk2 – Fk1 + m1g sinα – μ m1g cosα

m2a = – Fk2 + m2g sinα – μ m2g cosα

Ezekből = … = –1,719 m/s2 .

A gyorsulásra negatív érték jött ki, tehát nem ebbe az irányba gyorsulnak a testek.

Írjuk fel most úgy az egyenleteket, hogy az M tömeg lefelé gyorsul:

Ma = Mg – Fk1

m1a = Fk1 – Fk2 – (Fg1)‖ – Fs1 = Fk1 – Fk2 – m1g sinα – μ m1g cosα

m2a = Fk2 – (Fg2) ‖ – Fs2 = Fk2 – m2g sinα – μ m2g cosα

amiből = … = 1,047 m/s2.

A gyorsulásra pozitív érték jött ki, tehát tényleg ebbe az irányba gyorsulnak a testek.

Látható, hogy a két irányba felírt egyenletrendszer megoldása nem csak előjelben tér el, hanem a nagyságuk is különbözik. Ez azért van, mert a pozitívnak választott irány megváltoztatásával a gravitációs erők kötélirányú komponensei és a kötélerők előjelet váltanak, de a súrlódási erők nem, mivel azok előjele a sebesség irányához van kötve. Tehát ha egy bizonyos feltételezéssel negatív gyorsulást kapunk, akkor az egyenletrendszert újra fel kell írni a másik feltételezéssel, és azt megoldani. Érdemes ezért a pozitív irány kiválasztása előtt összehasonlítani azt, hogy a csigánál a gravitációs erők kötél irányú komponensei milyen irányú eredőt adnak. Jelen esetben Mg = 70,00 N hat jobbra, és (m1+m2)g sinα = 49,25 N hat balra, vagyis jobbra nagyobb erő hat, az M tömeg lefelé gyorsul. Azonban ha csúszási súrlódási erők is fellépnek, akkor a helyzet bonyolultabb lehet. (Ebben a feladatban tapadással egyelőre nem foglalkozunk.)

A testek tehát jobbra gyorsulnak, a = 1,047 m/s2, és a kötélerők:

= 23,50 N; = 62,67 N.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az Fk2 kötélerő kisebb, mint az Fk1, mivel Fk2 csak az m2 tömegű testet kell gyorsítsa:

Fk2 = m2a + m2g sinα + μ m2g cosα,

az Fk1 viszont az m1 és az m2 testet is:

Fk1 = m1a + m1g sinα + μ m1g cosα + Fk2 = (m1+m2)a + (m1+m2)g sinα + μ (m1+m2)g cosα.

**b)** Akkor lesz m1 és m2 gyorsulása változatlan, hogy a kötélerők változatlanok, vagyis a kötelet a fent kiszámolt Fk1 = 62,67 N nagyságú erővel kell húzni.

Megjegyzés: Azért nem Mg = 70,00 N nagyságú erővel, mert az az erő ahhoz volt szükséges, hogy mindhárom testet gyorsítsa, de most kisebb az össztömeg. A két erő különbsége az M-re ható erők eredője: FM,eredő = Mg–Fk1 = 7,33 N, ez gyorsítja az M tömegű testet, így lesz annak is   
a = FM,eredő/M = 7,33/7 ≈ 1,047 m/s2 nagyságú gyorsulása.

**c)** A gyorsulás nem kétszeresére nő, mert miközben M, és így Mg értéke kétszeresére nő, az m1 és m2 testekre ható erők változatlanok. Az **a)** pontban felírt egyenletekbe M = 14 kg-ot behelyettesítve a\* ≈ 3,896 m/s2, ez ~3,7-szerese az előző gyorsulásnak.

**4/2.** α = 20° hajlásszögű lejtőre m = 0,50 kg tömegű testet helyezünk. A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható μ = 0,20; a tapadási súrlódási együttható μt = 0,40.

**a)** Mekkora súrlódási erő hat a testre?

**b)** α értékét növelve milyen αkrit szögnél csúszik meg a test? Mekkora súrlódási erő hat rá onnantól?

**MO.**

**a)** A test mozgásegyenlete:

m**a** = **F**g + **F**ny + **F**s , ha a test csúszik;

m**a** = **F**g + **F**ny + **F**t , ha a test tapad.

A testre a lejtő által kifejtett nyomóerő Fny = mg cosα, mivel csak mg-nek van a lejtőre merőleges komponense.

A test mozgásegyenletének lejtővel párhuzamos komponense:

ma = mg sinα – Fs , ill. ma = mg sinα – Ft .

Feltéve, hogy a test tapad a lejtőn: mg sinα – Ft = 0

→ Ft = mg sinα = 0,50·10·sin20° = 1,710 N tapadási súrlódási erő kell hasson a testre.

Ellenőrizni kell, hogy ez kisebb-e, mint a tapadási súrlódási erő maximális lehetséges értéke, ami

Ft,max = μt Fny = μt mg cosα = 0,4·0,50·10·cos20° = 1,879 N.

α = 20° hajlásszögű lejtőn tehát a test még nem csúszik meg, mert max. 1,879 N tapadási súrlódási erő léphetne fel a test és a lejtő között, de csak mg sinα = 1,710 N erő gyorsítaná, ezért a test és a lejtő között fellépő tapadási súrlódási erő Ft = 1,710 N.

**b)** Határesetben Ft eléri Ft,max értékét, vagyis

ma = mg sinαkrit – Ft,max = mg sinαkrit – μt mg cosαkrit = 0

→ sinαkrit = μt cosαkrit → μt = 0,4 = tgαkrit → αkrit = 21,80°

(ekkor Ft,max = μt mg cosαkrit = 0,4·0,5·10·cos21,80º = 1,857 N)

A lejtő hajlásszögét tovább növelve a csúszó testet

Fs = μ mg cosα = 0,2·0,5·10·cosα csúszási súrlódási erő fékezi (αkrit esetén ez 0,9285 N)

Az ábrán a lejtő hajlásszögének függvényében látható

zölddel a tapadási súrlódási erő maximális értéke: Ft,max = μt mg cosα;

pirossal a fellépő tapadási súrlódási erő értéke: Ft = mg sinα;

kékkel a csúszási súrlódási erő értéke: Fs = μ mg cosα.

αkrit = 21,80° alatt a test tapad, és Ft = mg sinα tapadási súrlódási erő lép fel;

αkrit = 21,80° fölött a test csúszik, és Fs = μ mg cosα csúszási súrlódási erő lép fel.

Itt egy látványos bizonyíték arra, hogy a súrlódási erő a nyomóerővel arányos (ebben az esetben a tapadási súrlódási erő a cipő és a fal között): <http://www.videoman.gr/106419>

**4/3.** Egy kamionos a következőt mesélte a híres-nevezetes 2013. márciusi hóesésben átélt kalandjairól az M1-es autópályáról.

**a)** Egyszercsak egy 7°-os emelkedő aljához érkezett, ami úgy el volt jegesedve, hogy a súrlódás egészen zérusra csökkent. Szerencsére viszont a szél éppen hátulról fújt és nagyon erős volt, így a meglazult ponyváját vitorlaként kifeszítette és úgy jutott fel az emelkedőn. A szél állandó erővel vízszintesen fújt, és őt állandó, v = 18 km/h sebességgel vitte fel a lejtőn. Mekkora erőt fejtett ki a szél a kamionra? A kamion tömege M = 20 t.

**b)** A domb teteje után a túloldalon 5°-os lejtővel folytatódott az út, ami szélárnyékban volt, megszűnt a szél ereje; viszont nagyon havas volt, így a kamionra μg = 0,12 gördülési súrlódási együtthatóval most már gördülési ellenállási erő hatott (az üzemanyaga már elfogyott, nem tudott motorral menni, csak gurult). Ekkor kapta meg a kamionos a Belügyminisztériumtól az sms-t, és azt rögtön el is olvasta, ami 30 s-ig tartott. (Az sms szövege ez volt: „Segítünk! Ne hagyja el a gépjárművét! Ha elfogy az üzemanyaga, üljön át másik gépjárműbe!”)

Mekkora lett a sebessége és mekkora utat tett meg ezalatt a 30 s alatt? (A kamion a lejtő tetejéről v = 18 km/h sebességről indult, amikor elkezdte olvasni az sms-t.)

**MO.**

7°

Mg

Mgsin7°

Mgcos7°

Fny

F

Fcos7°

Fsin7°

7°

7°

5°

Mg

Mgsin5°

Mgcos5°

Fny

5°

Fs

**a)** A kamion az emelkedőn állandó sebességgel halad, tehát a gyorsulása zérus. Mivel a szél által a kamionra kifejtett erő vízszintes, ezért azt is fel kell bontani a lejtőre merőleges és a lejtővel párhuzamos komponensekre. A lejtőre merőleges komponens miatt Fny (az út által a kamionra kifejtett nyomóerő) most megnő (nem Mg cos7º, hanem Fny = Mg cos7º + Fszél sin7º ), és ezt figyelembe kéne venni a csúszási / gördülési súrlódási erő számításánál, de ennek most nincs jelentősége, mivel a súrlódás itt elhanyagolható.

A lejtővel párhuzamos komponensek

Mg⋅sin7° – Fszél⋅cos7° = 0 → Fszél = Mg⋅tg7° = 24,56 kN.

**b)** A kamiont a lejtőn a gravitációs erőlejtővel párhuzamos komponensének és a súrlódási erőnek az eredője gyorsítja: Ma = Mgsin5° – Fs

Fs = g ⋅ Fny = g ⋅ Mgcos5° , mivel a lejtőre merőleges komponensből látjuk, hogy Fny = Mgcos5°.

Tehát a = g ( sin5° –g⋅cos5° ) = –0,3239 m/s2, vagyis a kamion lassulni fog:

v = v0 + a⋅t = (18/3,6) – 0,3239⋅t = 5,0 – 0,3239⋅t

és megáll t = 5,0/0,3239 = 15,44 s alatt.

Így tehát a megtett út s = v0t + ½at2 = 5⋅15,44 – ½⋅0,3239⋅15,442 = 38,59 m.

Megjegyzés: Ha az s = v0t + ½at2 képletbe behelyettesítjük a 30 s-ot, akkor

s = 5⋅30 – ½⋅0,3239⋅302 = 4,26 m-t kapnánk, ami kisebb, mint az előbb kiszámolt 38,59 m, mintha visszafele indult volna a kamion a lejtő teteje irányába. Ez a számolás azért lenne rossz, mert az

a = g(sin5°–g⋅cos5°) = –0,3239 m/s2 gyorsulás csak addig érvényes, amíg a kamion mozgásban van, mert csak addig hat rá a gördülési súrlódási erő.

**4/4.** Egy kettős lejtő egyik oldala α = 50°-ot, a másik β = 58°-ot zár be a vízszintessel. Két testet összekötünk egy nyújthatatlan, elhanyagolható tömegű kötéllel. Az 50°-os oldalra tesszük az   
m1 = 14 dkg-os testet, az 58°-os oldalra az m2 = 10 dkg-os testet.

A testek és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható 0,12, a tapadási súrlódási együttható 0,15.

Mekkora, milyen irányú a testek gyorsulása, ha

**a)** a 14 dkg-os testet meglökjük lefelé;

**b)** a 10 dkg-os testet meglökjük lefelé;

**c)** a testeket kezdősebesség nélkül tesszük a lejtőre?

**MO.** Az előző feladatok mintájára tudjuk, hogy Fny1 = m1g cosα, ill. Fny2 = m2g cosβ; Fk a kötélerő. Pozitív iránynak a kezdősebesség irányát vesszük fel.

**a)** m1aa = m1g sinα – Fk – μ m1g cosα

m2aa = – m2g sinβ + Fk – μ m2g cosβ

→ aa = g (m1 sinα – μ m1 cosα – m2 sinβ – μ m2 cosβ) / (m1+m2) = 0,2201 m/s2

Tehát a testek gyorsulnak a kezdősebesség irányába.

**b)** m1ab = – m1g sinα + Fk – μ m1g cosα

m2ab = m2g sinβ – Fk – μ m2g cosβ

→ ab = g (–m1 sinα – μ m1 cosα + m2 sinβ – μ m2 cosβ) / (m1+m2) = –1,650 m/s2

Ebbe az irányba elindítva a testek lassulnak.

**c)** Meg kell vizsgálni, hogy elindulnak-e a testek. Kiszámoljuk a gravitációs erő lejtővel párhuzamos komponensét a két testre:

m1g sinα = 1,072 N; m2g sinβ = 0,8480 N.

Mivel m1g sinα > m2g sinβ , ezért az m1 = 14 dkg-os test indulna lefelé.

Ha nem lenne súrlódás, a két erő különbsége, azaz

m1g sinα – m2g sinβ = 0,2244 N gyorsítaná a testeket.

Kérdés, hogy a tapadási súrlódási erő tudja-e ezt ellensúlyozni. A

Ft1,max = μt Fny1 = μt m1gcosα = 0,1350 N; Ft2,max = μt Fny2 = μt m2gcosβ = 0,0795 N,

Ft1,max + Ft2,max = 0,2145 N

Ft1,max + Ft2,max < m1gsinα – m2gsinβ , tehát a testek elkezdenek csúszni, mégpedig   
aa = 0,2201 m/s2 gyorsulással (a 14 dkg-os lefelé, a 10 dkg-os test felfelé).

Megjegyzés:

Ha Ft1,max + Ft2,max > m1gsinα – m2gsinβ lenne, akkor a tapadási súrlódási erők

Ft1 ≤ Ft1,max és Ft2 ≤ Ft2,max és Ft1 + Ft2 = m1gsinα – m2gsinβ .

Két test esetén a helyzet bonyolult, de egyetlen test esetén Ft értéke meghatározható.

Az órai feladatban nem volt kérdés, de kiszámolhatjuk azt is, hogy mennyi idő alatt ér fel valamelyik test a csigához. Tegyük fel, hogy a kötél hossza L = 2 m, és a testeket úgy helyezzük el, hogy a kötél felénél van a csiga, vagyis a testek távolsága a lejtő tetejétől 1-1 m; a kezdősebesség pedig az **a**) ill. **b)** esetben v0 = 1 m/s.

Az **a)** esetben a kezdősebesség irányában gyorsulnak is a testek:

v = v0 + aat = 1 + 0,2201t ; s = v0 t + ½ aat2 = 1·t + ½·0,2201·t2

A kötél felének megfelelő utat, azaz 1 m-t kell megtennie a 10 dkg-os testnek, hogy felérjen:

s = L/2 = 1 = v0ta + ½aata2 = 1·ta+½·0,2201·ta2 → ta ≈ 0,9090 s alatt ér fel a 10 dkg-os test.

A **b)** esetben a testek lassulnak:

v = v0 + abt = 1 – 1,650t → t\* = 1/1,650 ≈ 0,6061 s alatt megállnak, ezalatt

s\* = v0 t\* + ½ abt\*2 = 1·t\* – ½·1,650·t\*2 = 1·0,6061 – ½·1,650·0,60612 ≈ 0,3030 m-t tesznek meg, vagyis nem ér fel a 14 dkg-os test, hanem az **a)** részben kiszámolt gyorsulással indulnak el a testek ebből a helyzetből (zérus kezdősebességgel), és a 10 dkg-os test fog felérkezni

s = ½ aa t’2 = ½·0,2201·t’2 = L/2 + s\* ≈ 1,303 → t’ ≈ 3,441 s, összesen 4,047 s alatt.

A **c)** esetben álló helyzetből (v0 = 0) indul a 10 dkg-os test felfelé aa = 0,2201 m/s2 gyorsulással, és

kell ahhoz, hogy a 10 dkg-os test felérjen.

**Gyakorló feladatok a zárthelyire:**

**4/5.** Egy traktor két pótkocsit vontat nyújthatatlan drótkötelekkel. Mekkora erő feszíti a köteleket, ha indításnál a traktor 1 perc alatt gyorsít fel 40 km/h sebességre?

A traktor tömege 3 t, a pótkocsik tömege 2-2 t, a gördülő ellenállási együttható 0,1 , g = 9,81 m/s2.

Fny,tr

Fny,2

Fs,2

Fk2

Fk2

Fk1

Ftr

m1

m2

mtr

Fs,tr

Fs,1

m2g

m1g

mtrg

Fny,1

**MO.** Jelölje

**Ftr** az út által az traktorra a mozgás irányába kifejtett erőt;

**Fk1** ill. **Fk2** a kötélerőket;

**Fny,tr**, **Fny,1** és **Fny,2** a talaj által a traktorra, ill. pótkocsikra kifejtett nyomóerőket;

**Fs,tr**, **Fs,1** és **Fs,2** a gördülési súrlódási erőket.

A mozgásegyenletek

vektori alakban:

traktor: mtr **atr** = mtr **g** + **Fny,tr** + **Ftr** + **Fk1** + **Fs,tr**

első pótkocsi: m1 **a1** = m1 **g** + **Fny,1** + **Fk1** + **Fk2** + **Fs,1**

második pótkocsi: m2 **a2** = m2 **g** + **Fny,2** + **Fk2** + **Fs,2**

függőleges komponensei (a pozitív irányt felfelé választva):

traktor: mtr atr,z = –mtr g + Fny,tr

első pótkocsi: m1 a1,z = –m1 g + Fny,1

második pótkocsi: m2 a2,z = –m2 g + Fny,2

Mivel a testek a felületen mozognak, a függőleges gyorsuláskomponensek nullák

→ ebből tudjuk a nyomóerőket: Fny,tr = mtr g , Fny,1 = m1 g , Fny,2 = m2 g .

vízszintes komponensei (a haladási irányt választva pozitívnak):

traktor: mtr atr,x = Ftr – Fk1 – Fs,tr

első pótkocsi: m1 a1,x = Fk1 – Fk2 – Fs,1

második pótkocsi: m2 a2,x = Fk2 – Fs,2

Mivel a kötél nyújthatatlan, ezért a gyorsulások megegyeznek: atr,x = a1,x = a2,x = a;

a súrlódási erők nagysága Fs = μ Fny = μmg, ezeket behelyettesítve:

traktor: mtr a = Ftr – Fk1 – μmtrg

első pótkocsi: m1 a = Fk1 – Fk2 – μm1g

második pótkocsi: m2 a = Fk2 – μm2g

Ezekből sorra kiszámolhatók a kérdéses erők, ha ismerjük a gyorsulást.

Mivel 1 perc alatt gyorsít a traktor 40 km/h sebességre állandó gyorsulással:

a = Δv / Δt = (40/3,6 – 0) / 60 ≈ 0,1852 m/s2 , tehát

Fk2 = m2(a+μg) = 2000⋅(0,1852+0,1·9,81) ≈ 2332 N ,

Fk1 = Fk2 + m1(a+μg) = (m1+m2)(a+μg) ≈ 4665 N ,

Ftr = Fk1 + mtr(a+μg) = (m1+m2+mtr)(a+μg) ≈ 8163 N .

**MEGJEGYZÉSEK:**

* A drótkötelek tömegét elhanyagoltuk. Ha figyelembe kellene venni a tömegüket, akkor nem lenne igaz, hogy a két végükön ébredő erő megegyezik, hanem a kötelekre is fel kellene írni mozgásegyenletet és abból tudnánk kiszámolni az erőket.
* Vegyük észre, hogy a fenti feladatban a gyorsulás az egyes testek mozgásegyenletéből kifejezve  
   ,  
  vagyis az egyes testekre előre- ill. hátrafelé ható erők különbsége arányos a tömegükkel (ugyanez igaz kötelekre is).
* Tekintsük a 3 testet egy rendszernek és adjuk össze a 3 testre felírt mozgásegyenletet:  
   (mtr+m1+m2)a = Ftr –( Fs,tr + Fs,1 + Fs,2)Ekkor az Fk1, Fk2 kötélerők kiesnek, mivel ők a 3 testből álló rendszerben belső erők. A 3 testből álló rendszer gyorsulását a külső erők eredője határozza meg:  
   .

**4/6.** Mekkora lejtővel párhuzamos erő szükséges ahhoz, hogy állandó gyorsulással 2 s alatt nyugalmi helyzetből indulva felhúzzunk egy 6 kg tömegű testet egy 30°-os, 1 m magas lejtőn, ha a súrlódási együttható 0,2?

**MO.** A mozgásegyenlet

vektori alakban: m**a** = **F** + m**g** + **Fny** + **Fs**  **F** az általunk kifejtett lejtővel párhuzamos húzóerő

Az erőket merőleges komponensekre kell bontani, de lejtő esetén nem függőleges és vízszintes, hanem lejtőre merőleges és lejtővel párhuzamos komponensekre bontjuk:

lejtőre merőleges (kifelé pozitív): ma⊥ = 0 – mg·cosα + Fny + 0

lejtővel párhuzamos (felfelé pozitív): ma‖ = F – mg·sinα + 0 – Fs

Mivel a testek a felületen mozognak, a lejtőre merőleges gyorsuláskomponens nulla

→ ebből tudjuk a nyomóerőt: Fny = mg⋅cosα ;

a súrlódási erő nagysága pedig Fs = μ Fny = μmg⋅cosα, ezt behelyettesítve a lejtővel párhuzamos egyenletbe: ma = F − mg·sinα − μmg·cosα .

A gyorsulás kiszámolható az időből, kezdősebességből és a megtett útból:

a lejtő hossza, azaz a megtett út s = h/sinα = 2 m; v0 = 0 → s = ½ a t2 → a = 2s/t2 = 1 m/s2.

A mozgásegyenletből

⇒ F = m (a + gsinα + μgcosα) = 6⋅(1 + 10⋅sin30° + 0,2⋅10⋅cos30°) ≈ 46,39 N.

**MEGJEGYZÉSEK:**

* Általánosan a lejtővel párhuzamosan a pozitív irányt választhatjuk felfelé vagy lefelé is. Azt az irányt célszerű pozitívnak választani, amerre a test mozog; ekkor a súrlódási erő negatív előjelű lesz (fékez), a gravitációs erő mg⋅sinα komponensének előjele pedig az irányválasztástól függ (pozitív, vagyis gyorsít, ha a test lefelé mozog, ill. negatív, vagyis fékez, ha a test felfelé mozog).
* Ha a gyorsulás negatívra jön ki, akkor a test lassul. Ha lefelé haladva lassul v=0 -ra, akkor ott a test megáll és a tapadási súrlódási erő miatt ott is marad (ha egyéb erő nem hat rá). Ha felfelé haladva lassul v=0 -ra, akkor a tapadási súrlódási együttható értékétől függ, hogy egy helyben marad vagy elkezd visszacsúszni lefelé. Ha visszacsúszik, akkor a csúszási súrlódási erő iránya megváltozik (mivel azt a sebesség iránya szabja meg).
* Ha van olyan erő (m**g** -n és **Fny** -n kívül, pl. egy külső húzó/tolóerő), aminek van a lejtőre merőleges komponense, akkor módosul a mozgásegyenletnek a lejtőre merőleges komponense és emiatt változik Fny nagysága, és azzal együtt Fs nagysága is. Ha a külső erő „belenyomja” a testet a lejtőbe, akkor Fny (és Fs) nagysága nő, ha „elemeli”, akkor csökken.

**4/7. (DRS 3.11)** Vízszintes súrlódásmentes felületen m1 = 3 kg tömegű test, kötéllel hozzákötve   
m2 = 7 kg tömegű test, kötéllel hozzákötve m3 = 10 kg tömegű test, és azt húzzuk F = 100 N erővel vízszintesen. A kötelek nyújthatatlanok, a tömegük elhanyagolható. Mekkora a testek gyorsulása és mekkorák a kötélerők?

m1

m2

m3

F

**MO.** a = 5 m/s2; m1 és m2 között Fk1 = 15 N; m2 és m3 között Fk2 = 50 N

**4/8. (DRS 3.5)** Vízszintes asztalon m2 = 2 kg tömegű test, az asztal szélén lévő csigán átvetett kötéllel hozzákötve m1 = 0,5 kg tömegű test lóg függőlegesen. Mekkora a kötéllel egymáshoz kötött testek gyorsulása és a kötelet feszítő erő, ha az m2 tömegű test

**a)** a vízszintes felületen súrlódás nélkül csúszhat;

**b)** és a vízszintes felület közötti súrlódási együttható μ = 0,2?

m1

m2

**MO. a)** a = 2 m/s2; Fk = 4 N ; **b)** a = 0,4 m/s2; Fk = 4,8 N

**4/9. (DRS 3.12)** Mennyivel nyúlik meg a két test közé iktatott rugó, amikor az összekapcsolt rendszer egyenletesen gyorsuló mozgásban van? Mindhárom test tömege m = 1 kg, a súrlódási együttható μ = 0,2, a rugóállandó k = 4 N/cm, a csiga, a rugó és a kötelek tömege elhanyagolható, a csiga súrlódásmentes, a kötelek nyújthatatlanok.

m

m

m

**MO.**

m

m

m

F1

F1

F2

F2

F3

F3

F4

F4

Kötélerők: egy-egy kötélszakasz két végén azonos nagyságú az erő, mert a kötelek tömege elhanyagolható.

F1 = F2, mert a rugó tömege elhanyagolható (ha lenne tömege, a két kötélerő különbsége gyorsítaná a rugót). Ez a kötélerő lesz arányos a rugó megnyúlásával: F1 = F2 = Fr = k·Δl.

F3 = F4, mert a csiga tömege elhanyagolható és súrlódásmentes.

A mozgásegyenletek (F1 helyett is F2-t, F4 helyett is F3-at írva):

a lógó testre ma = mg – F3

a középső testre ma = F3 – F2 – Fs = F3 – F2 – μmg

a bal oldali testre ma = F2 – Fs = F2 – μmg

*Ezekből*  2 m/s2.

A rugó megnyúlását F2-ből számoljuk, azt pedig a bal oldali test egyenletéből kapjuk meg:

F2 = ma + μmg = 1·(2+0,2·10) = 4 N Δl = F2 / k = 1 cm.

|  |  |
| --- | --- |
| **4/10 .** Vízszintes asztallapon kiskocsi mozog. A kiskocsit egy csigán átvetett kötélre akasztott súly mozgatja.  m = 100 g esetén a kiskocsi 3 s alatt,  m = 200 g esetén a kiskocsi 1 s alatt  teszi meg az 1 m-es utat nyugalmi helyzetből kiindulva. Mekkora a kocsi tömege, és  mekkora a súrlódási együttható? g = 10 m/s2 | m  M |

**MO.**

A mozgásegyenletek:

 ⇒ M(a+μg) = m(g−a)

m1 = 0,1 kg esetén a1 = 2s / t12 = 2⋅1 / 32 = 2/9 m/s2 : M(2/9+10μ) = 0,1(10−2/9)

m2 = 0,2 kg esetén a2 = 2s / t22 = 2⋅1 / 12 = 2 m/s2 : M(2+10μ) = 0,2(10−2)

⇒ M = 0,35 kg, μ = 0,257

|  |  |
| --- | --- |
| **4/11.** A kettős lejtő  30° hajlásszögű oldalán m1 = 2 kg tömegű,  a 45° hajlásszögű oldalán m2 = 1 kg tömegű test fekszik, a két test össze van kötve egy csigán átvetett kötéllel. A súrlódás elhanyagolható. Mekkora a testek gyorsulása? | 45°  30°  m1  m2 |

**MO.** m1 gyorsul lefelé, a = 0,9763 m/s2

30°

m1

m3

m2

1

2

**4/12.** Mennyivel nyúlik meg a rugó?

m1 = 2 kg, m2 = 3 kg, m3 = 5 kg,   
μ1 = 0,2, μ2 = 0,06, k = 0,5 N/cm.

A kötelek súlytalanok és nyújthatatlanok, a csiga súlytalan és súrlódásmentes, a lejtő nem tud elmozdulni.

**MO.**  a = 2 m/s2; Fk = 15 N; Δl = 30 cm.

|  |  |
| --- | --- |
| **4/13.** α hajlásszögű lejtőre kötéllel összekötött két testet teszünk. A lejtő és az m1 tömegű test közötti csúszási súrlódási együttható μ1, az m2 tömegű testé pedig μ2. Mi a feltétele annak, hogy a két test között a kötél feszes legyen? Mekkora a kötélerő? |   m1  m2  2  1 |

**MO.**

m1a = m1g sinα – μ1m1g cosα – Fk

m2a = m2g sinα – μ2m2g cosα + Fk

→

A kötél feszes, ha Fk ≥ 0 , azaz ha μ2 ≥ μ1 (az egyenlőség esetén feszes kötéllel kell letenni)

**VAGY**: gyorsabb megoldás, ha a mozgásegyenleteket felírjuk a kötélerő nélkül, és azt mondjuk, hogy ha az alsó test gyorsulása legalább akkora, mint a felső test gyorsulása, akkor a kötél feszes marad.

m1a1 = m1g sinα – μ1m1g cosα → a1 = (sinα – μ1cosα ) g , hasonlóan a2 = (sinα – μ2cosα ) g

a1 ≥ a2 : sinα – μ1cosα ≥ sinα – μ2cosα → μ2 ≥ μ1

**ÉRDEKLŐDŐKNEK: FELADATOK IDEÁLIS CSIGÁVAL**

m1

m2

|  |  |
| --- | --- |
| **4/14.** **(DRS 3.8)** Az ábrán látható elrendezésben a csigák és a kötél tömege elhanyagolható, a kötél nyújthatatlan, a csigák súrlódásmentesek.  Mekkora az egyes tömegek gyorsulása és az egyes köteleket feszítő erő, ha m1 = 0,6 kg és m2 = 0,8 kg? |  |

**MO.** Mivel a kötél és a csiga tömege elhanyagolható és a csiga súrlódásmentes, ezért a csigákon átvetett kötélben az Fk1 kötélerő nagysága a kötél mentén állandó; az m2 tömeget a mozgócsigához rögzítő kötélben lévő erő nagysága pedig Fk2.

Kötéllel összekötött testek esetén az egyes erők előjelét nem a függőlegesen felvett z tengelyhez szokás viszonyítani, hanem a kötél mentén szokás felvenni egy pozitív irányt.

Tételezzük fel, hogy m1 fog lefelé gyorsulni. Ezzel a feltételezéssel a mozgásegyenletek:

m1 a1 = m1 g – Fk1

m2 a2 = Fk2 – m2g

A két test gyorsulása most nem egyenlő. Látható, hogy ha az A pontot fixnek képzeljük el, ami körül a csiga elfordul, akkor amíg az O pont Δl-nyit emelkedik, addig a B pont 2Δl-nyit emelkedik. Másrészt, mivel a kötél hossza állandó, a csiga emelkedésekor „áttevődik” Δl -nyi a jobb oldali álló kötélrészről a túloldalra. (A csiga peremén futó kötél hossza változatlan, így a csiga mérete nem számít.)

O

B

A

Mivel → a2 = a1/2 .

Az Fk1 és Fk2 kötélerőkre felírjuk a mozgócsiga mozgásegyenletét:

ΔlFk1

álló

2Δl

álló

mozgó

mcs acs = 2 Fk1 – Fk2 , amiből Fk2 = 2 Fk1 , mivel mcs = 0 .

Ezeket behelyettesítve

m1 a1 = m1 g – Fk1

m2 a1/2 = 2 Fk1 – m2g

amiből

(pozitív, tehát tényleg lefelé gyorsul),

a2 = 1,25 m/s2 (tényleg felfelé),

Fk1 = m1 (g–a1) = 4,5 N

Fk2 = 2 Fk1 = m2 (g+a2) = 9,0 N

**4/15. (DRS 3.3)** Csigán átvetett nyújthatatlan kötél egyik végén m1 = 2 kg, másik végén m2 = 1 kg tömegű test lóg. A kötél súrlódásmentesen mozoghat. Írjuk fel az egyes testek mozgásegyenleteit! Határozzuk meg a kötélben fellépő feszítőerőt, és az egyes testek gyorsulását! (A csiga tömege elhanyagolható.)

|  |  |
| --- | --- |
| m1  m2  m1g  Fk  Fk  m2g | **MO.**  Itt most látszik, hogy m1 fog lefelé gyorsulni:  m1 a = m1g – Fk  m2 a = Fk – m2g  Ebből  és |

**4/16.** Egy gondolkodtató csigás feladat:

m1

m2

A kötél nyújthatatlan, a kötél és a csigák tömege elhanyagolható, a csigák súrlódásmentesek.

Határozzuk meg az m1 és az m2 tömeg gyorsulását és a kötélerőt!