**Fizika 1 – Mechanika órai feladatok megoldása 3. hét**

**Hajítás – összefoglalás**

A testre állandó erő hat, így a gyorsulása állandó: **a** = **F**/m = konst., méghozzá **a** = **g**.

Mutasson a koordinátarendszerünk z tengelye az erővel ellentétes irányba: **F**/m = − g **k**, így ha a test a t=0 -ban az **r0** pontból indul **v0** sebességgel:

**a** = − g **k** = ⇒ **v**(t) = **v0** − gt **k** = ⇒ **r**(t) = **r0** + **v0** t − ½gt2 **k** .

Forgassuk úgy a koordinátarendszerünket a z tengely körül úgy, hogy a **v0** kezdősebességnek csak x és z irányú komponense legyen:

**v0** = v0x **i** + v0z **k** = v0 cosα **i** + v0 sinα **k**

ahol α a kezdősebességnek a vízszintessel bezárt szöge;

ezzel a test sebessége:

**v**(t) = v0 cosα **i** + (v0 sinα − gt) **k** ,

vagyis vx = v0 cosα, vy = 0, vz(t) = v0 sinα − gt.

A test helyvektora, ha az **r0** = x0 **i** + y0 **j** + z0 **k** pontból indult:

**r**(t) = (x0 + (v0 cosα)·t) **i** + y0 **j** + (z0 + (v0 sinα)·t − ½gt2) **k**

Ha lehet úgy választani, legyen **r0** = **0**, ezzel

**r**(t) = (v0 cosα)·t **i** + ((v0 sinα)·t − ½gt2) **k** ,

vagyis x(t) = (v0 cosα)·t , y(t) = 0 , z(t) = (v0 sinα)·t − ½gt2 .

A hajítás pályája:

x(t) = (v0 cosα)·t ⇒ t = x / (v0 cosα) ,

z(t) = (v0 sinα)·t − ½ g t2 , amibe t-t behelyettesítve

, a pálya tehát parabola.

A hajítás magassága: h = zmax , azaz amikor dz/dt = vz = 0:

v0 sinα − gth = 0 ⇒ th = v0 sinα/g időben éri el a pálya legfelső pontját

⇒ h = z(th ) = .

(Vagy kiszámolható a pályából, a dz/dx=0 feltételből.)

A hajítás távolsága: azonos z indulási és érkezési magasság esetén! d = x(td), ahol z(td) = 0:

(v0 sinα)·t − ½ g t2 = 0 ⇒ td = = 2 th (mivel a pálya szimmetrikus)

⇒ d = x(td) = .

(Vagy kiszámolható a pálya egyenletéből: z(x) = 0.)

**3/1.** Egy függőlegesen feldobott kő sebessége 2 s múlva 4 m/s …

**a)** … felfelé,

**b)** … lefelé.

Mekkora volt a kezdősebesség, és milyen maximális magasságot ért el?

**MO.**

(próbáljunk elszakadni attól, hogy külön írjuk fel a felfelé ill. a lefelé haladó mozgást!)

vz(t) = v0 sinα − gt = v0 − gt

vz és v0 pozitív, ha felfelé mutat, ill. negatív, ha lefelé.

vz(2) = v0 – g·2 = v0 – 20 → v0 = vz(2) + g⋅2 = vz(2) + 20 [m/s]

**a)** vz(2) = 4 m/s v0 = 24 m/s és h = v02 / (2g) = 28,8 m

**b)** vz(2) = –4 m/s v0 = 16 m/s és h = 12,8 m

**3/2.** 3,2 m magasról eldobunk egy követ v0 = 2,8 m/s kezdősebességgel, a vízszinteshez képest felfelé 26°-os szöggel.

**a)** Hol van a kő 0,1 s múlva?

**b)** Adjuk meg a test sebességének komponenseit 0,5 s-mal az elhajítás után!

**c)** Mikor ér a kő vissza ugyanabba a magasságba, amilyen magasról eldobtuk? Mekkora, milyen irányú ekkor a sebessége? Milyen távol van ekkor az eldobás helyétől?

**d)** Mikor és hol ér földet a kő? Mekkora sebességgel, milyen irányban csapódik be?

**MO.**

v0x = 2,8·cos26° ≈ 2,517 m/s , v0z = 2,8·sin26° ≈ 1,227 m/s .

Legyenek a kiindulási pont koordinátái x0 = 0, y0 = 0, z0 = 3,2 m.

**a)** x(t) = vxta = v0xta : x(0,1) = 2,517⋅0,1 ≈ 0,2517 m ,

z(t) = z0 + v0z ta – ½ g ta2 : z(0,1) = 3,2 + 1,227⋅0,1 – 5⋅0,12 ≈ 3,273 m (7,3 cm-rel magasabban).

**b)** vx = v0x = konst. ≈ 2,517 m/s, vz = v0z – gtb ≈ 1,227 – 5 ≈ –3,773 m/s (már lefelé megy).

**c)** Visszaér az eredeti magasságra: z0 + v0z tc – ½ g tc2 = z0 → tc = 2v0z/g ≈ 0,2455 s alatt.

Eddigre vízszintesen x(tc) = vxtc = v0xtc ≈ 0,6178 m-tesz meg, ilyen távol van a kiindulási ponttól.

vx = konst.; vz = v0z – gtc = v0z – g⋅(2v0z/g) = –v0z, vagyis a sebességének függőleges komponense ugyanakkora, mint a kezdősebességé volt, csak most lefelé mutat: vz(tc) = –v0z ≈ –1,227 m/s.

A sebesség nagysága tehát most is 2,8 m/s, és a vízszintessel most is 26°-os szöget zár be, de most lefelé, azaz –26°-ot.

**d)** Földet érés: z0 + v0z td – ½ g td2 = 0 , azaz 3,2 + 1,227 td – 5td2 = 0 → td ≈ 0,9321 s alatt.

Eddigre vízszintesen x(td) = vxtd = v0xtd ≈ 2,346 m-t tesz meg.

vx = konst.; vz(td) = v0z – gtd ≈ –8,094 m/s. A sebesség nagysága tehát v(td) ≈ 8,476 m/s,

a vízszintessel bezárt szöge arc tg (–8,094/2,517) ≈ –72,73°.

**3/3.** Béni áll az emeleti erkélyen. Abban a pillanatban, amikor Frédi kilép az utcára, Béni v0 = 2 m/s sebességgel elhajít egy hógolyót. Frédi sebessége vF = 1 m/s.

**a)** Milyen  szögben kell elhajítania, hogy a hógolyó Frédi fejére essék?

**b)** Mennyi idő múlva találja el?

**c)** A kaputól milyen távolságra találja el?

**d)** Frédi felmegy az utca másik oldalán lévő ház erkélyére és megcélozza a vele egy magasságban lévő barátját. Béni megijed, az elhajítás pillanatában leugrik az erkélyről (szabadesésnek vegyük!). Mi történik, ha Frédi v0’ = 20 m/s kezdősebességgel vízszintesen hajított?

**e)** Mekkora minimális v0\* kezdősebességgel kell Frédinek vízszintesen hajítania, hogy még éppen eltalálja Bénit?

F

vF

B

v0

h=5 m



10 m

1,5 m

F

v0’

**MO.**

A hógolyó akkor esik Béni fejére, amikor a hógolyó és Frédi fejének helyvektora megegyezik.

Frédi fejének magasságát vegyük z = 0 -nak (1,5 m-rel a járda fölött);

Frédi fejének vízszintes komponense xF = vF ⋅ t = 1·t

(x=0 a kapunál van és az x tengely arra mutat, amerre Frédi megy);

a hógolyó vízszintes komponense xh = (v0⋅cosα) ⋅ t = (2⋅cosα) ⋅ t;

a hógolyó függőleges komponense zh = h + (v0⋅sinα) ⋅ t − ½ g t2 = 5 + (2⋅sinα) ⋅ t − 5 t2.

**a)** A vízszintes komponensek (xF = xh) egyenlőségéből

cosα = ½, α = ±60°. (Vegyük észre, hogy a hógolyó mindig Frédi feje fölött van!)

A vízszinteshez képest 60°-os szögben kell eldobnia akár ferdén felfelé, akár ferdén lefelé.

**b)** A függőleges komponensek egyenlőségéből:

5 + (2⋅sin 60°) ⋅ t1f − 5 t1f2 = 0 ⇒ t1f ≈ 1,188 s, ha felfelé, ill.

5 – (2⋅sin 60°) ⋅ t1l − 5 t1l2 = 0 ⇒ t1l ≈ 0,8417 s, ha lefelé dobja.

**c)** Bármelyik vízszintes elmozdulásból xF = xh = 1⋅t1 ≈ 1,188 m ill. x = 0,8417 m.

**d)** Most Béni fejének és a másik hógolyónak a helyvektorát kell felírni:

Béni feje: xB = 0, zB = h – ½ g t2 = 5 – 5t2,

a második hógolyó: xh2 = d – v0’ t = 10 – 20t, zh2 = h – ½ g t2 = 5 – 5t2.

Ekkor tehát Béni feje és a hógolyó mindig egy magasságban van – a kérdés tehát az, hogy vízszintesen átér-e a hógolyó Béni fejéhez, mielőtt leesnének a z = 0-ra:

5 – 5t22 = 0 ⇒ t2 = 1 s alatt esnek le,

de xh2 = 10 – 20t3 = 0 ⇒ t3 = 0,5 s alatt a hógolyó már eléri Béni fejét

és eltalálja zB = zh2 = 5 – 5t32 = 3,75 m magasságban.

**e)** Ahhoz, hogy maximum t2 = 1 s alatt xh2 = d – v0\* t2 = 0 legyen, v0\* = 10 m/s.

**3/4.** 360 km/h vízszintes sebességű, magasan repülő repülőgépről kiejtenek egy tárgyat.

Milyen kezdősebességgel kell 10 s-mal később egy másik tárgyat utána dobni, hogy az első tárgy kiesése után 14 s-mal találja el a kiejtett tárgyat?

**MO.**

A repülő sebessége vr = 360 km/h = 100 m/s.

Vegyük fel az x tengelyt abba az irányba, amerre a gép repül.

Az első test helyvektora **r1**(t) = **r0** + vr t **i** – ½ g t2 **k** = **r0** + 100 t **i** – 5 t2 **k**.

A testek a gép elhagyása után megtartják a vízszintes sebességüket. A vízszintes sebesség nem változik, mivel a közegellenállás elhanyagolható, tehát vízszintes irányú erő nem hat a testekre.

Az első test tehát mindig a repülőgép alatt van. Ez azt jelenti, hogy a második testet függőleges kezdősebességgel kell kihajítani a gépről.

A második testet 10 s-mal később dobják ki, ezért a függőleges komponensében szereplő idő t–10:

**r2**(t) = **r0** + vr t **i** + [v(t–10) – ½g(t−10)2] **k** = **r0** + 100 t **i** + [v(t−10) – 5(t−10)2] **k** .

Mivel **r1**(14) **= r2**(14), azaz z1(14) = z2(14): – 5⋅142 = v⋅4 – 5⋅42 ⇒ v = –225 m/s.

**3/5.** Két ferde hajítás kezdősebességének nagysága és a hajítás távolsága azonos. Az egyik hajítás maximális magassága a másik négyszerese. Számítsuk ki a hajítási idők arányát!

**MO.**

A kezdősebességek megegyeznek: v01 = v02 , a hajítás szöge 1 ill. 2.

A két hajítás távolsága megegyezik:

d1 = v012 sin 2α1 /g = d2 = v022 sin 2α2 /g ⇒ sin2α1 = sin2α2 [1]

A maximális magasságok aránya 1:4 :

h1 = v012sin2α1/(2g) = 4h2 = 4⋅v022sin2α2/(2g) ⇒ sin2α1 = 4sin2α2 ⇒ sinα1 = 2sinα2 [2]

A kérdés: (felhasználva, hogy v01 = v02).

Mivel a [2] egyenletből sinα1 = 2 sinα2 ⇒ a hajítási idők aránya.

Bár nem volt kérdés, de az [1] egyenletből kiindulva meghatározható a két hajítás szöge is:

sin2α1 = sin2α2 ⇒ 2α1 = 180°–2α2 ⇒ α2 = 90°–α1 ⇒ sinα2 = sin(90°–α1) = cosα1

Felhasználva, hogy : ⇒ α1 = 63,43°, α2 = 26,57°.

[Vagy: sin2α1 = 2sinα1cosα1 = sin2α2 = 2sinα2cosα2  ⇒ 2cosα1 = cosα2 ⇒ … ]

**Gyakorló feladatok a zárthelyire:**

**3/6.** Milyen szög alatt kell vízszintes terepen elhajítani egy testet, hogy a hajítási magasság megegyezzen a hajítási távolsággal?

**MO.**

h = d: v02 sin2α /(2g) = v02 sin 2α/g ⇒ 2 sin 2α = sin2α ⇒ tg α = 4 ⇒ α ≈ 76°

**3/7.** h = 40 m magas torony tetejéről 45°-os szög alatt (fölfelé) elhajítanak egy testet v0 = 40 m/s kezdősebességgel. Mekkora a távolság a kiindulási és földre érkezési pont között?

**MO.** A test helyvektorának

függőleges komponense z(t) = h + (v0 sinα)⋅t − ½gt2 = 40 − (40⋅sin45°)⋅t − 5⋅t2 ,

földet éréskor z(t\*) = 0 ⇒ t\* = 6,83 s ;

vízszintes komponense: x(t) = (v0 cosα)⋅t = (40⋅cos 45°)⋅t ,

földet éréskor x(t\*) = 193,1 m .

A távolság a kiindulási és földet érési pont között d = 

(Nem a „hajítás távolsága” képlet alkalmazandó, mivel a kiindulási és a földet érési pont nem azonos magasságon van.)

**3/8.** 7920 m magasságban állandó, 960 km/h vízszintes sebességgel haladó repülőgépről leesett az egyik ajtó. Szupermen is azon a repülőgépen utazott, de éppen aludt. 10 s-ig tartott, amíg felébresztették és elmondták neki, mi történt. Ekkor azonnal (0 s alatt) odaszaladt az ajtó helyén tátongó lyukhoz és …

**a)** … függőlegesen lefelé v0 kezdősebességgel elrugaszkodva utána ugrott az ajtónak.

Mekkora kezdősebességgel ugrott ki Szupermen, ha 3 s alatt érte utol az ajtót?

**b)** … zérus kezdősebességgel, de különleges képességeit felhasználva állandó nagyságú, függőleges gyorsulással indult az ajtó után (ez a gyorsulás hozzáadódik a nehézségi erőből eredő gyorsulásához). Legalább mekkorának kellett lenni ennek a gyorsulásnak, hogy még a levegőben elérje az ajtót?

A g értékét vegyük 9,9 m/s2-nek, a légellenállást hanyagoljuk el.

**MO.** Ha a légellenállást elhanyagolhatjuk, akkor a leesett ajtóra nem hat vízszintes irányú erő, megtartja a repülőgép sebességével megegyező vízszintes sebességkomponensét, mindig a repülőgép alatt lesz. A feladat megoldásához elég a z koordinátát felírni.

**a)**  10+3 s alatt az ajtó s = ½ ∙9,9∙132 = 836,6 m -t zuhant.

Szupermen tS = 3 s alatt v0 kezdősebességről indulva tesz meg ekkora utat:

s = v0 tS + ½ g∙ tS2 ⇒ v0 = (836,55 – ½ ·9,9∙ 32) / 3 = 264 m/s.

**b)** Az ajtó h = 7920 m magasságból ta =  = 40 s alatt ér földet. Ennél 10 s -mal kevesebb idő alatt kell Szupermennek földet érnie, ha még a levegőben el akarja kapni az ajtót.

s = ½ (g+a)t2 ⇒ a = 2s/t2 – g = 2∙7920/(40–10)2 – 9,9 = 7,7 m/s2.

**3/9.** 50 m/s kezdősebességgel függőlegesen felfelé hajítanak egy tárgyat. Ugyanakkor 50 m magasról szabadeséssel leesik egy másik tárgy. Mikor és milyen magasan találkoznak?

**MO**. 1,0 s múlva, 45 m magasságban

**3/10.** Mekkora kezdősebességgel kell az origóból a vízszinteshez képest 60°-os szög alatt eldobni egy labdát, hogy az a P (4,3) pontba érkezzen?

**MO.** x = (v0 cos60°) t = 4 ; z = (v0 sin60°) t – ½ gt2 = 3 → t = 0,8864 s, v0 = 9,026 m/s

**… és még ld. a kirakott zh-kat!**

**Egyéb: nem hajítás, de hasonló: konstans erő hatására mozgó test (zh-ban előfordulhat)**

**3/11.** Egy m = 1 g tömegű test a t1 = 2 s időben az x tengely pozitív felén van az origótól x1 = 10 cm-re, sebessége a +y tengely irányába mutat és nagysága v1 = 10 cm/s. A test a t2 = 5 s időpontban a   
P2 (–0,5 cm, 15 cm, 0) pontban van, a sebessége a –x tengely irányába mutat és nagysága   
v2 = 7 cm/s. A testre állandó erő hat.

**a)** Mekkora az erő nagysága?

**b)** Mekkora a test sebessége a t3 = 8 s időpontban, és hol lesz a test akkor?

**MO.** Állandó erő esetén a gyorsulás állandó: **F**/m = **a** = konst. , azaz = konst., = konst.

⇒ integrálással a sebességvektor: **v**(t) = **a·**t + **v**(0),

és a helyvektor: **r**(t) = ½ **a·**t2 + **v**(0)·t + **r**(0).

A feladatban adott volt a helyvektor és a sebességvektor 2-2 időben:

t1 = 2 s: **r**(2) = 0,1 **i** [m], **v**(2) = 0,1 **j** [m/s],

t2 = 5 s: **r**(5) = −0,005 **i** + 0,15 **j** [m], **v**(5) = −0,07 **i** [m/s].

A fenti általános képletekbe behelyettesítve tehát

½ **a⋅**22 + **v**(0)⋅2 + **r**(0) = 0,1 **i** , **a**⋅2 + **v**(0) = 0,1 **j**

½ **a⋅**52 + **v**(0)⋅5 + **r**(0) = −0,005 **i** + 0,15 **j** , **a**⋅5 + **v**(0) = −0,07 **i**

3 ismeretlen vektorunk van: **a**, **v**(0) és **r**(0) és 4 egyenletünk, a feladat túlhatározott; **v**(2) és **v**(5) értékéből megkapjuk **a** és **v**(0) értékét, és bármelyik **r** -ből **r**(0)-at.

**a)** A gyorsulást megkapjuk a sebességekből:

.

Ennek nagysága ,

a testre ható erő nagysága pedig F = ma ≈ 10–3 kg ⋅ 0,04 m/s2 = 4⋅10–5 N.

**b)** A test kezdősebessége ,

tehát a test sebessége .

t3 = 8 s-ban **v**(8) = **a**⋅8 + **v**(0) = – 0,14 **i** – 0,1 **j**, ennek nagysága .

A test helyvektora t = 0 s-ban

,

tehát a test helyvektora

.

t3 = 8 s-ban **r**(8) = ½ **a⋅**82 + **v**(0)⋅8 + **r**(0) = … = – 0,32 **i** [m]

Megjegyzés: a fenti képletekbe a t = 0 s-hoz tartozó **v**(0) és **r**(0) értékeket írtuk be, de a **v**(t) és **r**(t) függvényeket felírhatjuk tetszőleges t0 időhöz tartozó **v**(t0) és **r**(t0) értékekkel:

**v**(t) = **a·**(t–t0) + **v**(t0) , **r**(t) = ½ **a·**(t–t0)2 + **v**(t0)·(t–t0) + **r**(t0) .

Így kiszámolhatjuk **v**(8)-at és **r**(8)-at úgy is, hogy nem kell számolni **v**(0)-t és **r**(0)-t. Ráadásul esetünkben t3 és t2 között ugyanannyi idő telik el, mint t2 és t1 között, Δt = 3 s, és mivel a gyorsulás állandó, ezért ugyanannyit változik a sebesség is (Δ**v** = **a**·Δt), azaz

**v**(8) = **v**(5) + Δ**v** = **v**(5) + [ **v**(5) – **v**(2) ] ,

vagy az is igaz, hogy **v**(8) = **v**(2) + 2·Δ**v** = **v**(2) + 2·[ **v**(5) – **v**(2) ].

A helyvektor számolásánál pedig

**r**(8) = ½ **a·**(8–5)2 + **v**(5)·(8–5) + **r**(5) vagy **r**(8) = ½ **a·**(8–2)2 + **v**(2)·(8–2) + **r**(2).

**Nehezebb hajításos feladatok, zh-ban nem várhatók ilyenek:**

**3/12.** Egy α = 30° hajlásszögű, h = 1,6 m magas lejtő tetejéről elengedünk egy ládát. Ugyanebben az időpontban a lejtő tetejéről egy labdát úgy dobunk el, hogy az a lejtő legalján éppen a ládába essen. Mekkora és milyen irányú kezdősebességgel kell a labdát eldobni? A láda és a lejtő közötti súrlódási együttható μ = .

**MO.**

A láda súrlódással csúszik lefelé a lejtőn, a mozgásegyenlete

lejtőre merőlegesen: ma⊥ = 0 = Fny – mg cos

lejtővel párhuzamosan: ma║ = mg sin – Fny

tehát a gyorsulása a lejtő síkjában

a = a║ = (sin – cos) g = (sin30° – cos30°)·10 = (0,5–)·10 = 3,125 m/s2 .

Zérus kezdősebességről indulva s = h / sin = 1,6 / sin30° = 3,2 m-t tesz meg a láda a fenti gyorsulással:

s = t2 → t = alatt ér le a láda.

Ennyi idő alatt kell a labdának ugyanabba a pontba érkeznie, azaz ha az origóból indul,

vízszintesen h / tg = 1,6 / tg30° ≈ 2,77 m-t tesz meg és az x ≈ 2,77 [m] pontba,

függőlegesen h = 1,6 m-t tesz meg és a z = –1,6 [m] pontba érkezik.

azaz x = (v0cos) t = (v0cos)·1,43 = 2,77

z = (v0sin) t – g/2 t2 = (v0sin)·1,43 – g/2 ·1,432 = –1,6

→ v0 ≈ 6,34 m/s,  ≈ 72,2°.

**3/13.** Állandó hajlásszögű egyenes lejtőn csúszunk lefelé a szánkónkkal vsz = 3 m/s állandó sebességgel. A súrlódási együttható  = 0,14. A szánkó elején van egy csúzli, ami vízszintesen, v0 = 16 m/s kezdősebességgel tud kilőni egy golyót. A lejtő végénél van egy céltábla. Milyen magasságban kell a mozgó szánkóból a csúzlit kilőni, hogy eltaláljuk a céltáblát?

**MO.**

A lejtő hajlásszögét abból tudjuk kiszámolni, hogy a szánkó – amit gyorsít a nehézségi erőnek a lejtővel párhuzamos komponense és fékez a súrlódási erő – állandó sebességgel csúszik, vagyis a (lejtővel párhuzamos) gyorsulása zérus: ma║ = mg sin –  Fny = 0.

A lejtőre merőleges mozgásegyenletből: ma⊥ = Fny – mg costudjuk, hogy Fny = mg cos,

és így a lejtővel párhuzamos mozgásegyenlet ma║ = mg sin – mg cos = 0

→  = 0,14 = tg →  = arc tg 0,14 ≈ 8° .

A szánkó sebességének vízszintes komponense vsz,x = vsz·cos ≈ 2,971 m/s ,

függőleges komponense vsz,z = vsz·sin ≈ 0,416 m/s.

A kilőtt golyó sebességének vízszintes komponense vg0,x = vsz,x + v0 ≈ 2,971+16 = 18,971 m/s ,  
kezdősebességének függőleges komponense vg0,z = vsz,z ≈ 0,416 m/s.

A koordinátarendszert az ábra szerint választva a golyó az x = 0, z = h pontból indul és az   
x = h/tg , z = 0 pontba kell megérkezzen, tehát

h



v0

vsz

x

z

0

x: ( vsz,x + v0 ) · t = h / tg

z: h – vsz,z · t – ½ g t2 = 0.

Az elsőből h-t kifejezve és átírva a másodikba

( vsz,x + v0 ) · t · tg– vsz,z · t – ½ g t2 = 0 ,

amiből t = 2 v0 tg / g ≈ 0,448 s és visszahelyettesítve

**h** = 2 v0 tg ( vsz sin + v0 tg ) / g  **≈ 1,19 m** .

**3/14.** A 200 m magas hegy talppontjától (a hegycsúcs alatti ponttól) 500 m-re lévő puska irányzékát milyen (legkisebb) szögre kell állítani, hogy átlőjön a hegycsúcs fölött? Mennyi idő telik el, amíg a puskagolyó a hegy csúcsa fölé érkezik? A puskagolyó kezdősebessége 1000 m/s.

**MO.**

vízszintesen x = v0 t cosα : 500 = 1000 t cosα ⇒ t cosα = 0,5

függőlegesen z = v0 t sinα – ½ g t2 : 200 = 1000 t sinα – 5 t2 ⇒ t sinα = t2/200 + 0,2

Felhasználva, hogy (t cosα)2 + (t sinα)2 = t2, egy t2-ben másodfokú egyenletet kapunk:

0,25 + t4 / 40000 + 0,002 t2 + 0,04 = t2, amiből t1 = 0,539 s és t2 = 199,8 s.

A megfelelő szögek: α1 = 21,93° (ez a minimális) és α2 = 89,86° (ezt már veszélyes kipróbálni!)

**3/15.** A hegyről lövik a síkságon lévő lőállásokat. A hegyen és a síkságon lévő ágyúk egyformák, az ágyúgolyók kezdősebessége v0 = 500 m/s. A hegyen lévő ágyú csöve vízszintesen áll. A síkságon lévő ágyúból a golyót pont 1 s-mal azután lövik ki, hogy meglátták a hegyi ágyú torkolattüzét. Sikerül is az ágyúgolyót még a levegőben eltalálni és eltéríteni a céltól. Hol találja el egymást a két ágyúgolyó? Mekkora a síkságon lévő ágyú csövének a vízszintessel bezárt szöge?

200 m

800 m

v0

v0



x

z

**MO.** A hegycsúcsról kilőtt ágyúgolyó helyvektora, ha az origó a hegy talppontjában van,   
az x tengely a síkságon lévő ágyú felé mutat, és az ágyúgolyót t = 0-ban lőtték ki:

**r1**(t) = 500t **i** + (200–10/2t2) **k** ,

a síkságon kilőtt ágyúgolyó helyvektora pedig

**r2**(t) = [800–500·cosα(t–1)] **i** + [500·sinα(t–1)–10/2(t–1)2] **k**

A két ágyúgolyó helyvektora egyenlő kell legyen; komponensenként felírva:

x koordináta: 500t = 800–500·cosα(t–1)

z koordináta: 200–10/2t2 = 500·sinα(t–1)–10/2(t–1)2

Az első egyenletből cosα(t–1) = (800–500t)/500 = 1,6–t ,

a másodikból sinα(t–1) = (205–10t)/500 = 0,41–0,02t .

Ezeket négyzetre emelve és összeadva egy t-ben másodfokú egyenletet kapunk, aminek a megoldása t1 ≈ 1,42 s és t2 ≈ 3040 s.

A t1 -ből számolt szög α1 ≈ 64,9°, és az ágyúgolyók találkozásának helye

x1(t1) = 500·1,42 = x2(t1) = 800–500·cos64,9°·0,42 ≈ 711 m

z1(t1) = 200–5·1,422 = z2(t1) = 500·sin64,9°·0,42–5·0,422 ≈ 190 m

**r**(t1) = 711 **i** + 190 **k** [m].

A t2 -ből számolt szög α2 ≈ 178,9°,

és az ágyúgolyók találkozásának helye

x1(t2) = 500·3040 = x2(t2) = 800–500·cos178,9°·3039 ≈ 1,52·106 m

z1(t2) = 200–5·30402 = z2(t2) = 500·sin178,9°·3039–5·30392 ≈ –4,62·107 m

ami nem lehetséges, mert a föld felszínét (a z = 0-t) előbb elérik az ágyúgolyók.

(Ha a Föld sokkal nagyobb lenne – vagy a Föld lapos lenne -, és a homogén erőtér közelítés érvényes lehetne ekkora távolságon is, és az ágyúgolyók földet érési pontja előtt elkezdődne egy 4,62·107 m mély kráter, akkor lenne csak értelme ennek a megoldásnak.)

x

y

A

45°

**3/16.** Melyek azok a pontok, amelyekből elejtve az A golyót, az a 45°-os lejtőről rugalmasan ütközve éppen a lejtő aljára pattan?

**MO.**

A golyó a lejtő fölött h magasságból indul, így a lejtőre érkezéskor v\* (függőleges irányú) sebessége lesz:

z = −h = − ½gt12 ⇒ t1 =  ⇒ v\* = gt1 = .

A lejtőről való elpattanáskor ez lesz a vízszintes irányú kezdősebessége, mivel a lejtő 45°-os.

Egyenesen a lejtő aljába pattan, így vízszintesen x = v\* t2, függőlegesen z = ½ g t22 utat tesz meg, és mivel a lejtő 45°-os, x = z, azaz v\* t2 = ½ g t22 .

Ebből t2 = 2v\*/g és x = z = 2 v\*2 / g , v\*-t beírva x = z = 4h,

azaz azok a pontok, ahonnan elejtve a golyót, az a lejtőn rugalmasan ütközve éppen a lejtő aljára pattan, a z = 5/4 x egyenes pontjai.

**EGY IGAZÁN HALADÓ HAJÍTÁSOS FELADAT: (nem zh-ra való)**

**3/17.** A vízszinteshez képest mekkora szög alatt kell adott h magasságból adott v0 kezdősebességgel elhajítani egy tárgyat, hogy az a lehető legmesszebb érjen földet?

**MO.**

h magasságból indulva td időben 0 legyen a z test koordinátája:

z(td) = 0 = h + (v0 sin) td – ½ g td2 → h = ½ g td2 – (v0 sin) td

és eközben vízszintesen megtesz d távolságot:

x(td) = d =(v0 cos) td . Ennek keressük a maximumát, ha  változhat (v0 adott).

Rendezzük az egyenleteket úgy, hogy td-t kifejezve az egyikből és áthelyettesítve a másikba   
felírjuk d-t  függvényében, majd megkeressük a d() függvény szélsőértékét (deriváljuk  szerint és megoldjuk a dd/d = 0 egyenletet).

Tehát d-ből td = d/(v0cos) →

h = ½ g/(v0cos)2 · d2 – (v0 sin)/(v0cos) · d , azaz d2 – (v02/g)·sin2 · d – 2h(v02/g)cos2 = 0

→ és

Hosszas rendezgetés után ebből megkapjuk, hogy .