**Fizika 1 – Mechanika órai feladatok megoldása 2. hét**

**2/1.** Egy tömegpont helyvektora az időtől a következőképpen függ:

**r**(t) = (At+B) **i** + (At–B) **j** + (–Ct2+4At+5B) **k**  ,

ahol A = 3 m/s, B = 10 m, C = 5 m/s2.

**a)** Milyen távol van a tömegpont az origótól a t0 = 0 időpontban?

**b)** Milyen távol van a kiindulási ponttól a t1 = 2 s -ban? A test t0 = 0 -ban indult.

**c)** Határozzuk meg a tömegpont sebességét és gyorsulását!

**d)** Mekkora a sebessége a t0 = 0 időpontban?

**e)** Mely időpontban éri el a tömegpont az x-y síkot?

**MO.**

**a)** A konstansokat behelyettesítve **r**(t) = (3t+10) **i** + (3t–10) **j** + (–5t2+12t+50) **k**  [m].

t0 = 0 –ban az **r**(0) = 10 **i** − 10 **j** + 50 **k** [m] pontban van a test,

aminek a távolsága az origótól ≈ 51,96 m.

**b)** t1 = 2 s-ban az  **r**(2) = 16 **i** − 4 **j** + 54 **k** [m] pontban van a test.

Az elmozdulásvektor a t0 = 0 → t1 = 2 s intervallumban

**Δr** = **r**(2)– **r**(0) = 6 **i** + 6 **j** + 4 **k** [m], ennek nagysága ≈ 9,381 m.

**c) v**(t) = = a **i** + a **j** + (−2ct+4a) **k** = 3 **i** + 3 **j** + (−10t+12) **k** [m/s]

**a**(t) = = −2c **k** = −10 **k** [m/s2]

**d) v**(0) = 3 **i** + 3 **j** + 12 **k** [m/s] , nagysága ≈ 12,73 m/s.

**e)** az x-y síkot akkor éri el, amikor z = 0, azaz

–5 t2 + 12 t + 50 = 0 ⇒ t3 ≈ 4,582 s (és t4 ≈ – 2,182 s -ban is ott lett volna)

és még egy kérdés: (ez nem zh-szintű feladat)

**f)** Bizonyítsuk be, hogy a mozgás síkmozgás! Határozzuk meg a pálya síkját!

**MO.** A mozgás síkmozgás, ha p·x + q·y + r·z + s = 0 teljesül minden t-re.

Most x = At+B, y = At–B, z = –Ct2+4At+5B, tehát

p(At+B)+q(At–B)+r(–Ct2+4At+5B)+s =(–rC)t2+(pA+qA+4rA)t +(pB–qB+5rB+s)=0,

amiből –rC = 0 és pA+qA+4rA = 0 és pB–qB+5rB+s=0 .

–rC = 0 → r = 0

p = 1 választással a sík egyenlete: x – y – 2B = 0.

**2/2.** Egy repülőgép mozgását az

**j**  [m] függvény írja le,

ahol A = 200 m, t0 = 2 s, az idő s-ban értendő.

**a)** Milyen pályán mozog a repülőgép?

**b)** Mekkora szöget zár be a sebességvektor a gyorsulásvektorral a t1 = 0 ill. a t2 = 2 s időben?

**MO. a)** x(t) = A cos(t/t0) = 200 cos(t/2) [m]

y(t) = 2A sin(t/t0) = 400 sin(t/2) [m]

Fejezzük ki az első egyenletből cos(t/t0)-t, a másodikból sin(t/t0)-t. Mivel

, ezért , vagyis ,

azaz egy ellipszisen mozog a repülőgép (pozitív forgásirányban).

[ Mivel T/2 = 2π, a periódusidő T = 4π ≈ 12,57 s. ]

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x200.jpg | 400y.jpg | x200y400.jpg |
| x – t | y – t | y – x |

**b)**

**v**(t) = = − A/t0 sin(t/t0) **i** + 2A/t0 cos(t/t0) **j** = − 100 sin(t/2) **i** + 200 cos(t/2) **j**

**a**(t) = = − A/t02 cos(t/t0) **i** − 2A/t02 sin(t/t0) **j** = − 50 cos(t/2) **i** − 100 sin(t/2) **j**

t1 = 0 s -ban **v**(0) = 200 **j** [m/s], **a**(0) = − 50 **i** [m/s2] . Látható, hogy a két vektor merőleges.

[**r**(0) = 200 **i** [m], a test az x tengely +200 (m) pontjában van;

a sebessége **j** irányú, azaz előrefelé mutat az ellipszis érintőjének irányában;

a gyorsulása az origó felé mutat, pontosan merőleges a sebességre, vagyis ebben a pillanatban a test állandó nagyságú sebességgel kanyarodik.]

t2 = 2 s -ban **v**(2) = −100 sin(1) **i** + 200 cos(1) **j** = − 84,15 **i** + 108,1 **j** [m/s],

**a**(2) = −50 cos(1) **i** − 100 sin(1) **j** = − 27,02 **i** − 84,15 **j** [m/s2].

A két vektor által bezárt szög nagyságát **skalárszorzat**tal számolhatjuk ki:

általánosan: **b**⋅**c** = ·cosα , Descartes-komponensekben **b**⋅**c** = bx cx + by cy + bz cz

itt **v**(2) ⋅ **a**(2) = ·cosα →

****

**→** α = 2,169 rad = 124,3°

[t2 = 2 s-nál **r**(2) = 108,1 **i** + 336,6 **j** [m];

a sebesség érintő irányú;

a gyorsulás az origó felé mutat, ami ebben a pillanatban a sebességre merőleges irányhoz képest „hátrafelé” van (124,3°>90°), vagyis ebben a pillanatban lassulva kanyarodik.]

Skalárszorzattal felírvat1 = 0 esetében: **v**(0) ⋅ **a**(0) = 0 → merőlegesek .

**2/3.** Egy kipukkadt lufi sebességét az alábbi függvény adja meg:

**v**(t)= 0,2 e0,1t **i** − 2,8 sin(4t) **j** + (3−4t) **k**  [m/s]

Az időt másodpercekben, a távolságot méterben mérjük.

Kipukkadásakor, t = 0 s-ban a lufi az **r0** =2 **i** + 1,4 **j** + 1,5 **k** [m] pontból indult.

**a)** Hol lesz a lufi fél másodperc múlva?

**b)** A lufi egy olyan 3×3×3 m-es szobában van, melynek egyik sarkához illesztettük a koordinátarendszerünket. Mikor, melyik fal (ill. plafon v. padló) melyik pontjának megy neki először?

**MO.** Keressük azt az **r**(t) függvényt, amire teljesül, hogy

- deriváltja a fent megadott **v**(t) függvény: és

- helyettesítési értéke megfelel az adott feltételnek; speciálisan t0 = 0 esetén **r**(0) = **r0** .

Ezt a függvényt határozott vagy határozatlan integrállal is előállíthatjuk.

**Határozott integrállal:**

,

koordinátánként

; ; .

Esetünkben t0 = 0, x(t0) = x(0) = x0 = 2 m ; y(t0) = y(0) = y0 = 1,4 m ; z(t0) = z(0) = z0 = 1,5 m.

;

;

;

azaz **r**(t) = 2e0,1t **i** + 0,7(1+cos(4t)) **j** + (1,5+3t–2t2) **k** [m] .

**Határozatlan integrállal:**

A k1 konstans értékének meghatározásához az **r0** vektorból kiolvassuk x0 értékét: x0 = 2;  
ezzel kell egyenlő legyen az x(t) értéke t=0-ban,   
amihez az x(t) függvénybe t=0 -t helyettesítünk: x(0)=   
és felírjuk, hogy x(0) = x0: 2 + k1 = 2 → k1 = 0 , tehát .

,

a kezdeti feltételből 0,7cos0 + k2 = 0,7 + k2 = 1,4 → k2 = 0,7 , tehát .

,

a kezdeti feltételből 0 + k3 = 1,5 → k3 = 1,5 , tehát .

**a)** t = 0,5 s behelyettesítésével

x = 2e0,05 ≈ 2,103 m , y = 0,7(1+cos(2)) ≈ 0,4087 m , z = 3·0,5–2·0,52+1,5 = 2,500 m ,

tehát **r**(0,5) = 2,103 **i** + 0,4087 **j** + 2,500 **k** [m].

**b)** A szobát határoló síkok az x = 0, x = 3, y = 0, y = 3, z = 0 és z = 3 síkok;   
azt kell megvizsgálni, melyik feltétel mikor teljesül, és a legkisebb időt kiválasztani.

x = 2e0,1t = 0 : soha x = 2e0,1t = 3 : tx ≈ 4,055 s

y = 0,7(1+cos(4t)) = 0 : ty ≈ 0,7854 s y = 0,7(1+cos(4t)) = 3: soha

z = 3·t–2·t2+1,5 = 0 : tz ≈ 1,896 s z = 3·t–2·t2+1,5 = 3 : soha

A lufi tehát t = 0,7854 s-ban nekimegy az y = 0 egyenletű fal   
x(0,7854) = 2,163 m, z(0,7854) = 2,622 m pontjának.

**2/4.** Egy test gyorsulása **a**(t) = ( 2t + 1 ) **i** + π2 cos (3πt) **j**  [m/s2].

A t = 0 s -ban a test sebessége **v0** = 2 **i** + 22 **j** [m/s].

Mennyi lesz t = 4 s -ban

**a)** a sebesség nagysága?

**b)** a sebességvektornak az x tengellyel bezárt szöge?

**c)** Hol lesz a test t = 4 s -ban, ha t = 1 s-ban **r**(1) = 22 **j** + 2 **k** [m] ?

**MO.**

Keressük azt a **v**(t) függvényt, amire teljesül, hogy

- deriváltja a fent megadott **a**(t) függvény: és

- helyettesítési értéke megfelel az adott feltételnek; speciálisan t0 = 0 esetén **v**(0) = **v0** .

Határozott integrállal:

Határozatlan integrállal:

ax = = 2t + 1 → vx(t) = t2 + t + k1

mivel vx(0) = 2, így 02 + 0 + k1 = 2 → k1 = 2, azaz vx = t2 + t + 2 ;

ay = = π2 cos(3πt) → vy(t) = π/3·sin(3πt) + k2

mivel vy(0) = 22, így π/3·sin(0) + k2 = 22 → k2 = 22, azaz vy = π/3·sin(3πt) + 22 ;

tehát **v**(t) = ( t2 + t + 2 ) **i** + (π/3·sin(3πt) + 22 ) **j** [m/s] .

t = 4 s-ban **v**(4) = (42+4+2) **i** + (π/3·sin(12π) + 22 ) **j** = 22 **i** + 22 **j** [m/s] . Ennek

**a)** nagysága ≈ 31,11 m/s ;

**b)** az x tengellyel – azaz az **i** egységvektorral – bezárt szöge:

→ Φ= π/4 rad = 45° .

**c)** Az integrálásnál arra kell figyelni, hogy most t0 ≠ 0.

Határozott integrállal:

Határozatlan integrállal:

**r**(t) = ( t3/3 + t2/2 + 2t + k4 ) **i** + (–1/9·cos(3πt) + 22t + k5 ) **j** + k6 **k** [m].

k4, k5, k6 értékét most t = 1 behelyettesítésével kapjuk meg:

x(1) = 13/3 + 12/2 + 2·1 + k4 = 17/6 + k4 = 0 → k4 = –17/6 ;

y(1) = –1/9·cos(3π·1) + 22·1 + k5 = 1/9 + 22 + k5 = 22 → k5 = –1/9 ;

z(1) = k6 = 2 → k6 = 2 ;

tehát  **r**(t) = ( t3/3 + t2/2 + 2t – 17/6 ) **i** + (–1/9·cos(3πt) + 22t – 1/9 ) **j** + 2 **k** [m].

t = 4 s -ban **r**(4) = 34,5 **i** + 790/9 **j** + 2 **k** ≈ 34,5 **i** + 87,78 **j** + 2 **k** [m].

**Gyakorló feladatok a zárthelyire:**

**2/5.** Ágyúgolyó röppályájának egyenlete

**r**(t) = (at + b) **i** + (gt2 + ct + d) **k** ,

ahol a = 5 m/s, b = 100 m, c = 10 m/s, d = 200 m, g = –5 m/s2.

**a)** Honnan lőtték ki az ágyúgolyót? A kilövés t = 0 s-ban történt.

**b)** Mekkora volt a kezdősebessége?

**c)** Mekkora volt a gyorsulása?

**d)** Mikor és hol ér földet az ágyúgolyó? A koordinátarendszer origója a földön van.

**e)** Mikor és hol lesz merőleges a sebesség a gyorsulásra?

**MO.**

**a)** t = 0 s-ban **r**(0) = b **i** + d **k** = 100 **i** + 200 **k** [m] .

**b)** **v**(t) = = a **i** + (2bt + c) **k** = 5 **i** + (−10t + 10) **k**,

**v**(0) = 5 **i** + 10 **k**, v0 = ≈ 11,18 m/s .

**c)** **a**(t) = = 2b **k** = −10 **k** [m/s2]

(azaz a gyorsulás konstans, 10 m/s2 lefelé, ami a szokásos közelítő érték g-re, csak most a képletben ennek a fele volt g-vel jelölve)

**d)** azaz a z = 0 síkot mikor éri el:

gt2 + ct + d = –5t2 + 10t + 200 = 0 ⇒ t ≈ 7,403 s (a másik gyök negatív, –5,403 s)

**e)** a két vektor ott merőleges, ahol a skalárszorzatuk nulla:

**v**⋅**a** = 5⋅0 + (−10t + 10)⋅( −10) = 100(t−1) = 0 ⇒ t = 1 s,

**r**(1) = 105 **i** + 205 **k** [m] , ez a pálya csúcspontja.

(Gyorsabban megoldható a feladat a vz = −10t + 10 = 0 feltételből.)

**2/6.** Egy test gyorsulása

**a**(t) = 4a sin (ωt+ϕ0) **i** + 4b sin ωt **j** , ahol ω = 2 s–1, ϕ0 = π/2.

t1 = π/4 s-ban a test az **r1** = a **i** – b **j** [m] pontban van és sebessége **v1** = 2a **i** [m/s].

**a)** Adjuk meg a test helyvektorát és sebességét t2 = 3π s-ban! ( **r2** = ?, **v2** = ? )

**b)** Milyen pályán mozog a test?

**c)** Mely időpontokban van legközelebb a test az origóhoz?

**MO.**

ax = 4a sin (2t+π/2) = 4a cos 2t = ⇒ vx = 2a sin 2t + k1

t1 = π/4 s-ban v1x = 2a ⇒ k1 = 0, vx = 2a sin 2t = ⇒ x = − a cos 2t + k2

t1 = π/4 s-ban x1 = a ⇒ k2 = a, x = − a cos 2t + a

ay = 4b sin 2t = ⇒ vy = −2b cos 2t + k3

t1 = π/4 s-ban v1y = 0 ⇒ k3 = 0, vy = −2b cos 2t = ⇒ y = − b sin 2t + k4

t1 = π/4 s-ban y1 = − b ⇒ k4 = 0, y = − b sin 2t

**v**(t) = (2a sin 2t) **i** – (2b cos 2t) **j** [m/s], **r**(t) = (a − a cos 2t) **i** – (b sin 2t) **j** [m] .

**a)** **r**(3π) = (−a cos 6π + a) **i** − b sin 6π **j** = **0** [m] ,

**v**(3π) = 2a sin 6π **i** − 2b cos 6π **j** = − 2b **j** [m/s] .

**b)** x(t) = a − a cos 2t ⇒ cos 2t = (a−x)/a

y(t) = − b sin 2t ⇒ sin 2t = − y / b

Felhasználva, hogy cos2 α + sin2 α = 1: a pálya  ellipszis

**c)** x(t) = 0, ha t = k·π; y(t) = 0, ha t = k·π/2 ;

azaz t = k·π esetén a test távolsága az origótól zérus.

**2/7.** Egy m = 5 kg tömegű test sebességét az alábbi függvény írja le:

**v** = a sin(bt) **i** + c sin(dt) **j**  ,

ahol a = –12 m/s, b = 2 s–1, c = –2 m/s, d = 1 s–1.

A test a t = 0 s-ban az **r0** = 9 **i** + 3 **j** [m] pontban volt.

**a)** Adjuk meg a testre ható erőt az idő függvényében! (Vektorként és a nagyságát is.)

**b)** Adjuk meg a test helyvektorát az idő függvényében!

**c)** Milyen pályán mozog a test? Rajzoljuk is meg!

**d)** Mekkora szöget zár be a sebességvektor és a gyorsulásvektor t = π/2 s-ban?

**MO. v** = a sin(bt) **i** + c sin(dt) **j** = – 12 sin(2t) **i** – 2 sin(t) **j**  [m/s]

**a)** **a** = ab cos(bt) **i** + cd cos(dt) **j** = – 24 cos(2t) **i** – 2 cos(t) **j** [m/s2]; m = 5 kg

**F** = m⋅**a** = – 120 cos(2t) **i** – 10 cos(t) **j** [N] , az abszolút értéke

[N]

**b) r** =

x(t) = = = 6 cos(2t) + k1 ; x0 = 9 m;

x(0) = 6 cos(0) + k1 = 6 + k1 = x0 = 9 → k1 = 3

x(t) = 6 cos(2t) + 3

y(t) = = = 2 cos(t) + k2 ; y0 = 3 m;

y(0) = 2 cos(0) + k2 = 2 + k2 = y0 = 3 → k2 = 1

y(t) = 2 cos(t) + 1

tehát a test helyvektora:

**r**(t) = [ 6 cos(2t) + 3 ] **i** + [ 2 cos(t) + 1 ] **j** [m]

**c)** Az **r**(t) függvény a pálya paraméteres alakja. Jelen esetben az időt úgy tudjuk kiküszöbölni belőle, hogy

az x(t)-ből kifejezzük cos(2t)-t: cos(2t) = (x–3)/6 ,

az y(t)-ből pedig kifejezzük cos(t)-t: cos(t) = (y–1)/2 ,

és cos(2t)-t kifejezzük cos(t)-vel:

cos(2t) = cos2(t) – sin2(t) = cos2(t) – [1–cos2(t)] = 2cos2(t) – 1

vagyis (x–3)/6 = 2·[(y–1)/2]2 – 1 .

Ebből átrendezés után kapjuk, hogy x = 3y(y–2) .

A pálya ennek a parabolának az a része, amire

–3 ≤ x ≤ 9 ( és –1 ≤ y ≤ 3 ).

**d)**

**v** = a sin(bt) **i** + c sin(dt) **j** = – 12 sin(2t) **i** – 2 sin(t) **j**  [m/s]

**a** = = ab cos(bt) **i** + cd cos(dt) **j** = –24 cos(2t) **i** – 2 cos(t) **j** [m/s2]

**v**(π/2) = – 12 sin(π) **i** – 2 sin(π/2) **j** = – 2 **j** [m/s]

**a**(π/2) = –24 cos(π) **i** – 2 cos(π/2) **j** = 24 **i** [m/s2]

**v**(π/2) ⋅ **a**(π/2) = 0 → merőlegesek

**2/8.** Két légy mozgásának pályafüggvénye

**r1**(t) = a t2 **i** + b t **j** + c **k**

**r2**(t) = **i** + d t **j** + e t2 **k**

ahol a = 5 m/s2, b = 2 m/s, c = 5 m, d = –3 m/s, e = 2 m/s2.

**a)** Írjuk fel egymástól való távolságukat az idő függvényében!

**b)** Számítsuk ki a t = 10 s-ban a két légy sebességvektorát és sebességük nagyságát!

**MO.**

**a)**

**b)** **v1**(t) = 2at **i** + b **j** + 0**k** = 10t **i** + 2 **j** [m/s]; **v1**(10) = 100 **i** + 2 **j** [m/s]

**v2**(t) = 0 **i** + d **j** + 2et**k** = –3 **j** + 4t **k** [m/s];  **v2**(10) = –3 **j** + 40**k** [m/s] → abszolút érték …

**2/9.** Műrepülés közben két repülőgép pályája a következő pályafüggvényekkel adható meg:

**r1**(t) = a cos 3ωt **j** + a sin 3ωt **k**

**r2**(t) = 3a cos (5ωt+π) **i** + 3a sin (5ωt+π) **j**

ahol a = 100 m, ω = 0,1 s–1 .

**a)** Milyen pályákon repülnek a repülőgépek?

**b)** Mekkora a távolság a két repülőgép között t = 0 s-ban?

**MO.**

**a)** x12 + y12 = 1002 : 100 m sugarú kör;

**r2**(t) = –3a cos(5ωt) **i** – 3a sin(5ωt) **j** ; x22 + y22 = 3002 : 300 m sugarú kör

**b) r1**(0) = 100 **i** ; **r2**(0) = –300 **i** , d = 400 m

**Egyéb feladatok (nem zh-feladatok)**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **2/11.** Egy ember a tóparton levő A pontból a legrövidebb idő alatt szeretne a B pontba érni. Milyen útvonalat válasszon, ha a maximális futási sebessége vf, úszási sebessége pedig vú? | | | D  s  A  B | |
| **MO.**  D  s  A  B  x     | Az út két szakaszból áll, először valameddig fut a parton: legyen ez az ábra jelölése szerint *s–x*, majd ott beugrik a vízbe és egyenesen a B pont felé úszik; ez az út . A teljes idő tehát    annak függvénye, hogy hol kezdett el úszni.  Azt az *x* értéket keressük, amelynél *t*-nek minimuma van (azaz ahol a *t(x)* függvény deriváltja zérus):  ,amiből . | |

Látszik, hogy ez csak akkor megoldás, ha *vf > vú* (vagyis ha valaki gyorsabban úszik, mint ahogy fut, akkor végig csak ússzon).

[A *t(x)* függvény második deriváltja *d2t/dx2 = D2/(vú(x2+D2)3/2) > 0* , tehát a szélsőérték tényleg minimum.]

Ellenőrizzük még, teljesül-e, hogy *x ≤ s*, azaz:



Ez automatikusan nem teljesül; ez azt jelenti, hogy ha nem tudunk ennyivel gyorsabban futni, mint úszni, akkor is végig úszni kell.

Analógia a Snellius-Descartes-törvénnyel súrló beesés esetén: a *dt/dx = 0* kifejezésből látható,

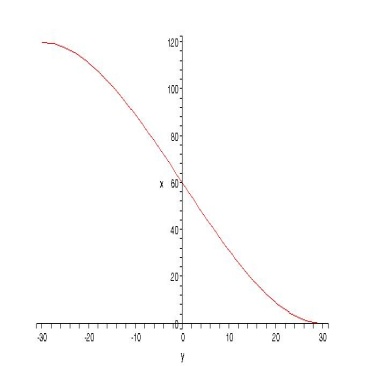
hogy  ( a teljes visszaverődés határszöge)

|  |  |
| --- | --- |
| **2/12.** Egy csónak L szélességű folyón halad át a folyóra merőlegesen a vízhez képest állandó v sebességgel. A folyó vizének sebességeloszlása parabolikus:  **a)** Határozzuk meg a csónak pályájának egyenletét!  **b)** Mennyivel viszi le a víz a csónakot, míg az egyik partról a másikra ér? | y  x  u0  0  L |

**MO.**

**a)** A csónak eredő sebessége mindig a pálya érintőjének irányába mutat.

*u = dx/dt* és *v = dy/dt* → *(dy/dt) / (dx/dt) = v / u = dy / dx* a pálya érintője.

*u* függ *y*-tól, tehát az alábbi differenciálegyenletet kell megoldanunk, hogy a pálya egyenletét *y(x)* avagy *x(y)* alakban megkapjuk:

.

Szeparáljuk és integráljuk:

→

a pálya egyenlete.

Vagy:

és tudjuk, hogy x = 0 –nál y = –L/2:

vagyis és .

**b)** A csónak átér, ha *y = L/2*, ezt behelyettesítve .

**2/13.** A és B város 84 km-re vannak egymástól. Két biciklis elindul egy időben, az egyikük A-ból B-be 16 km/h, a másik B-ből A-ba 12 km/h sebességgel. Egy fecske is elindul velük egy időben A városból B város felé, de amikor találkozik a B-ből jövő biciklissel, visszafordul A felé, majd amikor találkozik az A-ból jövő biciklissel, visszafordul B felé, és így tovább. Mekkora utat tesz meg a fecske a biciklisták találkozásáig? A fecske sebessége 50 km/h óra, és egy szempillantás alatt meg tud fordulni.

**MO.** A megoldást nem úgy keressük, hogy a fecske és az egyik ill. másik biciklista találkozásának helyét és idejét számoljuk ki és a fecske által megtett utakat összegezzük, hanem a két biciklista találkozásáig eltelt összes időt számoljuk ki, mert a fecske addig végig repül, így az idő ismeretében az általa megtett út könnyebben kiszámolható.

A találkozásig eltelt idő

- az egyik biciklistához rögzített koordinátarendszerben: mivel a biciklisták egymással szembe haladnak, a másik biciklista sebessége az origóban lévőhöz képest 16+12 = 28 km/h, kezdetben a távolság köztük 84 km,   
tehát t = 84 / 28 = 3 h.

- az úthoz rögzített koordinátarendszerben: az origó A városban van, az onnan induló biciklista koordinátája x1 = 16 t , a B városból indulóé pedig x2 = 84 – 12 t. Találkozáskor x1 = x2: 16 t = 84 – 12 t → t = 3 h.

A fecske által megtett út s = 3 · 50 = 150 km.

**2/14.** Egy villamosvonalon a villamosok T időközönként járnak c sebességgel. A pálya mellett gépkocsi halad v sebességgel. Mennyi időközönként találkozik a gépkocsi villamosokkal?

**MO.** Írjuk fel egy villamoshoz rögzített koordinátarendszerben az autó sebességét:

ha az autó és a villamosok ellenkező irányba mennek: vrel = v + c

ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és v > c: vrel = v – c

ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és v < c: vrel = c – v

A villamosok távolsága egymástól d = c · T ,

ekkora távolságot kell megtenni az autónak, tehát az ehhez szükséges idő

t = c · T / (v + c), ha az autó és a villamosok ellenkező irányba mennek,

t = c · T / (v – c), ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és v > c, és

t = c · T / (c – v), ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és v < c .

**2/15.** Lelépjük egy szekér hosszát menet közben: a szekérrel egy irányba menve ’a’ lépésnek mérjük, szembe menve pedig ’b’ lépésnek mérjük. Milyen hosszú a szekér?

**MO.** A szekér sebessége vsz, az emberé ve.

Ha egy irányba mennek, akkor t1 idő alatt ér el az ember a szekér végétől a szekér elejéig, ezalatt

vet1 = a (1) lépést tesz meg, és vet1 = vszt1 + L (2)

Ha szembe mennek, akkor a t2 idő alatt jut el az ember a szekér elejétől a végéhez, ezalatt

vet2 = b (3) lépést tesz meg, és (ve+vsz) t2 = L (4)

Ez 4 egyenlet 5 ismeretlennel, ügyesen kell rendezgetni. Pl. (1)-et behelyettesítve (2)-be vszt1 = a – L , másrészt (3)-at behelyettesítve (4)-be vszt2 = L – b , és a két egyenletet elosztva t1/t2 = (a–L)/(L–b). Ugyanakkor (1)-et elosztva (2)-vel t1/t2 = a/b. Ezeket összevetve (a–L)/(L–b) = a/b, amiből

**2/16.** Folyóvíz sebessége 3 m/s, és van egy csónakunk, ami a vízhez képest 4 m/s sebességgel tud menni. Mekkora legyen a folyó sodrával bezárt szög, ha

**a)** a legrövidebb idő alatt;

**b)** a legrövidebb úton szeretnénk átérni a túlpartra?

|  |  |
| --- | --- |
| **MO. a)** A csónak orra mutasson a túlsó part felé,  azaz  = 90°.  y  x  vcs  0  L  vf  ve  **** | **b)** A csónak eredő sebessége legyen merőleges a folyó sodrára, azaz a  = 138,6°.  y  x  vcs  0  L  vf  ve  **** |