

2. MECHANIKA

Periodikus mozgások: körmozgás, rezgések, lengések

A mérés célja

A címben szereplő mozgásokat mindennapi tapasztalatainkból jól ismerjük, és korábbi tanulmányainkban is foglalkoztunk velük. Ezt figyelembe véve ennek a mérési gyakorlatnak kettős célja van. Egyrészt az, hogy ezeket a mozgásokat kísérletileg tanulmányozva még több közvetlen tapasztalatot szerezzünk róluk. Másrészt viszont ez a mérés arra is lehetőséget teremt, hogy átismételjük a mechanika néhány fogalmát és módszerét, pl. azt, hogy miként nyerhető és mit is jelent MOZGÁSEGYENLET.

1. Elméleti bevezető

Hossz- és időmérés. Változás és változási sebesség

A hosszúságmérésnél a mérőszalagot (amelyen egyenletes beosztás van) a kérdéses tárgy mellé fektetve állapítjuk meg annak a hosszát. Az időméréshez valamilyen periodikus jelenségre van szükségünk (pl. ingamozgás, kvarckristály vagy ammónia molekula rezgése), amelynél feltételezhető, hogy mindegyik periódus egyforma módon zajlik le. Egy jelenség kezdete és vége között eltelt idő alatt tulajdonképpen azt értjük, hogy az óráként használt periodikus jelenség hányszor zajlott le a kiindulási és a végállapot között. A másodperc a földi átlagnap (a Föld forgása is periodikus jelenség, tehát óráként használható) 86400-ad részeként lett kezdetben meghatározva, de most már vannak ennél sokkal pontosabb etalonjaink is (jelenleg ez a cézium 133-as izotópjával működő atomóra).

Tekintsünk valamilyen M mennyiséget, amelyet mérni tudunk, és amely az időben változik. (M lehet pl. a hőmérséklet, egy kémiai komponens koncentrációja, egy növekvő élesztősejt tömege, avagy egy mozgó pont távolsága az origótól, szóval bármi). Vizsgálataink kezdetén a mért mennyiség értékét jelöljük M_1 -el, a vizsgálat egy későbbi időpontjában M_2 -vel. Ekkor az M megváltozása alatt az alábbi különbséget értjük:

$$\Delta M = M_2 - M_1.$$

Sokszor azt is számításba akarjuk venni, hogy a változás milyen gyors, azaz hogy adott megváltozás mennyi idő alatt jött létre. Ilyenkor a megváltozást elosztjuk a hozzá szükséges idővel, így kapjuk az átlagos *változási sebességet*:

$$V_{\text{ÁTLAG}} = \Delta M / \Delta t,$$

ahol Δt a megváltozás létrejöttéhez szükséges idő. (Látható, hogy ebben a hányadosban az idő ugyanolyan fontos szerepet játszik, mint a megváltozás. Hiába nagy a megváltozás, ha ez hosszú időbe telik, akkor a változási sebesség kicsi lesz, jelezve, hogy lassú folyamatról van szó.)

Gyakran van szükség a *pillanatnyi változási sebességre* is. Ezt az átlagsebességből kiindulva úgy közelíthetjük, hogy a Δt időt egyre kisebbre választjuk, határértékben nullának:

$$V_{\text{PILLANATNYI}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{dM}{dt}.$$

A kinematikában gyakran használt fogalom a (pillanatnyi) sebesség. Ez egy dimenzióban –pl. az x tengely mentén– mozgó pont esetén nem más, mint az x koordináta pillanatnyi változási sebessége, azaz deriváltja:

$$v = dx/dt.$$

A sebesség is változhat, ennek a változási sebességét nevezzük *gyorsulásnak*:

$$a = dv/dt = d^2x/dt^2.$$

Ha tehát meg van adva az $x = x(t)$ függvény, akkor ebből deriválással nyerhető a $v = v(t)$ függvény, amiből pedig újabb deriválással az $a = a(t)$ függvény.

Általános esetben, ha ismert a helyvektor az idő függvényében, azaz az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ függvény, annak deriválásával kapható a sebességvektor és a gyorsulásvektor időfüggése: $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$.

1.1. Körmozgás

Itt most csak az *egyenletes* körmozgással foglalkozunk. Kinematikai leírással élve egy anyagi pontnak olyan síkmozgásáról van szó, amely egy R sugarú körön történik, mégpedig úgy, hogy eközben sem ennek a körnek a sugara, sem pedig a mozgás szögsebessége nem változik. Ha a mozgást pl. az x - y síkban tárgyaljuk, és az α szög alatt a helyvektornak az x tengellyel bezárt (időben változó) szögét értjük, akkor az ω szögsebesség (az α szög változási sebessége) értelemszerűen:

$$\omega = d\alpha/dt.$$

Korábbi tanulmányainkból azt is tudjuk, hogy az egyenletes körmozgás is gyorsuló mozgás, mert bár a sebesség abszolút értéke nem, annak iránya állandóan változik. A gyorsulás a kör középpontja felé mutat (centripetális gyorsulás), nagysága pedig

$$a_{cp} = R \cdot \omega^2.$$

Dinamikai szempontból ebből az következik, hogy amennyiben egy m tömegű pont kering ezen a körpályán, akkor ez csak úgy valósulhat meg, ha a tömegpontra egy F_{cp} centripetális (állandóan a kör középpontja felé irányuló) erő hat, aholis

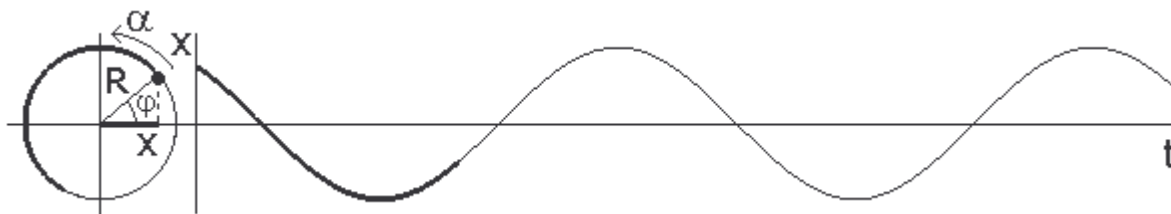
$$F_{cp} = m \cdot a_{cp}.$$

Amennyiben egy bolygó körpályán kering a Nap körül (a Föld pályája közel ilyen), akkor a centripetális erő a Nap által kifejtett tömegvonzás. [Megjegyezzük, hogy a centripetális erő kifejezést kifejezetten körmozgással kapcsolatban szokás használni. A bolygók mozgása természetesen mindig olyan erő hatására jön létre, amelyik a Nap mint vonzó centrum felé irányul. Ilyen centrális erő hatására azonban nemcsak körpályán, hanem ellipszis, sőt parabola, avagy hiperbola pályán is mozoghat egy anyagi pont. A centripetális erő tehát az általános értelemben vett centrális erőnek az a speciális esete, amikor éppen körmozgás valósul meg.]

1.2. A harmonikus rezgőmozgás

1.2.1. A harmonikus rezgőmozgás mint a körmozgás vetülete

Középiskolából tudjuk, hogy a harmonikus rezgőmozgás az egyenletes körmozgás vetületének fogható fel. Ez kinematikai szempontból teljesen kielégítő magyarázat, hiszen tulajdonképpen csak annyit mond, hogy a vetület mozgását ezentúl harmonikus rezgőmozgásnak fogjuk nevezni. Azt a kérdést azonban, hogy egy rugóra felfüggesztett tömegpont miért végez éppen ilyen mozgást, nemigen firtattuk. Mielőtt azonban erre a kérdésre rátérnénk, ismételjük át röviden a harmonikus rezgőmozgás kinematikai leírását. A körmozgás pályája legyen az x - y síkban elhelyezkedő R sugarú kör. A kör középpontja legyen az origó. Ezen a pályán állandó ω szögsebességgel mozogjon egy m tömegű anyagi pont:



2.1. ábra. Egyenletes körmozgás és vetülete
(Vegyük észre, hogy az x tengely 90° -kal el van forgatva az ábrán!)

Ez azt jelenti, hogy amennyiben a helyvektornak az x tengellyel bezárt szögét α -val jelöljük, akkor ez a szög egyenletes körmozgás esetén az idővel arányosan nő:

$$\alpha = \omega \cdot t + \varphi,$$

ahol φ az α szög értéke a $t = 0$ időpillanatban. A helyvektor x és y komponense ennek megfelelően:

$$x(t) = R \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$y(t) = R \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Tekintsük most az x tengelyen vett vetület mozgását, az R sugárra utaló jelölést pedig váltsuk fel az A jelöléssel, ami a harmonikus rezgőmozgás *amplitúdója* lesz. Így tehát

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi),$$

ami valóban a harmonikus rezgőmozgás jól ismert egyenlete. ω itt a harmonikus rezgőmozgás *körfrekvenciáját* jelöli.

1.2.2. A harmonikus rezgőmozgás sebessége és gyorsulása

Tudjuk, hogy a mozgás sebessége a helyvektor idő szerinti deriváltja. Jelen esetben a 'v' sebességet az x komponens idő szerinti deriválásával kaphatjuk meg:

$$v(t) = dx/dt = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi).$$

Továbbá, az 'a' gyorsulás a 'v' sebesség deriválásával nyerhető, azaz az x második deriváltjaként:

$$a(t) = dv/dt = d^2x/dt^2 = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi).$$

1.2.3. Összefüggés a harmonikus rezgőmozgás 'a' gyorsulása és 'x' kitérése között.

Most az 'a' gyorsulást írjuk az alábbi formába:

$$a = d^2x/dt^2 = -\omega^2 \cdot [A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)].$$

Jól látható, hogy a szögletes zárójelen belül szereplő mennyiség éppen az x. Vagyis felírható, hogy

$$a = -\omega^2 \cdot x, \quad \text{avagy} \quad d^2x/dt^2 = -\omega^2 \cdot x.$$

1.2.4. Dinamika. A harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete

Szorozzuk meg az előző egyenlet mindkét oldalát a mozgó pont tömegével:

$$m \cdot a = -\omega^2 \cdot m \cdot x.$$

Ha ezek után a dinamika második axiómájának felhasználásával az 'm·a' szorzat helyébe az F erőt írjuk, valamint az egy adott mozgás során állandó ' $\omega^2 \cdot m$ ' helyébe egy másik állandót írunk, amit k-val jelölünk, akkor arra az erőre, ami a harmonikus rezgőmozgást létrehozza, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$F = -k \cdot x,$$

ami nem más, mint a *rugalmas erő erőtvénye*, amennyiben x a rugó *deformációja*. A visszahúzó erő nagysága ugyanis egy ideális rugónál arányos a deformációjával, és avval ellentétes irányú, éppen úgy, ahogy a fenti formula mutatja. Látható tehát, hogy a rugóerő valóban harmonikus rezgőmozgást hoz létre.

Dinamika. Mozgásegyenlet

A mechanikai feladatok szisztematikus megoldásánál azonban általában fordítva merül fel a probléma, tehát nem egy mozgáshoz keresünk erőtvényt, hanem fordítva: adva van egy erőtvény, és a kérdés az, hogy az milyen mozgást hoz létre. Ebben az esetben tehát ismerjük az erőtvényt, ami egy olyan kifejezés, amely megmondja, hogy az erő miként függ a helytől, a sebességtől és az időtől. Tehát általánosan az erőtvény az alábbi alakban adható meg:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt, t).$$

Ezután ezt az erőtvényt beírjuk Newton második axiómájába:

$$m \cdot d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{F}(\mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt, t).$$

A fenti egyenletet nevezzük a mozgás **MOZGÁSEGYENLETÉNEK**, ami a kezdőfeltételeken kívül mindent elmond az adott erőtvénynek engedelmeskedő mozgásokról.

1.2.5. A mozgásegyenlet megoldása rugalmas erő esetén

A mozgásegyenlet megoldása néha bonyolult lehet, mivel az nem algebrai, hanem differenciálegyenlet. Míg egy algebrai egyenlet megoldása az egyenlet gyökének vagy gyökeinek megtalálását jelenti, a differenciálegyenlet megoldása egy függvény. A differenciálegyenletek ugyanis a függvényegyenletek osztályába tartoznak, vagyis nem egy ismeretlen x értéket, hanem egy $x = x(t)$ ismeretlen függvényt keresünk.

A fentiekben a harmonikus rezgőmozgás egyenletéből, az $x(t)$ függvényből jutottunk el a mozgásegyenlethez. Járjuk be most a fenti utat fordítva, azaz írjuk fel először a harmonikus

rezgőmozgás mozgásegyenletét, majd keressük meg annak a megoldását! A mozgásegyenlet rugalmas erő esetén:

$$m \cdot d^2x/dt^2 = -k \cdot x.$$

Ha a tömeggel osztunk, és az egy adott rugó és tömeg esetén állandó k/m arányt ω^2 -el jelöljük, akkor a fenti differenciálegyenlet a következő alakba írható:

$$d^2x/dt^2 = -\omega^2 \cdot x,$$

amelynek a megoldását viszont már jól ismerjük:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi).$$

Tehát adott m tömeg és k rugóállandó esetén mindig olyan harmonikus rezgőmozgás fog létrejönni, amelynek körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{k/m}.$$

Az egyes konkrét mozgások azonban különböznek az A amplitúdó és a φ kezdőfázis szerint. Ezeket az ún. integrációs állandókat a kezdeti feltételek szabják meg:

$$\varphi = \arctg\left(-\frac{v_0}{\omega \cdot x_0}\right), \quad A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2},$$

ahol x_0 a kezdeti kitérés és v_0 a kezdősebesség.

Szorgalmi feladat: vezessük le a fenti két összefüggést!

A differenciálegyenletek szerepe a mechanikában. Megoldásuk módszerei

Mint látjuk, a mechanikában központi szerepet játszik a mozgásegyenlet, amely egy másodrendű differenciálegyenlet, és amelynek a megoldása a mozgó pont helye mint az idő függvénye. Fontos tehát, hogy valamit tudjunk a differenciálegyenletekről és megoldásukról.

A differenciálegyenletek analitikus megoldását gyakran nem kalkulációs algoritmusokkal nyerik, hanem intuitíve „megsejtik”. Ezután a sejtett megoldást –esetünkben ez az $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ függvény– behelyettesítik a differenciálegyenletbe –ami nálunk a $d^2x/dt^2 = -\omega^2 \cdot x$ egyenlet–, és utána megállapítják, hogy a megsejtett függvény valóban kielégíti a differenciálegyenletet. Esetünkben ez az ellenőrzés két egymást követő deriválást igényel, semmi többet, és ezt már korábban tárgyaltunk is. A jelen méréshez elég ennyit tudni a differenciálegyenletekről.

Az érdeklődő olvasóban esetleg felmerülhetnek további kérdések, amelyek közül kettőre talán érdemes kitérni. Az egyik: nem lehetséges-e az, hogy az $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ függvény mellett találhatók még más függvények is, amelyek ugyan nem ilyen alakúak, de mégis kielégítik a differenciálegyenletet? (Ez az ún. unicitás problémája.) Csak a választ közöljük: nincsenek ilyen függvények. A másik gyakori kérdés, hogy mindig ilyen egyszerű-e egy differenciálegyenlet megoldása? A válasz: nem. Sőt egyáltalán nem biztos, hogy a megoldás analitikus függvényként zárt alakban felírható. A numerikus megoldás azonban minden esetben lehetséges.

1.3. Csillapított rezgőmozgás

A csillapított rezgőmozgás esetén az erőtvénny:

$$F = F(x, dx/dt, t) = -k \cdot x - c \cdot dx/dt,$$

vagyis itt a szokásos rugóerő mellett egy a sebességgel arányos, de avval ellentétes irányú *súrlódási erő* is fellép. (Ez olyasmi erőnek felel meg, mint amikor viszkózus folyadékban mozog egy test. A valóságban persze másfajta súrlódási erők is felléphetnek, de azok esetében a mozgásegyenlet ún. nemlineáris differenciálegyenlet lenne, melynek a megoldása körülményesebb. Pl. a közegellenállás általában a sebesség négyzetétől függ. E helyett a fenti formulában a sebességtől lineárisan függ a súrlódási erő.) A mozgásegyenlet tehát:

$$m \cdot d^2x/dt^2 = -k \cdot x - c \cdot dx/dt.$$

Ha ezt végigosztjuk m -el, az alábbi differenciálegyenletet nyerjük:

$$d^2x/dt^2 = -(\omega_0)^2 \cdot x - 2\beta \cdot dx/dt,$$

ahol $(\omega_0)^2 = k/m$ és $2\beta = c/m$.

Ezután vegyük elő a differenciálegyenletek megoldásának előbb említett módszerét, a megsejtést. Láttuk, hogy a csillapítatlan rezgőmozgás a körmozgás vetületének fogható fel. A csillapított rezgőmozgás esetén a rezgés amplitúdója fokozatosan csökken. Jelen esetben a

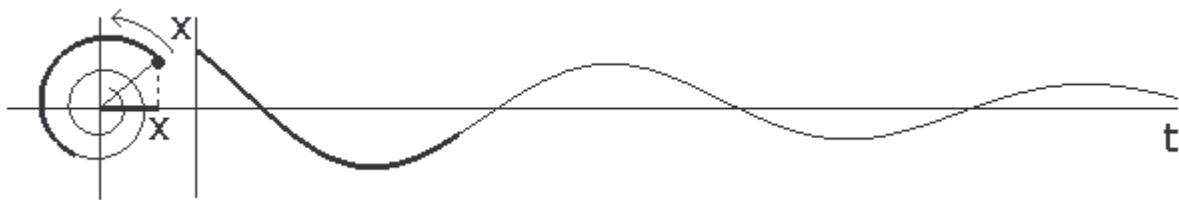
megoldás tehát esetleg felfogható lenne egy olyan egyenletes körmozgás vetületeként, ahol a szögsebesség állandó, de a körmozgás r sugara folyamatosan csökken. Ha gondolatmenetünk helyes, akkor lehet találni olyan monoton csökkenő $r(t)$ függvényt, amelynek vetülete helyesen leírja a csillapodó rezgőmozgást. Kísérletezzünk avval az egyszerű esettel, amikor az r sugár csökkenési sebessége a sugár nagyságától lineárisan függ (vagyis minél nagyobb a sugár, annál gyorsabb a csökkenés):

$$dr/dt = -\beta \cdot r.$$

(Az, hogy az itt szereplő állandó és a differenciálegyenletben szereplő β ugyanaz, természetesen nem következik az eddigiekből, de később majd belátjuk, hogy ez a helyes választás.) Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása

$$r = r_0 \cdot e^{-\beta \cdot t},$$

ahogy arról behelyettesítéssel meggyőződhetünk. (r_0 a kezdeti sugár.) Az egyenletes körmozgás és a sugár mentén befelé irányuló mozgás eredőjeként létrejövő ún. logaritmikus spirál pályája a következő ábrán látható:



2.2. ábra. Csillapított rezgőmozgás mint a logaritmikus spirál vetülete
(Vegyük észre, hogy az x tengely 90° -kal el van forgatva az ábrán!)

Ha a mozgás vetületét tekintjük, akkor a csillapított rezgőmozgás differenciálegyenletének megoldását az alábbi alakban kereshetjük:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi).$$

A_0 és φ értékét a kezdeti feltételek határozzák meg.

Ha ezt behelyettesítjük a differenciálegyenletbe (gyakorlásként tegyük meg!), akkor látni fogjuk, hogy sejtésünk valóban kielégíti a differenciálegyenletet, feltéve, hogy ω megfelel az alábbi relációnak:

$$(\omega_0)^2 = \omega^2 + \beta^2.$$

Vagyis csillapítással a rezgőmozgás ω körfrekvenciája kisebb, mint a csillapítatlan rezgőmozgás ω_0 körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Ha a csillapítás igen nagy, azaz $\beta \geq \omega_0$, akkor a mozgás *aperiodikus*sá válik. Az ilyen aperiodikus mozgásokkal azonban itt nem foglalkozunk, mivel a kísérleteinkben a csillapítás ennél jóval kisebb.

1.4. Matematikai inga

A matematikai inga mozgásegyenlete, figyelembe véve, hogy a tangenciális gyorsulás $a_t = L \cdot d^2\alpha/dt^2$, valamint hogy a szöggyorsulás és a szög ellenkező irányú:

$$M \cdot L \cdot d^2\alpha/dt^2 = -M \cdot g \cdot \sin\alpha.$$

Egyszerűsítések után az alábbi nemlineáris differenciálegyenletet nyerjük:

$$d^2\alpha/dt^2 = -(g/L) \cdot \sin\alpha.$$

Ezt a nemlineáris differenciálegyenletet nehéz megoldani. Alkalmazhatjuk azonban az alábbi közelítést:

$$\sin\alpha \approx \alpha,$$

ami 5° -nál 0,05 %, 22° -nál 1 %, 90° -nál azonban már 18 % eltérést okoz.

Így a csillapítatlan harmonikus rezgőmozgás már ismert mozgásegyenletéhez jutunk:

$$d^2\alpha/dt^2 = -\omega^2 \cdot \alpha,$$

ahol $\omega^2 = g/L$,

azaz az inga lengésideje $T = 2\pi \cdot \sqrt{L/g}$.

1.5. Torziós inga

Merev test rögzített tengely körüli forgó mozgása esetén az impulzusmomentum tétele az alábbi formába írható

$$M = \theta \cdot \beta,$$

ahol M a forgatónyomaték, θ a tehetetlenségi nyomaték, β pedig a szöggyorsulás:

$$\beta = d^2\alpha/dt^2$$

A rugót torziós szálként is felfoghatjuk, melyre igaz, hogy a forgatónyomaték (amely vissza akarja állítani az elcsavarás előtti állapotot) nagysága arányos a szögelfordulással, és ellentétes irányú avval, azaz

$$M = -D \cdot \alpha,$$

ahol D egy arányossági tényező (számértékileg az 1 radián szögelforduláshoz tartozó forgatónyomaték), melynek neve direkciós vagy irányító nyomaték. Ha az impulzusmomentum-tételbe beírjuk a fenti „nyomaték törvényt” (ami az erőtvény analogonja), akkor megkapjuk a torziós inga mozgásegyenletét:

$$\theta \cdot d^2\alpha/dt^2 = -D \cdot \alpha,$$

Ez a differenciálegyenlet a

$$D/\theta = \omega^2$$

jelöléssel az ismert alakba írható:

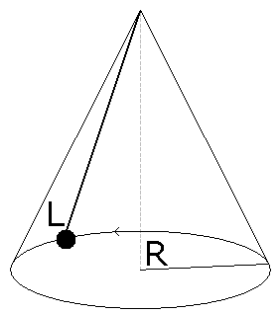
$$d^2\alpha/dt^2 = -\omega^2 \cdot \alpha,$$

amely differenciálegyenletnek a szögre nézve harmonikus rezgő (pontosabban mondva forgó) - mozgás az ismert megoldása:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi).$$

2. Mérések

2.1. Kúpinga



2.3. ábra. Kúpinga

Tisztán ezt a mozgást nehéz létrehozni, ezért ezt csak kvalitatíve vizsgáljuk meg.

Eszközök:

- damilra kötött anyacsavar
- stopper
- mérőszalag

Mérési feladatok:

2.1.1. Vizsgáljuk meg kísérletileg, miért okoz problémát, hogy pontosan egy kúpfelületen mozogjon a kötél! A kísérletet két hallgató végezze: az egyik tartsa az ingát, a másik próbálja meg mozgásba hozni.

2.1.2. A kúpíngák keringési ideje

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{L^2 - R^2}}{g}},$$

ahol L az inga hossza, R a kör sugara, melyen a tömegpont kering (a kúp alaplapijának a sugara), g pedig a nehézségi gyorsulás ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$). A formula szerint a **nagyobb** körön keringő kúpíngák **hamarabb** járja be ezt a nagyobb kört, mint a kisebb sugáron keringő. Vizsgáljuk meg mérésekkel, hogy igaz-e ez a reláció? Ismét két hallgató végezze a mérést: az egyik pörgesse a kúpíngát kicsi ill. nagy sugarú körön, a másik pedig végezze az időmérést! Mindkét esetben a 10 kör megtételéhez szükséges időt mérjük meg.

Kiértékelés:

2.1.1. Vezessük le a kúpíngák keringési idejét leíró formulát!

Segítség: számítsuk ki a centripetális gyorsulást. Ez esetben a kötélerő és a nehézségi erő eredője lesz a centripetális erő.

2.1.2. A 10 kör megtételéhez szükséges időkből számoljuk ki a periódusidőket, majd a formula segítségével a kisebb ill. nagyobb kör sugarát.

2.2. Harmonikus rezgőmozgás. Csillapított rezgőmozgás.

Az elméleti részben a harmonikus és csillapított rezgőmozgás tárgyalásánál nem vettük figyelembe a gravitáció hatását, a kísérleti elrendezésnél azonban számolni kell azzal is.

Nézzünk egy rugóra felfüggesztett tömegpontot. Jelölje y az m tömegpont helyzetét a felfüggesztési ponttól mérve, és L a rugó hosszát; ekkor az m tömeg mozgásegyenlete az alábbi alakú lesz:

$$m \cdot d^2y/dt^2 = -k \cdot (y - L) + mg - c \cdot dy/dt.$$

Ez az egyenlet első pillantásra nem a csillapított rezgőmozgásnál megszokott mozgásegyenlet, de rögtön be fogjuk mutatni, hogy olyan alakúra transzformálható.

A fenti rendszer egyensúlyi pontja az a pont, ahol a rugóerő és a nehézségi erő kompenzálja egymást, és ezért itt a tömegpontnak nincs gyorsulása ($d^2y/dt^2 = 0$), valamint ahol a tömegpont ott is marad, amennyiben nincsen sebessége ($dy/dt = 0$). Ezeket a feltételeket a mozgásegyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy a kérdéses egyensúlyi pont y koordinátája

$$y_E = L + mg/k.$$

Ezek után vezessünk be egy új x változót, amely azt mutatja meg, hogy a tömegpont milyen távol van ettől az egyensúlyi ponttól:

$$x = y - y_E = y - (L + mg/k).$$

A régi y változó az új x változóval kifejezve:

$$y = x + L + mg/k.$$

Ha ezt behelyettesítjük a mozgásegyenletbe, és figyelembe vesszük, hogy az új és régi változó időderiváltjai megegyeznek (hiszen L és mg/k időtől független állandók), akkor az új mozgásegyenlet a megszokott

$$m \cdot d^2x/dt^2 = -k \cdot x - c \cdot dx/dt$$

alakot ölti. Tehát a nehézségi erő módosítja ugyan az egyensúlyi helyzetet, de más hatása nincs a harmonikus rezgőmozgásra; valamint a rugó L hossza sem játszik közvetlen szerepet. (Közvetett szerepe azonban van, mert az ugyanolyan minőségű, de $2L$ hosszúságú rugó rugóállandója fele

akkora lesz, mint az L hosszúságú rugóé. Gondoljuk át, hogy miért? Ha nem találjuk a választ, akkor kérdezzük meg erről a mérés vezetőjét!)

Eszközök:

- állvány, mm-es leolvasásra alkalmas skálával
- rugó
- anyacsavarok mint ismert tömegek
- PVC rúd, amire a tömegeket tesszük
- ismeretlen tömeg
- stopper
- elektronikus mérleg

Mérési feladatok:

2.2.1. A rugó 'k' rugóállandójának meghatározása:

Különböző terhelések mellett olvassuk le a rugó legalsó pontjának a pozícióját. Végezzük el a mérést a PVC rúd nélkül, majd az üres PVC rúddal, végül 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 és 16 anyacsavarral terhelve! Mérjük meg a PVC rúd tömegét a mérlegen.

2.2.2. Tegyük a PVC rúdra az ismeretlen tömeget (anyacsavarok most ne legyenek a rúdon), és olvassuk le a rugó legalsó pontjának pozícióját!

2.2.3. Rakjunk a PVC rúdra 5, 10, majd 15 anyacsavart, hozzuk rezgésbe a rugót, és mérjük meg a periódusidőt! (10 rezgés idejét mérjük meg!)

2.2.4. Szorgalmi feladat: Végezzük el a 2.2.3. mérést az ismeretlen tömeggel is!

2.2.5. Szorgalmi feladat: Mérjük meg a 2 csavaros és a 20 csavaros terhelésnél is, hogy kb. mennyi idő alatt csökken a felére a rezgés amplitúdója! (Kvalitatív mérés: csak azt figyeljük meg, hogy melyik csillapodik gyorsabban!)

Kiértékelés:

2.2.1. Ábrázoljuk a rugó legalsó pontjának pozícióját a csavarszám függvényében, és számítsuk ki a rugó 'k' rugóállandóját!

2.2.2. Számoljuk ki az ismeretlen tömeget!

Szorgalmi feladat: Számítsuk ki a tömegmérés hibáját, abból kiindulva, hogy a leolvasás hibája 1 mm!

2.2.3. Számoljuk ki a rezgőmozgás periódusidejét 5, 10, ill. 15 csavarnak megfelelő tömeggel, és hasonlítsuk össze a mért értékekkel!

2.2.4. Szorgalmi feladat: Az ismeretlen tömeggel mért periódusidőből számoljuk ki az ismeretlen tömeget!

2.2.5. Szorgalmi feladat: Magyarázzuk meg az eredményt!

2.3. Matematikai inga

Eszközök:

- állvány
- damilra kötött anyacsavar
- mérőszalag
- stopper

Mérési feladatok:

2.3.1. Mérjük meg az inga hosszát. Mérjük meg az inga lengésidejét kis kitérések esetén. 10 lengés idejét mérjük! Ismételjük meg a mérést ötször.

2.3.2. Ellenőrizzük, hogy kis kitérések esetén a lengésidő független az amplitúdótól, míg igen nagy (közel 90°-os) kitérések esetén a lengésidő valóban nagyobb!

Kiértékelés:

2.3.1. Számoljuk ki a lengésidőt, és a lengésidő hibáját 95 %-os konfidenciaszinten!

A lengésidőből számítsuk ki a g értékét!

Számoljuk ki, mekkora hibával tudjuk meghatározni g értékét, ha feltételezzük, hogy a hosszmérés hibája 2 mm!

2.4. Torziós inga (szorgalmi feladat)

Eszközök:

- állvány
- rugó
- hengeres műanyag doboz
- textilbakelit korongok
- stopper
- mérőszalag
- elektronikus mérleg

Mérési feladatok:

Mérjük meg a rugóból és annak a végéhez erősített hengeres műanyag dobozból álló torziós inga lengésidejét!

Mérjük meg a lengésidőt úgy is, hogy a doboz aljához a) egy, b) kettő darab textilbakelit korongot erősítünk.

Mérjük meg a korongok tömegét elektronikus mérleggel, a sugarát pedig mérőszalaggal.

Kiértékelés:

Számoljuk ki a korongok tehetetlenségi nyomatékát!

(Korong tehetetlenségi nyomatéka a $\Theta = \frac{1}{2} M \cdot R^2$ formulával számolható.)

Számítsuk ki a doboznak a forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

Kérdések, gyakorló feladatok

Igaz-e, hogy*

- az egyenletes körmozgást végző tömegpontra ható erők eredője mindig a kör középpontja felé mutat?
- egy pontos rugós erőmérő rugójának a hossza bizonyos határokon belül arányos a rá ható erővel?
- egy rugós erőmérővel nem csak sztatikai erő-, hanem sztatikai tömegmérést is lehet végezni?
- egy körmozgás vetülete egy olyan síkra, amely merőleges a kör síkjára mindig harmonikus rezgőmozgásnak tekinthető?
- egy harmonikus rezgőmozgás periódusideje független a rezgés amplitúdójától?
- a rugóállandót kétszeresére növelve, a rugó végén lévő tömegpont tömegét pedig felére csökkentve harmonikus rezgőmozgás esetén a periódusidő is a felére csökken?
- ingamozgásnál a lengésidő erősen függ a kitéréstől?
- ingamozgásnál a lengésidő egyenesen arányos az inga hosszával?
- körmozgást végző tömegpontra ható erők eredője mindig a kör középpontja felé mutat?
- harmonikus rezgőmozgásnál a rezgésidő az amplitúdó négyzetgyökével egyenesen arányos?
- ha van két egyforma hosszú és egyforma k_1 rugóállandójú rugónk és az egyiket a másik végéhez toldjuk, akkor az így kapott rugó k rugóállandója az egyes rugókénak kétszerese lesz ($k = 2 k_1$)?
- kúpinga periódusideje csak a kötélnak a függőlegessel bezárt szögétől függ, a kötel hosszától nem?

**A válaszokhoz indoklást is kérünk!*

Mit értünk sztatikai erő- és tömegmérés alatt?

Mit értünk dinamikai erő- és tömegmérés alatt?

Szabad vagy kényszermozgásról van szó a kúpinga esetében? Indokoljuk a választ!

M1) Kúpinga hossza 1 m, a függőlegessel bezárt szöge 60° . Mekkora a körpályán keringő test tömege, ha a fonálerő 10 N ? ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)

Megoldás:

$$mg / F_{\text{fonál}} = \cos 60^\circ \Rightarrow m = 0,51 \text{ kg}$$

M2) Egy modellrepülőt $L = 10 \text{ m}$ hosszúságú fonálon körpályán reptetnek úgy, hogy a fonál másik vége egy pózna végéhez van erősítve. A gépet tekintsük egy tömegpontnak, amely minden körülmények között egy vízszintes síkban kering, de ennek a síknak a helyzete függeni fog a gép sebességétől.

a) Mennyi a repülőgép sebessége, ha a fonálnak a függőlegessel bezárt szöge $\alpha = 45^\circ$?

(A gép szárnyain keletkező felhajtóerőtől egyelőre tekintsünk el.)

b) A gép szárnyain a $v = v_{\text{KRIT}} = 20 \text{ m/s}$ sebességnél a repülőgép súlyának megfelelő (függőleges irányú) felhajtóerő keletkezik. Adjuk meg a keringési időt ebben az esetben!

c) *A gép szárnyain $v = 2v_{\text{KRIT}} = 40 \text{ m/s}$ sebességnél a gép súlyát 4-szeresen felülmúló (függőleges irányú) felhajtóerő keletkezik. Hány fokkal ($\beta = ?$) emelkedik a gépet tartó fonál a vízszintes fölé ebben az esetben?

Megoldás:

a) $F_{cp} = mg \cdot \tan 45^\circ = ma_{cp}$, $a_{cp} = v^2/r$, $r = L \cdot \sin 45^\circ \Rightarrow v = \sqrt{g \cdot L \cdot \sin 45^\circ} \approx 8,4 \text{ m/s}$

b) mivel a függőleges erők kiegyenlítik egymást, a kötélt vízszintes, $r = L$,

és $\omega = 2\pi/T = v/r \Rightarrow T = 2\pi L/v = \pi \text{ s} \approx 3,14 \text{ s}$

c) $F_{cp} \cdot \tan \beta = 3mg$, $F_{cp} = mv^2/R$, $R = L \cdot \cos \beta \Rightarrow \sin^2 \beta + v^2/(3gL) \cdot \sin \beta - 1 = 0$
 $\Rightarrow \sin \beta = 0,178$, $\beta = 10,3^\circ$

M3) Kísérleteinkhez egyforma k erőállandójú súlytalan rugók és m tömegű csavarok állnak a rendelkezésünkre. Ha egy rugó végére 1 db csavart helyezünk, akkor a mért rezgésidő T .

a) Hányszorosa ennek a T időnek egy olyan rendszer periódusideje, amelyben N darab csavart teszünk a rugó végére?

b) 2 rugót párhuzamosan kötünk egyetlen csavarra (a csavart két rugóval függesztjük fel). Mekkora lesz így a rezgés periódusideje? Indokoljuk a választ!

c) N darab rugót összekötünk úgy, hogy az egyik rugó végét a másik rugó elejébe akasztjuk, azaz egy "rugó lánc" jön így létre. E lánc végére egyetlen csavart teszünk. Mennyivel hosszabb vagy rövidebb ennek a rendszernek a periódusideje, mint az egy rugót és egy csavart tartalmazó rendszeré?

Megoldás:

a) mivel $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, N db esetén $\sqrt{N}$ -szeresére nő

b) a két párhuzamosan kötött rugót egy kétszer akkora rugóállandójú rugónak tekinthetjük, így a periódusidő $\sqrt{2}$ -ed részére csökken

c) az N db egymás után kötött rugót egy olyan rugónak tekinthetjük, melynek rugóállandója N -ed része egy rugóénak, így a periódusidő $\sqrt{N}$ -szeresére nő

M4) Egy 81,5 cm hosszú matematikai inga lengésidőjét 1,800 másodpercnek mértük 1 ms hibával

95 %-os konfidenciaszint mellett.

a) Mekkora nehézségi gyorsulás számítható ebből?

b) Mekkora hibát okoz a nehézségi

gyorsulásban az, hogy a lengésidőt csak 1 ms pontossággal ismerjük? Vajon megmagyarázza ez a mérés hibáját?

(Tudjuk ugyanis, hogy amennyiben a mérés Magyarországon történt, akkor az eredménynek 9,81 m/s^2 körüli értéknek kellene lennie.)

Ha nagyobb az eltérés, mint ami az időmérés hibájából várható, akkor vajon mi okozta azt?

Megoldás:

a) $T = 2\pi\sqrt{\ell/g} \Rightarrow 9,93 \text{ m/s}^2$

b) az időmérés pontatlanságából eredő hiba $|\Delta g| = \left| \frac{\partial(4\pi^2 L/T^2)}{\partial T} \right| = 8\pi^2 L/T^3 \cdot \Delta T = 0,011 \text{ m/s}^2$

ez egy nagyságrenddel kisebb a mért és a valódi érték eltérésénél ($9,93 - 9,81 = 0,12 \text{ m/s}^2$);

a nagy hibát a hosszmérés pontatlansága okozhatta.

M5) Egy rugós erőmérőre csavarokat helyezve azt tapasztaljuk, hogy az első két csavar hatására még nem következik be megnyúlás, és csak 4 csavaros terhelés után tekinthető lineárisnak a terhelő tömeg – megnyúlás diagram. Innentől az erőmérő rugóállandója 5 N/m. 4 csavaros terhelésnél a rugó végének pozíciója 4,4 cm. Most ráfüggesztünk a mérlegünkre egy Túró Rudit és azt tapasztaljuk, hogy a rugó végének pozíciója 10,3 cm-re változott.

a) Mennyi a Túró Rudi tömege?

b) A 4 csavar és a rugó végén levő tartószerkezet tömege együttesen 60 g.

Mennyi a rezgésideje ennek a rendszernek,
és mennyire nő meg ez a Túró Rudi hatására?

Megoldás:

a) $m_{\text{TúróRudi}} \cdot g = k \cdot \Delta \ell \Rightarrow m_{\text{TúróRudi}} = k \cdot \Delta \ell / g = 5 \cdot (10,3 - 4,4) \cdot 10^{-2} / 9,81 = 0,03 \text{ kg} = 3 \text{ dkg}$

b) $m \ddot{x} = -kx \Rightarrow \omega = \sqrt{k/m} = 2\pi/T \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{m/k}$

$m_{\text{4 csavar + tartó}} = 0,06 \text{ kg} \Rightarrow T_1 = 0,688 \text{ s}$

$m_{\text{...+TúróRudi}} = 0,09 \text{ kg} \Rightarrow T_2 = 0,843 \text{ s}$

M6) Mechanika mérésen matematikai inga lengésidejéből számolják ki a hallgatók a nehézségi gyorsulás értékét. Az inga hossza $L = 36 \text{ cm}$, a mért lengésidők

1,24 s 1,24 s 1,25 s 1,22 s 1,24 s 1,25 s

a) Adjuk meg a lengésidőt és hibáját 90 %-os konfidenciaszinten!

b) Adjuk meg az így számított nehézségi gyorsulás értékét és hibáját 90 %-os konfidenciaszinten, ha a hossz mérés hibája 4 mm!

M7) Egy $\ell_0 = 22 \text{ cm}$ hosszú, $k = 4,2 \text{ N/m}$ rugóállandójú rugóra m tömegű testet akasztunk, meghúzzuk lefelé $\Delta \ell = 12 \text{ cm}$ -t, elengedjük, és megmérjük 10 rezgés idejét: $t_{10} = 8 \text{ s}$.

a) Mekkora a rugó végére akasztott test tömege?

b9) Mennyi lenne 10 rezgés ideje, ha kétszer akkora tömeget akasztanánk a rugó végére?
(A rugót kezdetben ugyanannyival húzzuk ki.)

M8) Neil Armstrong a Hold felszínén egy $\ell = 26,0 \text{ cm}$ hosszú matematikai inga lengésidejét 2,50 s-nak mérte.

a) Mekkora nehézségi gyorsulás számítható ebből?

b) Mekkora hibával határozható meg így a holdi nehézségi gyorsulás értéke, ha a lengésidő mérésének pontossága 0,01 s, az inga fonalának hosszát pedig 0,5 cm pontossággal ismerjük?