

1. TÉMAKÖR: KINEMATIKA

1. GYAKORLAT

Információk a tárgyról

A középiskolai fizika tananyag néhány olyan fejezetét nézzük át, amik hasznosak lesznek a későbbi szaktárgyakban. Néhány esetben a középiskolai szintet meghaladó szinten tárgyaljuk az adott témakört, felhasználva azt a matematikatudást, amit középiskolában az után sajátítottak el, miután fizikából az adott témát már lezárták. Egyetemi szintű matematikai ismereteket nem igényel ez a tantárgy.

6 témakör lesz dupla órákkal (vagyis 12 hétre van tananyag). A feladatmegoldások előtt ismertetjük az elméleti hátteret, és kísérleteket is mutatunk be az adott témakörben, részben demonstrációs céllal, de egy-egy kísérletet ki is értékelünk (megmérünk valamit és abból kiszámolunk valamit).

Minden témakörből lesz egy 15 perces kis zh a következő témakör első óráján. A zh-k anyaga a példatár kijelölt szakaszából egy számolási feladat, esetleg még egy tesztkérdés vagy egy rövid elméleti kérdés is. A 6 zh-ból a 4 legjobb zh-t vesszük figyelembe, pótzh nem lesz. Egy-egy zh max. 20 pontos.

A zh-kon kívül minden hallgatónak egyszer a félévben tartania kell egy kb. 5 perces szóbeli beszámolót a táblánál a csoport előtt az adott témakör második órájának az elején egy olyan feladatból, amit az előző héten megkap, és az előző héten elhangzó információk alapján megoldható. Enélkül a félév nem teljesíthető; pótlási lehetőséget biztosítunk az utolsó héten. Ez a beszámoló max. 20 pontot ér és kötelezően teljesítendő.

A 4 legjobb zh és a beszámoló pontszámának összege alapján alakul ki a félévközi jegy. Ha a szóbeli beszámoló el van fogadva, akkor az osztályzat

50 – 2

62 – 3

74 – 4

86 – 5

A pótlási héten pótpót zh írható a teljes anyagból különjárási díj megfizetése mellett.

Bevezetés

A fizika egy kísérleti tudomány.

A tudományos megismerési folyamat lépései:

***megfigyelés, kísérlet, mérések → tapasztalatok, mérési adatok rendszerezése → hipotézisek, modellalkotás → jóslat a további kísérletek kimenetelére → ellenőrzés kísérlettel, méréssel → ***

A fizikai mennyiségeket mérőszámmal és mértékegységgel adjuk meg.

A számolást nagyban megkönnyíti az SI alapegységek használata.

Prefixumok

neve	jele	értéke
tera	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
hekto	h	10^2
deka	da	10^1
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
mikro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
piko	p	10^{-12}

Derivált, integrál jelentése

COVID-19 görbék elemzése

Induljunk ki a kumulatív esetszámot bemutató diagramból. A kumulatív esetszámot bemutató diagram napi növekedése megadja a napi új fertőzöttek számát. A kumulatív esetszámnál a függőleges tengelyen ábrázolt mennyiség mértékegysége „fő”, a napi új fertőzöttek mértékegysége pedig „fő/nap”. Ez az egy napra vonatkoztatott átlagos változási sebesség, ami jellemzi a fertőzöttek számának növekedését, külön diagramon is ábrázolható. A napi új fertőzöttek számát bemutató diagram adott napi értéke a kumulatív esetszámot mutató diagram meredeksége. Ha ennél részletesebb adataink vannak, finomíthatjuk a felosztást. Ha folytonos a görbe, az egyre finomabb felosztás határértékeként megkapjuk a pillanatnyi változási sebességet. Ez a függvény deriváltja abban a pillanatban. Grafikusan tekintve ez a görbe érintőjének meredeksége. A deriválás mint matematikai művelet függvényhez függvényt rendel (ebben a tárgyban nem lesz szükség ezekre az ismeretekre). A fizikában vizsgált folyamatok szempontjából azt lényeges tudnunk, hogy a derivált függvény adott pillanathoz tartozó értéke azt jellemzi, hogy mennyi a vizsgált mennyiség változási sebessége abban a pillanatban.

Hogyan kapjuk meg a kumulatív esetszámot, ha a napi új fertőzöttek bemutató diagramból indulunk ki? Össze kell adogatni a napi esetszámot, amit úgy kapunk meg, hogy a változási sebességet szorozzuk a változás idejével. A mértékegységeket tekintve a „fő/nap” szorozva a „nap”-pal adja a „fő”-t. Ez grafikusan a napi esetszám diagramján egy téglalap területe, és ezeket a területeket összegezve kapjuk a kumulatív esetszámot. Finomabb beosztás esetén belátható, hogy az összegzéssel a görbe alatti területet kapjuk meg. Ez tehát azt jelenti, hogy ha ismerjük egy mennyiség változási sebességét, akkor abból összegzéssel megkapjuk a kérdéses mennyiség pillanatnyi értékét: ez az integrálás lényege. Vegyük észre,

hogyan az integrál csak a kérdéses mennyiség növekményét adja meg! Szükségünk van annak ismeretére is, hogy a mennyiség milyen értékről indult (kezdeti értékre).

Nézzük most az aktív esetek aktuális értékének diagramját: itt a meredekség lehet negatív is. A fertőzöttek összes számának szempontjából a gyógyultak számát negatív előjellel kell figyelembe venni. A napi fertőzöttek és a napi gyógyultak számát ábrázoló diagramokból kiindulva az aktív esetek száma integrálással kapható meg, úgy, hogy a két diagram görbe alatti területét összegezzük, úgy, hogy a napi gyógyultak számából származó terület negatív.

Mit jelent az átlagérték? Azt az értéket, ami az adott időintervallumot tekintve ugyanakkora változást hoz létre, mint amekkora a változó érték esetén létrejön. Grafikusan ez azt az értéket jelenti a függőleges tengelyen, amekkora értékkel az adott időintervallumhoz tartozó téglalap területe megegyezik az eredeti görbe alatti területtel.

Hely – sebesség – gyorsulás

Középiskolában az „út” kiszámítására voltak képletek, de célszerű ehelyett a test helyéről beszélni, amiből a test mozgása esetén meghatározható a megtett út. A test sebessége azt mutatja, hogy éppen mennyire változik a test helye. A test gyorsulása pedig azt mutatja, hogy éppen mennyire változik a test sebessége. (Általánosan és tömören fogalmazva tehát azt mondhatjuk, hogy a sebesség a hely deriváltja, a gyorsulás pedig a sebesség deriváltja, de ezzel majd csak a Fizika1 –Mechanika tárgyban foglalkozunk. Most maradunk egyszerű speciális mozgásoknál, de aki tud deriválni, felismerheti ezt az alkalmazott képletekben.) Fontos megkülönböztetni a sebességet és a gyorsulást!

KÍSÉRLLET: Vízrel feltöltött lombikban alulról fonállal rögzített parafadugó vagy szivacsos műanyag darabka a lombik mozgatása közben a pillanatnyi gyorsulás irányát mutatja.

Egyenletes mozgás közben a fonál függőleges, mivel akkor a gyorsulás zérus.

A hely, a sebesség, és a gyorsulás vektorok (azaz nem csak nagyságuk, hanem irányuk is van). A helyvektor egy vonatkoztatási pontból mutat a test helyére. A sebességvektor iránya azt mutatja, hogy merre mozdul el a test. A gyorsulásvektor a sebességvektor változását mutatja: ha egy irányba mutat a sebességvektorral, akkor a sebesség nagysága nőni fog, ill. ha ellenkező irányba mutat vele, akkor a sebesség nagysága csökkenni fog. Előfordul azonban az is, hogy a sebességvektor egyenese és a gyorsulásvektor egyenese nem esik egybe, ilyenkor meg fog változni a sebességvektor iránya, ami azt jelenti, hogy a test „kanyarodni” is fog, görbe vonalú mozgást végez.

Egyenletes mozgás, egyenletesen változó mozgás az x tengely mentén

Felejtsük el az „ $s = vt$ ” képletet, a test helyét az x koordinátájával adjuk meg, és általános képleteket írunk fel, amikben az egyes mennyiségek előjelesek (nem a képletekben lesznek előjelek).

Egyenletes mozgás: $v = \text{konst.}$

A v sebesség előjeles mennyiség (egydimenziós vektor). Először megválasztjuk az x tengely irányítottságát. Az x növekedésének irányába mutató sebesség pozitív előjelű, az x csökkenésének irányába mutató sebesség negatív előjelű.

A test helye az idő függvényében, ha $t=0$ -ban az x_0 pontból indul: $x = x_0 + vt$.

A gyorsulás zérus ($a=0$).

Egyenletesen változó mozgás: $a = \text{konst.}$

Az a gyorsulás is előjeles mennyiség, az x növekedésének irányába mutató gyorsulás pozitív előjelű.

A test sebessége egyenletesen változik: $v = v_0 + at$, ha $t=0$ -ban a test sebessége v_0 .

A test helye: $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$.

A sebesség és a gyorsulás előjelétől függően 4 eset állhat elő:

- $v > 0$ és $a > 0$: az x növekedésének irányába halad egyre gyorsabban;
- $v > 0$ és $a < 0$: az x növekedésének irányába halad egyre lassabban;
- $v < 0$ és $a < 0$: az x csökkenésének irányába halad egyre gyorsabban;
- $v < 0$ és $a > 0$: az x csökkenésének irányába halad egyre lassabban.

Megjegyzések:

1. Vegyük észre, hogy az egyenletes mozgást leíró képleteket megkapjuk úgy, hogy az egyenletesen változó mozgás képletébe $a = 0$ -t helyettesítünk.
2. Jelölés: $v = v_0 + at$ és $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ a sebesség ill. a helykoordináta időfüggését írja le, jelölhetjük $v(t)$ -vel ill. $x(t)$ -vel is, de a rövideg kedvéért ezt sokszor elhagyjuk.

FELADATOK

1A/1. (MÁ 4.) Egy vízmelegítő percenként $9,6 \text{ dm}^3$ vizet enged át. Hány m/s sebességgel folyik a víz a 2 cm^2 keresztmetszetű csapból?

Megoldás

A víz m/s -ban kifejezett v kifolyási sebessége azt jelenti, hogy Δt (s-ban kifejezett) idő alatt a víz Δx (m-ben kifejezett) távolságot mozdul előre a csőben. A cső A keresztmetszetével való szorzással kapjuk az adott idő alatt átment ΔV térfogatot. Tehát $v = \Delta x / \Delta t$ és $\Delta x \cdot A = \Delta V$, amiből

$v = (\Delta V / \Delta t) / A$, tehát a $\Delta V / \Delta t$ térfogatáramot osztani kell a cső keresztmetszetével.

Behelyettesítés:

$\Delta t = 1 \text{ perc} = 60 \text{ s}$; $\Delta V = 9,6 \text{ dm}^3 = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$; $A = 2 \text{ cm}^2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$;

$v = (\Delta V / \Delta t) / A = (9,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / 60 \text{ s}) / 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 0,8 \text{ m/s}$.

1A/2. (MÁ 8.) Két autó egyszerre indul egymással szemben 20 km távolságból. Mekkora köztük a távolság negyed óra múlva, ha az egyik sebessége 25 km/h , a másiké 11 m/s ?

Megoldás

Mindkét test egyenletes mozgást végez: $x = x_0 + vt$,

vagyis $x_1 = x_{01} + v_1 t$ és $x_2 = x_{02} + v_2 t$.

Az egyik autó indulási x_{01} koordinátáját vegyük zérusnak, így a másiké $x_{02} = 20 \text{ km} = 20000 \text{ m}$; a sebességek nagysága: $|v_1| = 25 \text{ km/h}$, ill. $|v_2| = 11 \text{ m/s}$.

Hogyan váltunk át mértékegységet? $1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

tehát a v_1 sebesség nagysága SI alapegységekkel: $|v_1| = 25/3,6 = 6,944 \text{ m/s}$,

ill. a v_2 sebesség nagysága km/h-ban: $|v_2| = 11 \cdot 3,6 = 39,6 \text{ km/h}$.

A két autó egymással szembe megy, ezért az egyik sebesség előjele negatív kell legyen. Ha az x tengelyt úgy vesszük fel, hogy az arra mutat, amerre az 1-es autó megy, akkor a 2-es autó sebessége negatív: $v_2 = -11 \text{ m/s} = -39,6 \text{ km/h}$.

A helykoordináták így

SI alapegységekkel felírva: $x_1 = 6,944 t$ és $x_2 = 20000 - 11 t$: itt t s-ban értendő; ill.

km/h-ban felírva: $x_1 = 25 t$ és $x_2 = 20 - 39,6 t$: itt t h-ban értendő.

Helyettesítsük be a megadott időt:

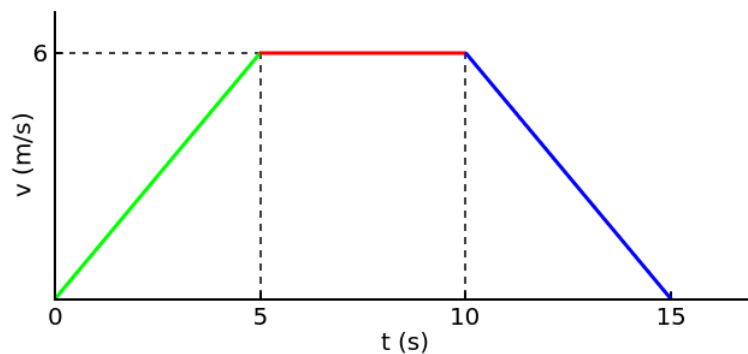
SI alapegységekkel $t^* = 0,25 \text{ h} = 0,25 \text{ h} \cdot 3600 \text{ (s/h)} = 900 \text{ s}$:

$$x_1 = 6,944 \cdot 900 = 6250 \text{ m} \quad \text{és} \quad x_2 = 20000 - 11 \cdot 900 = 10100 \text{ m};$$

km/h-ban felírva: $x_1 = 25 \cdot 0,25 = 6,25 \text{ km}$ és $x_2 = 20 - 39,6 \cdot 0,25 = 10,1 \text{ km}$.

A két autó közötti távolság $d = |x_1 - x_2| = 3850 \text{ m} = 3,85 \text{ km}$.

1A/3. (MÁ 75.) Az ábra egy felvonó emelkedésének sebesség–idő diagramja.



a) Hány métert emelkedett a felvonó a 15 s alatt?

b) Mennyi volt az átlagsebessége?

c) Rajzoljuk fel a felvonó gyorsulását és a kiindulási szinttől mért magasságát is az idő függvényében!

Megoldás

A mozgás szakaszonként egyenletesen változó mozgás:

$$v(t) = v_0 + at \quad \text{és} \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Minden mennyiséget SI alapegységekkel írunk fel.

A 0 – 5 s között

a kiinduló koordináta $x_{01} = 0$;

a kezdősebesség $v_{01} = 0$;

a gyorsulás: $a_1 = \Delta v / \Delta t = (6-0)/(5-0) = 1,2 \text{ m/s}^2$ (pozitív, a lift sebessége nő);
 $\rightarrow v_1(t) = a_1 t = 1,2t$ és $x_1(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2 = 0,6t^2$;
 5 s-ban $x_1(5) = 0,6 \cdot 5^2 = 15 \text{ m}$ (és ellenőrizhetjük, hogy $v_1(5) = 1,2 \cdot 5 = 6 \text{ m/s}$).

Az 5 – 10 s között

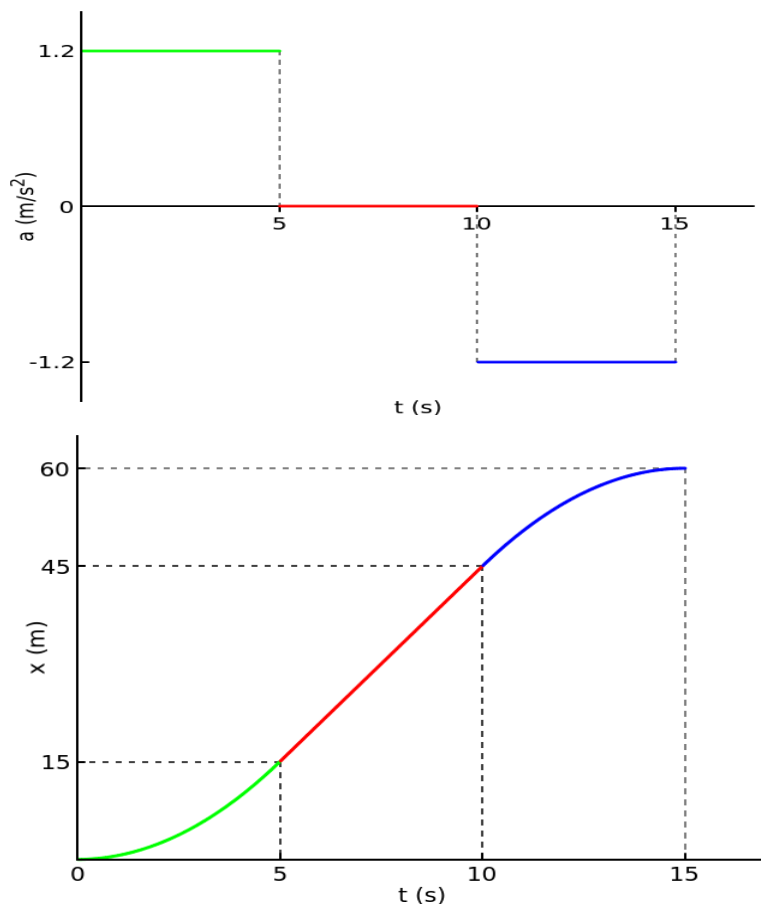
mivel ez a szakasz az 5 s-nál kezdődik, ezért ezen a szakaszon $t_2 = t - 5 \text{ s}$;
 a kiinduló koordináta $x_{02} = x_1(5) = 15 \text{ m}$;
 a (kezdő)sebesség $v_{02} = v_1(5) = 6 \text{ m/s}$;
 a gyorsulás zérus;
 $\rightarrow v_2(t) = 6 \text{ m/s}$ és $x_2(t) = 15 + 6 \cdot (t-5)$;
 10 s-ban $x_2(10) = 15 + 6 \cdot 5 = 45 \text{ m}$.

A 10 – 15 s között

mivel ez a szakasz a 10 s-nál kezdődik, ezért ezen a szakaszon $t_3 = t - 10 \text{ s}$;
 a kiinduló koordináta $x_{03} = x_2(10) = 45 \text{ m}$;
 a kezdősebesség $v_{03} = v_2(10) = 6 \text{ m/s}$;
 a gyorsulás $a_3 = \Delta v / \Delta t = (0-6)/(15-10) = -1,2 \text{ m/s}^2$ (negatív, a lift sebessége csökken);
 $\rightarrow v_3(t) = 6 - 1,2(t-10)$ és $x_3(t) = 45 + 6(t-10) - 1,2(t-10)^2$;
 15 s-ban $x_3(15) = 45 + 6 \cdot 5 - 0,6 \cdot 5^2 = 60 \text{ m}$
 (és ellenőrizhetjük, hogy $v_3(15) = 6 - 1,2 \cdot 5 = 0 \text{ m/s}$).

a) A felvonó emelkedése $x_3(15) = 60 \text{ m}$ volt.

b) A felvonó átlagsebessége $v_{\text{átl}} = \Delta x / \Delta t = (60-0)/(15-0) = 4 \text{ m/s}$ volt.



1A/4. (MÁ 61.) Elkerülhető-e az összeütközés, ha az 54 km/h sebességgel haladó jármű előtt 95 m távolságban forgalmi akadály bukkan fel, és a jármű $1,25 \text{ m/s}^2$ lassulással fékezhető? Vegyük figyelembe, hogy az akadály észlelése és a fékezés kezdete között a reakcióidő 1 s. (A féktávolság a reakcióidő és a fékezés alatt megtett út.)

Megoldás

A jármű az első másodpercben egyenletes mozgás végez:

$$v_1 = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s} \quad \text{és} \quad x_1(t) = v_1 t = 15t; \quad t = 1 \text{ s-nál} \quad x_1(1) = 15 \cdot 1 = 15 \text{ m.}$$

Ezután kezd lassulni. Ezen a szakaszon

$$t_2 = t - 1 \text{ s (mivel ez a szakasz } t = 1 \text{ s-nál kezdődik);}$$

$$x_{02} = x_1(1) = 15 \text{ m;}$$

$$v_{02} = v_1 = 15 \text{ m/s;}$$

$$a_2 = -1,25 \text{ m/s}^2 \text{ (negatív a gyorsulás, mert a test lassul).}$$

Többféleképpen számolhatunk:

1.) A lassuló szakaszra t_2 -vel írjuk fel a sebességet és a helyet (t_2 a lassulás ideje, 1 s-nál kezdődik):

$$v_2(t_2) = 15 - 1,25t_2 \quad \text{és} \quad x_2(t_2) = 15 + 15t_2 - 0,625t_2^2.$$

Kiszámoljuk azt a t_2^* időt, amennyi ahhoz szükséges, hogy a jármű megálljon, azaz $v_2 = 0$ legyen:

$$15 - 1,25t_2^* = 0 \quad \rightarrow \quad t_2^* = 12 \text{ s}$$

(ezt számolhatjuk úgy is, hogy $a = \Delta v / \Delta t \rightarrow \Delta t = \Delta v / a = (0 - 15) / (-1,25) = 12 \text{ s}$),

és ezt az időt behelyettesítjük az $x_2(t_2)$ függvénybe: $x_2(12) = 15 + 15 \cdot 12 - 0,625 \cdot 12^2 = 105 \text{ m}$.

Az ütközés tehát nem kerülhető el.

2.) Hasonló, de kissé bonyolultabb, ha t -vel írjuk fel a képleteket (t a teljes idő, 0 s-nál kezdődik):

$$v_2(t) = 15 - 1,25(t-1) \quad \text{és} \quad x_2(t) = 15 + 15(t-1) - 0,625(t-1)^2.$$

Az a t^* időpont, amikor a jármű megáll, azaz $v_2 = 0$:

$$15 - 1,25(t^*-1) = 0 \quad \rightarrow \quad t^* = 13 \text{ s,}$$

ezt behelyettesítve az $x_2(t)$ függvénybe: $x_2(13) = 15 + 15 \cdot 12 - 0,625 \cdot 12^2 = 105 \text{ m}$.

3.) Bonyolultabb, ha először azt a t_2' időt számoljuk ki, amikor a jármű 95 m-hez ér:

$$x_2(t_2) = 15 + 15t_2' - 0,625t_2'^2 = 95 \quad \rightarrow \quad 0,625t_2'^2 - 15t_2' + 80 = 0$$

$\rightarrow t_2' = 8 \text{ s}$ (16 s is megoldás, de annak nincs fizikai értelme),

és ezt behelyettesítve a $v_2(t_2)$ függvénybe kiszámolhatjuk, hogy oda érkezve mekkora a jármű sebessége: $v_2(8) = 15 - 1,25 \cdot 8 = 5 \text{ m/s}$, tehát 95 m-nél a jármű még mozgásban van.

4.) Rendezhetjük a $v_2(t_2^*) = v_{02} + at_2^* = 0$ és $x_2(t_2^*) = x_{02} + v_{02}t_2^* + \frac{1}{2}at_2^{*2}$ képleteket, hogy ne kelljen a t_2^* időt kiszámolni: a sebességből: $t_2^* = -v_{02}/a$, és ezt beírjuk a hely függvényébe:

$$x_2 = x_{02} + v_{02} \cdot (-v_{02}/a) + \frac{1}{2}a(-v_{02}/a)^2 = x_{02} - v_{02}^2/a + \frac{1}{2} \cdot v_{02}^2/a = x_{02} - \frac{1}{2} \cdot v_{02}^2/a.$$

Ebbe behelyettesítve: $x_2 = x_{02} - \frac{1}{2} \cdot v_{02}^2/a = 15 - \frac{1}{2} \cdot 15^2/(-1,25) = 105 \text{ m}$.

Függőleges hajítás, szabadesés

A földfelszín közelében a nehézségi erő miatt minden testnek állandó nagyságú gyorsulása van függőlegesen lefelé, ezért a függőleges hajítás és a szabadesés egyenletesen változó mozgás.

Az összes számolási feladatban $g = 10 \text{ m/s}^2$ értékkel számolunk.

A függőleges koordinátára a szokásos jelölés nem x , hanem z (ill. lehet y is, de a Fizika1 – Mechanika tárgy számolási feladataiban is z fogja jelölni).

A z tengely felfelé mutat, ezért $a = -g$. A kezdősebesség és a pillanatnyi sebesség előjele attól függ, hogy a test felfelé vagy lefelé mozog: felfelé pozitív, lefelé negatív.

Ezzel tehát $v(t) = v_0 - gt$ és $z = z_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$

Szabadesésnél $v_0 = 0$, ezért $v(t) = -gt$ és $z = z_0 - \frac{1}{2}gt^2$.

FELADATOK

1A/5. (MÁ 94.) Legalább milyen hosszú ejtőzsinórt kell készítenünk, ha 5 koppanást szeretnénk hallani egyenletes időközönként, és az első golyót a fémlemezről 7 cm távolságra rögzítettük?

Megoldás

Az összes golyó szabadesést végez adott magasságból, tehát $z_i = z_{0i} - \frac{1}{2}gt_i^2$, $i = 1 \dots 5$.

z_{0i} a kiindulási magasság a fémlemezhez képest, vagyis a golyók akkor koppannak, amikor $z_i = 0$, tehát a kiindulási magasságok az esés idejével kifejezve: $z_{0i} = \frac{1}{2}gt_i^2$.

A koppanásoknak egyenletesen kell követniük egymást:

$t_2 = t_1 + t_1 = 2 t_1$, $t_3 = t_2 + t_1 = 3 t_1$, ... , általánosan $t_i = i \cdot t_1$ (t_1 a legelső golyó leesésének ideje).

Ebből kifejezhetjük a z_{0i} kiindulási magasságok arányát:

$$z_{0i} = \frac{1}{2}g \cdot (i \cdot t_1)^2 = i^2 \cdot \frac{1}{2}gt_1^2 = i^2 \cdot z_{01}.$$

A golyóknak tehát négyzetesen növekvő magasságból kell indulniuk.

A legelső golyó 7 cm magasról indul: $z_{01} = 0,07 \text{ m} \rightarrow$ a második golyó $z_{02} = 2^2 \cdot 0,07 = 0,28 \text{ m}$ magasról, a harmadik golyó $z_{03} = 3^2 \cdot 0,07 = 0,63 \text{ m}$ magasról, a negyedik golyó $z_{04} = 4^2 \cdot 0,07 = 1,12 \text{ m}$ magasról, és az ötödik golyó $z_{05} = 5^2 \cdot 0,07 = 1,75 \text{ m}$ magasról.

[Nem kérdés, de kiszámolhatjuk a koppanások között eltelt időt:

$$z_{01} = \frac{1}{2}gt_1^2 = 0,07 \text{ m} \rightarrow t_1 = 0,12 \text{ s.}]$$

KÍSÉRLET: Kötélre egyenletes távolságban, ill. négyzetesen növekvő távolságban fűzünk fel anyacsavarokat, és leejtve megfigyeljük az anyacsavarok koppanása között eltelt időt. Füllel is érzékelhető a különbség, de a hangot rögzíthetjük is (pl. Audacity), és onnan leolvasható a koppanások között eltelt idő.

1A/6. (MÁ 108.) Egy lift 14,7 m/s sebességgel süllyed. A lift mellett leejtünk egy követ.

a) Mikor és hol találkozik a lift a kővel, ha elég hosszú még lefelé a liftakna?

b) Mikor egyenlő a kő és a lift sebessége?

Megoldás

A lift és a kő helyét kell az idő függvényében felírni arra ügyelve, hogy azonos koordinátarendszerben adjuk meg a helyüket. A $z = 0$ helyet mi választhatjuk meg úgy, hogy a legegyszerűbb legyen a számolás: legyen pl. az a hely, ahonnan indul a lift és a kő. Így

az egyenletesen süllyedő liftre $z_{\text{lift}}(t) = -v_{\text{lift}}t$ és

a szabadesést végző kőre $z_{\text{kő}}(t) = -\frac{1}{2}gt^2$.

a) Akkor találkoznak, ha $z_{\text{lift}}(t^*) = z_{\text{kő}}(t^*)$, vagyis $-v_{\text{lift}}t^* = -\frac{1}{2}gt^{*2}$.

A $t^*_1 = 0$ megoldás a közös kiindulási állapotra vonatkozik. A másik megoldás

$t^*_2 = 2v_{\text{lift}}/g = 2 \cdot 14,7/10 = 2,94$ s, ekkor éri utol a kő a liftet.

A találkozás helye kiszámolható bármelyik $z(t)$ függvénybe való behelyettesítéssel:

$z^* = -v_{\text{lift}}t^*_2 = -14,7 \cdot 2,94 = -43,22$ m, ill. $z^* = -\frac{1}{2}gt^{*2}_2 = -0,5 \cdot 10 \cdot 2,94^2 = -43,22$ m;

tehát 43,22 m-rel lejjebb találkoznak.

b) A lift sebessége konstans: $v_{\text{lift}} = -14,7$ m/s, a kőé pedig egyenletesen nő: $v_{\text{kő}}(t) = -gt$.

$v_{\text{kő}}(t') = v_{\text{lift}}$, ha $-gt' = v_{\text{lift}} \rightarrow t' = -v_{\text{lift}}/g = -(-14,7)/10 = 1,47$ s.

[Egyébként ekkor nincsenek egymás mellett, a lift $z_{\text{lift}}(t') = -14,7 \cdot 1,47 = -21,61$ m-nél, a kő pedig $z_{\text{kő}}(t') = -0,5 \cdot 10 \cdot 1,47^2 = -10,80$ m-nél van (még nem érte utol a liftet).]

Ferde hajítás

Ha távolabbról nézzük, ahogy egy egyenletesen haladó teherautó platóján valaki leejt egy testet, vagy függőlegesen felfelé ill. lefelé elhajít, akkor azt látjuk, hogy a függőleges mozgás közben vízszintes irányban is elmozdul a test egyenletes sebességgel. Hasonló mozgás jön létre akkor is, ha a testet úgy hajítjuk el, hogy mi adunk a testnek vízszintes irányú sebességet. Ez a vízszintes irányú sebesség nem fog változni, mert a test g gyorsulása függőleges, és mivel a g gyorsulásnak nincs vízszintes komponense, ezért a sebesség vízszintes komponense állandó marad.

KÍSÉRLET: Két test egy időben indul azonos magasságból: az egyik vízszintes kezdősebességgel, a másik kezdősebesség nélkül szabadon esik. Egyszerre érnek földet, ami azt mutatja, hogy a vízszintesen meglökött test vízszintes irányú elmozdulása nem befolyásolja a függőleges irányú mozgását, a vízszintes és a függőleges irányú mozgások egymástól függetlenek.

A ferde hajítás tehát egy vízszintes irányú egyenletes mozgás és egy függőleges irányú egyenletesen változó mozgás eredője.

Képletek:

A mozgás az $x - z$ síkban történik, a z tengely felfelé mutat.

A test gyorsulásának komponensei:

vízszintes: $a_x = 0$;

függőleges: $a_z = -g$.

A kezdősebesség nagysága v_0 , a vízszintessel α szöget zár be. α pozitív, ha ferdén felfelé hajítunk, ill. α negatív, ha ferdén lefelé hajítunk. Ebből a kezdősebesség komponensei:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha, v_{0z} = v_0 \sin\alpha.$$

A test sebességének komponensei:

$$\text{vízszintes: } v_x = v_{0x} = \text{konst.};$$

$$\text{függőleges: } v_z = v_{0z} - gt.$$

Ha $v_z > 0$, akkor a test emelkedik, ill. ha $v_z < 0$, akkor a test esik lefelé. Mivel gt előjele negatív, egy idő után v_z előjele akkor is negatív lesz (azaz esik lefelé), ha v_{0z} pozitív volt (felfelé dobtuk el a testet). Az előjelek alkalmazásával a hajítás felfelé ill. lefelé mutató szakasza egyben kezelhető.

A test helyvektorának komponensei:

$$\text{vízszintes: } x = x_0 + v_{0x}t;$$

$$\text{függőleges: } z = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Speciális esetek:

Függőleges hajítás:

$$\text{sebessége: vízszintes: } v_x = 0; \text{ függőleges: } v_z = v_0 - gt;$$

$$\text{helyének komponensei: vízszintes: } x = x_0; \text{ függőleges: } z = z_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Vízszintes hajítás:

$$\text{sebessége: vízszintes: } v_x = v_0 = \text{konst.}; \text{ függőleges: } v_z = -gt;$$

$$\text{helyének komponensei: vízszintes: } x = x_0 + v_0t; \text{ függőleges: } z = z_0 - \frac{1}{2}gt^2.$$

FELADATOK

1A/7. (MÁ 132.) Egy testet 25 m/s kezdősebességgel, 60° -os szögben ferdén elhajítunk. Hol van 2 s múlva, és mekkora a sebessége?

Megoldás

A test helyének vízszintes koordinátája $x = x_0 + v_{0x}t$, függőleges koordinátája $z = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2$.

x_0 és z_0 választható zérusnak.

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 25 \cdot \cos 60^\circ = 12,5 \text{ m/s}; v_{0z} = v_0 \sin\alpha = 25 \cdot \sin 60^\circ = 21,65 \text{ m/s}, \text{ tehát}$$

$$x(t) = 12,5t \text{ és } z(t) = 21,65t - 5t^2.$$

$$\text{Behelyettesítve } t = 2 \text{ s-ot } x(2) = 12,5 \cdot 2 = 25 \text{ m}; z(2) = 21,65 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 23,30 \text{ m}.$$

A test tehát vízszintesen mérve 25 m-t távolodott az elhajítás helyétől, és 23,30 m-rel van magasabban annál a magasságnál, ahonnan elhajították.

A test sebességének komponensei $v_x = v_{0x} = 25 \cdot \cos 60^\circ = 12,5 \text{ m/s}$ (állandó), és

$$v_z(t) = v_{0z} - gt = 25 \cdot \sin 60^\circ - 10t = 21,65 - 10t,$$

ami $t = 2 \text{ s-nál } v(2) = 21,65 - 10 \cdot 2 = 1,651 \text{ m/s}$ (pozitív, tehát a test még emelkedik).

[Hogy miért nem 1,65 m/s-ot írunk? Mert kerekítésnél a számokat 4 értékes jeggyel írjuk le, a számolásokban viszont mindig a pontos értéket visszük tovább. A $v_{0z} = v_0 \sin\alpha = 25 \cdot \sin 60^\circ$ értéke pontosabban megadva 21,65063509 m/s, ami 4 értékes jegyre kerekítve 21,65 m/s,

viszont a $v(2) = 25 \cdot \sin 60^\circ - 10 \cdot 2$ értéke pontosabban $1,650635095 \text{ m/s}$, ami 4 értékes jegyre kerekítve $1,651 \text{ m/s}$.]

A test sebességének nagysága Püthagorasz-tétellel: $v(2) = \sqrt{(12,5^2 + 1,651^2)} = 12,61 \text{ m/s}$.

KÍSÉRLET: A locsolókannából kifolyó víz által leírt pálya parabola.

1A/8. (MÁ 127.) Egy testet 60° -os szögben ferdén elhajítunk 25 m/s kezdősebességgel.

- Mikor ér a pálya tetőpontjára?
- Milyen magasan van a tetőpont?
- Mikor ér újra az elindítás magasságába?
- Milyen távol ér újra az elindítás magasságába?

Megoldás

a) A test az elhajítás után egy ideig emelkedik, vagyis a sebességének a függőleges komponense pozitív, majd a pálya tetőpontját elérve esni kezd, vagyis a sebességének a függőleges komponense negatív lesz. A pálya tetőpontján akkor van a test, amikor a sebességének a függőleges komponense zérus. (A test nem áll meg a pálya legfelső pontján, mert a vízszintes sebessége állandó; csak a függőleges sebessége lesz egy pillanatra zérus.)

$$v_z(t) = v_{0z} - gt = v_0 \sin \alpha - gt = 25 \cdot \sin 60^\circ - 10t = 21,65 - 10t;$$

$$v_z(t_h) = 0 \rightarrow t_h = v_{0z}/g = 2,165 \text{ s.}$$

b) A test helyének függőleges koordinátája $z = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2$.

$$z_0 \text{ választható zérusnak; } z(t) = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 = 21,65t - 5t^2.$$

A pálya csúcspontjának a magasságát úgy kapjuk meg, hogy ebbe behelyettesítjük t_h értékét:

$$h = z(t_h) = 21,65t_h - 5t_h^2 = 21,65 \cdot 2,165 - 5 \cdot 2,165^2 = 23,44 \text{ m.}$$

[Vagy megtehetjük, hogy először a képleteket rendezzük, és h -t kifejezzük a kezdősebességgel:

$$h = v_{0z}t_h - \frac{1}{2}gt_h^2 = v_{0z} \cdot v_{0z}/g - \frac{1}{2}g(v_{0z}/g)^2 = \frac{1}{2}v_{0z}^2/g = 0,5 \cdot (25 \cdot \sin 60^\circ)^2/10 = 23,44 \text{ m.}]$$

c) Amikor a test az elhajítás magasságába ér, akkor ugyanakkora a z koordinátája, mint az elhajításkor ($z_0 = 0$ volt a választásunk), tehát

$$z(t_d) = v_{0z}t_d - \frac{1}{2}gt_d^2 = 21,65t_d - 5t_d^2 = 0 \rightarrow$$

ennek egyik megoldása $t_d = 0$, ami az indulás időpontja,

másik megoldása $t_d = 2v_{0z}/g = 4,330 \text{ s}$.

Vegyük észre, hogy ez az idő kétszerese annak az időnek, amennyi alatt a test a pálya csúcspontjára ért, mivel a pálya szimmetrikus.

d) Amikor a test azonos magasságba ér az elhajítás magasságával, akkor az elhajítás helyétől mért távolsága megegyezik az x koordinátájának változásával. (A pálya minden más pontján a távolságot Püthagorasz-tétellel kellene számolni, mivel mindkét koordináta változik.)

$$d = x(t_d) - x_0 = v_{0x}t_d = v_0 \cos \alpha \cdot t_d.$$

$$\text{Behelyettesítve } t_d \text{ értékét: } d = 25 \cdot \cos 60^\circ \cdot 4,330 = 54,13 \text{ m.}$$

[Vagy megtehetjük, hogy először a képleteket rendezzük, és d -t kifejezzük a kezdősebességgel:

$$d = v_{0x} \cdot t_d = v_{0x} \cdot (2v_{0z}/g) = v_0 \cos \alpha \cdot 2 \cdot v_0 \sin \alpha / g = v_0^2 \cdot \sin(2\alpha) / g = 25^2 \cdot \sin 120^\circ / 10 = 54,13 \text{ m.}]$$

SZIMULÁCIÓK, AMIKKEL ÉRDEMES JÁTSZANI:

Viszonylag szabadon rajzolható függvények deriváltja ill. integrálja:

<https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/calculus-grapher>

Próbáljuk meg a katicát gyorsulással irányítani:

<https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/maze-game>

„Katicaidomítás”: szabadon mozgatható a bogár, és közben megrajzolja a pillanatnyi sebességvektorát és gyorsulásvektorát:

<https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/ladybug-motion-2d>

Hajítás:

<https://phet.colorado.edu/en/simulation/projectile-motion>

A legtöbb mobiltelefonban van gyorsulásérzékelő, aminek az adatai kiolvashatók pl. a VIEYRA szoftverrel, így megtudhatjuk, mekkora volt pl. a villamos vagy a lift gyorsulása, illetve hogy milyen gyorsulással tudunk futni.

KIDOLGOZOTT GYAKORLÓ FELADATOK

(MÁ 14.) Egyenes úton személyautó, az úttal párhuzamosan futó vasúti sínen pedig vonat halad. Az autó sebessége 68,4 km/h, a vonaté 54 km/h. A vonat 2,4 km-rel jár az autó előtt. Mennyi idő alatt és mekkora úton éri utol az autó a vonatot? Ábrázoljuk mindkét test elmozdulását az idő függvényében!

Megoldás

Mindkét test egyenletes mozgást végez: $x = x_0 + vt$,

vagyis $x_{\text{autó}} = x_{0,\text{autó}} + v_{\text{autó}} t$ és $x_{\text{vonat}} = x_{0,\text{vonat}} + v_{\text{vonat}} t$.

Az autó indulási $x_{0,\text{autó}}$ koordinátáját vegyük zérusnak, így a vonaté $x_{0,\text{vonat}} = 2,4 \text{ km} = 2400 \text{ m}$; a sebességek: $v_{\text{autó}} = 68,4 \text{ km/h}$, ill. $v_{\text{vonat}} = 54 \text{ km/h}$.

Mértékegység átváltása: $1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

tehát a sebességek SI alapegységekkel: $v_{\text{autó}} = 19 \text{ m/s}$, ill. $v_{\text{vonat}} = 15 \text{ m/s}$.

A helykoordináták

km és h mértékegységekkel felírva: $x_{\text{autó}} = 68,4 t$ és $x_{\text{vonat}} = 2,4 + 54 t$ (t h-ban értendő);

SI alapegységekkel felírva: $x_{\text{autó}} = 19 t$ és $x_{\text{vonat}} = 2400 + 15 t$ (t s-ban értendő).

Akkor találkoznak, amikor $x_{\text{autó}} = x_{\text{vonat}}$, azaz $x_{0,\text{autó}} + v_{\text{autó}} t = x_{0,\text{vonat}} + v_{\text{vonat}} t \rightarrow$

$t = (x_{0,\text{vonat}} - x_{0,\text{autó}}) / (v_{\text{autó}} - v_{\text{vonat}})$.

Behelyettesítve

km és h mértékegységekkel: $t = (2,4 - 0) / (68,4 - 54) = 1/6 \text{ h} = 0,1667 \text{ h}$;

SI alapegységekkel: $t = (2400 - 0) / (19 - 15) = 600 \text{ s}$.

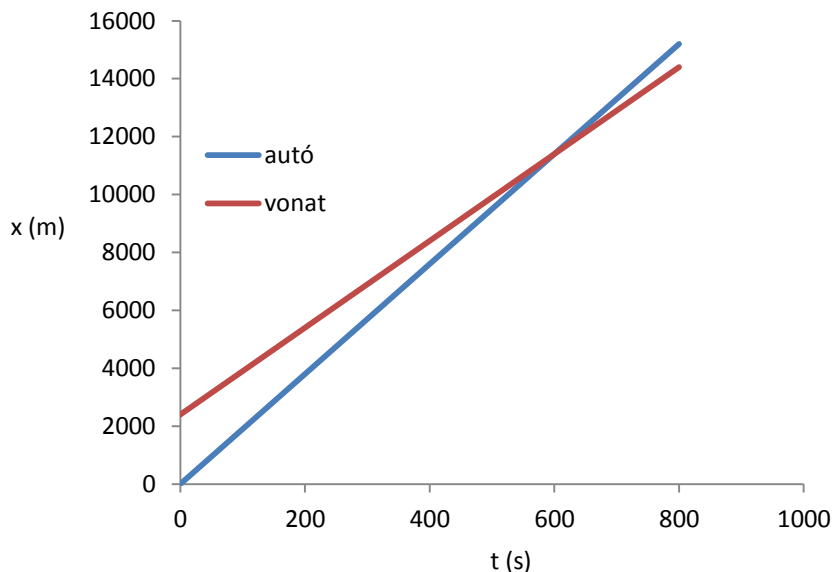
Tehát $1/6 \text{ h} = 600 \text{ s} = 10 \text{ perc}$ múlva találkoznak.

A találkozás helyét megkaphatjuk bármelyik $x(t)$ függvénybe való behelyettesítéssel,

pl. SI alapegységekkel számolva:

$x_{\text{autó}} = v_{\text{autó}} t = 19 \cdot 600 = 11400 \text{ m}$, ill. $x_{\text{vonat}} = x_{0,\text{vonat}} + v_{\text{vonat}} t = 2400 + 15 \cdot 600 = 11400 \text{ m}$.

Ábrázoljuk:



(MÁ 57.) Egy gépkocsi sebessége 54 km/h-ról 90 km/h-ra növekedett, miközben a gyorsulása $1,6 \text{ m/s}^2$ volt. Mennyi ideig tartott és mekkora utat tett meg a gépkocsi ezalatt?

Megoldás

$$v_0 = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}; \quad v_1 = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}, \quad a = 1,6 \text{ m/s}^2.$$

A gyorsulás állandó,

$$\text{tehát } v(t) = v_0 + at = 15 + 1,6t;$$

és tudjuk, hogy a keresett t_1 időben $v_1 = v(t_1) = v_0 + at_1 = 25 \text{ m/s}$, amiből $t_1 = 6,25 \text{ s}$.

Vagy számolhatunk az $a = \Delta v / \Delta t$ képlettel is:

$$\Delta t = \Delta v / a = (v_1 - v_0) / a = (25 - 15) / 1,6 = 6,25 \text{ s}.$$

A gépkocsi x koordinátája, ha induláskor az origóból indul, azaz $x_0 = 0$:

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

ebbe behelyettesítve a t_1 időt

$$x(t) = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 = 15 \cdot 6,25 + (1,6/2) \cdot 6,25^2 = 125 \text{ m}.$$

HÁZI FELADATOK

I/1. Súlylökés esetén elhanyagolható a közegellenállás, tehát a golyó mozgását ferde hajításként kezelhetjük. A súlylökés világrekordjáról készített videóból tudhatjuk hajítás távolságát, és meghatározható a hajítás ideje:

[https://www.youtube.com/watch?v= AFA35NyAKM](https://www.youtube.com/watch?v=AFA35NyAKM)

A hajítás távolság 23,12 m; a hajítás ideje 2,0 s.

Számolja ki ezek alapján a hajítás kezdősebességét és a pálya csúcspontjának magasságát! A súly kiindulási magasságának vegyen fel egy reális értéket.

I/2. Nézze meg az alábbi videót egy töréskeresztről:

https://www.youtube.com/watch?v=LmRkPyuet_o

Jegyezze fel az autó becsapódási sebességét és becsülje meg az autó begyűrődését, ami azt a távolságot jelenti, amekkora úton az autó lefékeződött. (A visszapattanó szakasszal már nem foglalkozunk.) Számolja ki ezek alapján az autó átlagos gyorsulását, és a lassulás idejét!

I/3. Golfpályán valaki a golflabda elütésekor veszi észre, hogy valaki kinn van a pályán pont azon a helyen, ahová a labdát elütötte, ezért rögtön (0 s alatt) kiabál, hogy FOR, ami azt jelenti, hogy vigyázzanak a pályán kinn lévők. Az ütés kezdősebessége 40 m/s volt, 180 m-re ment el a labda, a terep sík. Számolja ki, mennyi ideje van a pályán kinn lévő embernek elugrani a golflabda elől! A hang terjedésének idejét is vegye figyelembe!

I/4. Viráglocsoláskor valaki véletlenül leverte a cserépet, így a cserép szabadeséssel kezdett zuhanni a 15. emeletről, 44 m magasról. Azonnal kiált egy nagyot, hogy vigyázzanak, esik a cserép (ez 0 s alatt megtörténik). Számolja ki, mennyi lehet a lent esetlegesen arra járó átlagos magasságú emberek maximális reakcióideje, hogy még el tudjanak ugrani a zuhanó cserép elől! A hang terjedési idejét is vegye figyelembe!

I/5. Számítsa ki, mekkora úton tud megállni egy 50 km/h-val haladó autó száraz ill. jeges úton, ha az autó száraz úton 8 m/s^2 nagyságú, jeges úton 1 m/s^2 nagyságú gyorsulással tud fékezni, és a vezető reakcióideje 0,5 s!