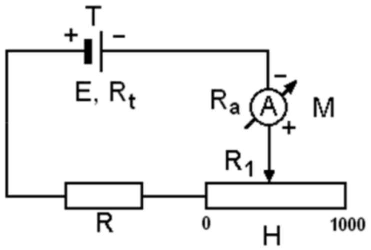
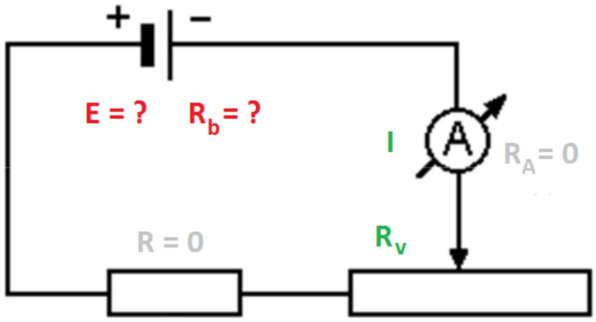
GÖRBEILLESZTÉS GYAKORLAT

Órai mintafeladat:





Rákötünk egy E elektromotoros erejű, R_b belső ellenállású telepre egy R_v változtatható ellenállást, és mérjük az áramot (ideális ampermérővel):

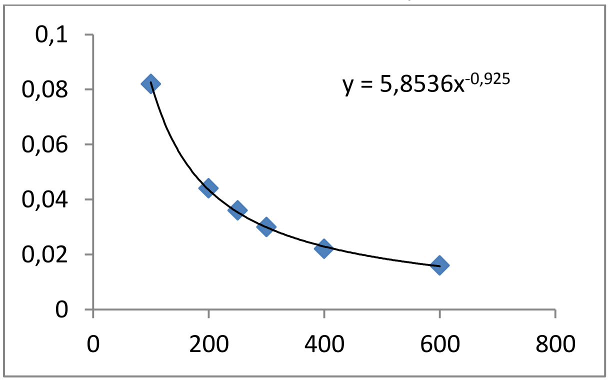
R_v (Ω)	I (A)
100	0,082
200	0,044
250	0,036
300	0,030
400	0,022
600	0,016

Határozzuk meg E és R_b értékét és szórását!

Van értelme kiszámolni, hogy R_v = (308 ± 71) Ω és I = (0,0383 ± 0,0096) A?
Nincs, mert nem azt várjuk, hogy azonos értéket kapunk R_v-re ill. I-re.

Itt változtatjuk R_v értékét és mérjük az annak következtében változó I értékét, tehát egy összefüggést mérünk ki. Az ismeretlen E és R_b az összefüggésben paraméterek.

Ábrázolhatjuk a mért pontokat pl. Excellel.
Lehet rá illeszteni trendvonalat, és ki lehet íratni az egyenletet is.



Legjobban a hatványfüggvény illeszkedik, $y = 5{,}8536\ x^{-0{,}925}$
$\rightarrow$ $I = 5{,}8536\ R_v^{-0{,}925}$; de honnan tudjuk, hogy mennyi E és R_b értéke?

Fel kell írnunk az összefüggést a mért mennyiségek (most R_v és I) és a kiszámítandó mennyiségek (most E és R_b) között:

$$I = \frac{E}{R_v + R_b}$$

Ez egy hiperbola: $y = \frac{A}{x+B}$.

Az Excel által illesztett hatványfüggvényben szereplő konstansoknak semmi közük E-hez és R_b-hez. Ha lenne hiperbola is a trendvonalak között, akkor annak a konstansait ki tudnánk olvasni és az megadná E és R_b értékét, de hiperbola nincs.

Másik próbálkozás: 2 ismeretlen van, egy kétváltozós egyenletrendszerből ezeket ki tudjuk számolni, ha a fenti összefüggésbe 2 adatot behelyettesítünk. De most több adatunk van, túlhatározott az egyenletrendszer.
Megtehetnénk azt, hogy létrehozunk minden lehetséges módon kétváltozós egyenletrendszereket az összes adat felhasználásával, ez most $n \cdot (n-1)/2 = 15$ egyenletrendszer. Megoldás Excelben az összes megoldást figyelembe véve:

E = (9,57082 ± 0,21946) V,
R_b = (20,9693 ± 9,18895) Ω.

Jó-e ez a megoldás? „Szemre" tudjuk ellenőrizni, ha megrajzoljuk a pontokra a hiperbola függvényt ezekkel az értékekkel. Excellel bonyolult → SciDAVis

SciDavis:
adatokat beírni → PLOT → SCATTER
GRAPH → ADD FUNCTION:
9.57/(x+21) (tizedesvessző nem jó)
x: 90-től 600-ig
Nem rossz, de próbálkozhatunk azzal, hogy tudunk-e jobban illeszkedő hiperbolát létrehozni azzal, hogy kitalálunk más számokat a 9,57 és a 21 helyett.
Ez már görbeillesztés ☺

Mi alapján döntjük el, hogy melyik görbe illeszkedik jobban?
Mi a távolság egy mérési pont és a görbe között?
A hagyományos távolság nem fejezhető ki olyan alakban, amiből a paramétereket meg tudnánk határozni → a függőleges eltérést fogjuk távolságnak hívni.

RAJZ

$$S = \Sigma(y_{i,\text{számolt}} - y_{i,\text{mért}})^2 \rightarrow \min.$$

Az $y = \frac{A}{x+B}$ hiperbolánkra $S = \sum \left(\frac{A}{x_i+B} - y_i\right)^2$

Szélsőértéke?

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 2\sum\left(\frac{A}{x_i+B} - y_i\right)\cdot\left(\frac{1}{x_i+B}\right) = 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial B} = 2\sum\left(\frac{A}{x_i+B} - y_i\right)\cdot\left(-\frac{A}{(x_i+B)^2}\right) = 0$$

x_i -re és y_i -re behelyettesíthetők R_v és I értékei (6 adatpár a táblázatból).

x_i	y_i
R_v (Ω)	I (A)
100	0,082
200	0,044
250	0,036
300	0,030
400	0,022
600	0,016

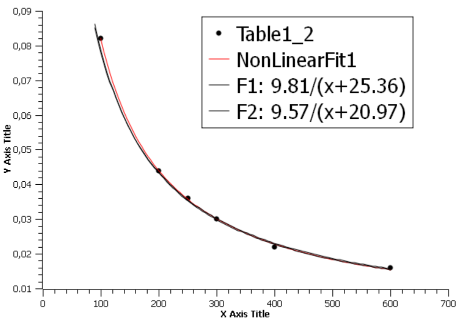
Csúnya nagy algebrai egyenletrendszer. Megoldása?
Numerikusan pl. Maple, Mathematica, Wolfram alpha (?) megoldja:

E = 9.480524812 V
R_b = 15.59110420 Ω
Megrajzolhatjuk ezt is a SciDAVis-szel.

Ezt a numerikus megoldást egyszerűbben is megkaphatjuk a **SciDAVis** (Origin) segítségével, úgy, hogy nem kell felírni a derivált egyenletrendszert és begépelni abba az adatokat. A SciDAVis-be beépített algoritmus a paraméterek értékét úgy változtatja, hogy S értéke csökkenjen, majd amikor a megadott határnál kisebb lesz, kiírja a paraméterértékeket.

Illesztés a SciDAVis-ben

Ez fog kelleni az otthoni feladathoz! [Segédlet a honlapon](#).



a: E = (9,4805247987374 +/- 0,131725431900025) V
b: R_b = (15,5911037006196 +/- 1,97162054657795) Ω
Chi^2/doF = 2,78453858417807e-07
R^2 = 0,999599250863395

Egyszerűnek tűnik az illesztés, de minden feladat megy ilyen könnyen. Pl. látható hogy itt az R_b relatív szórása milyen nagy, sokkal nagyobb, mint az E relatív szórása.

Mit lehetett csinálni, amíg nem volt numerikus segítség? Linearizálni.

Lineáris regresszió, azaz
a legkisebb négyzetek módszere lineáris függvény esetén:

y = ax + b

$S = \sum(ax_i + b - y_i)^2 \quad \rightarrow \quad$ min.

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum(ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum(ax_i + b - y_i) \cdot 1 = 0 \quad (2)$$

(1): $\sum(ax_i + b - y_i) \cdot x_i = \sum(ax_i^2 + bx_i - x_iy_i) = \sum(ax_i^2) + \sum(bx_i) + \sum(-x_iy_i) =$

$$a\sum(x_i^2) + b\sum(x_i) - \sum(x_iy_i) = 0$$

(2): $\sum(ax_i + b - y_i) = \sum(ax_i) + \sum(b) + \sum(-y_i) = a\sum(x_i) + n \cdot b - \sum(y_i) = 0$

$$\rightarrow \quad b = \frac{\sum(y_i) - a\sum(x_i)}{n}$$

(1): $a\sum(x_i^2) + \frac{\sum(y_i) - a\sum(x_i)}{n} \cdot \sum(x_i) - \sum(x_iy_i) = 0$

$$a\sum(x_i^2) + \frac{\sum(y_i)\cdot\sum(x_i)}{n} - \frac{a\sum(x_i)\cdot\sum(x_i)}{n} - \sum(x_iy_i) = 0$$

$$a\left(\sum(x_i^2) - \frac{\sum(x_i)\cdot\sum(x_i)}{n}\right) = \sum(x_iy_i) - \frac{\sum(y_i)\cdot\sum(x_i)}{n}$$

$$a = \frac{\sum(x_iy_i) - \frac{\sum(y_i)\cdot\sum(x_i)}{n}}{\sum(x_i^2) - \frac{\sum(x_i)\cdot\sum(x_i)}{n}}\ , \quad \text{bővítve} \quad a = \frac{\frac{\sum(x_iy_i)}{n} - \frac{\sum(x_i)}{n}\cdot\frac{\sum(y_i)}{n}}{\frac{\sum(x_i^2)}{n} - \frac{\sum(x_i)}{n}\cdot\frac{\sum(x_i)}{n}}$$

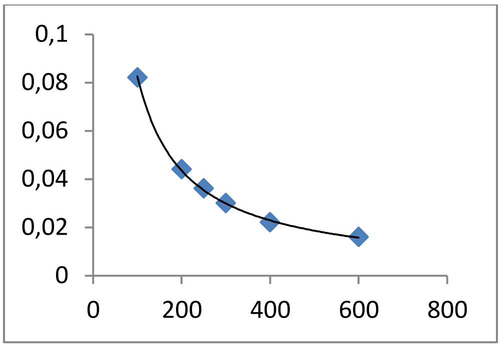
$$a = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

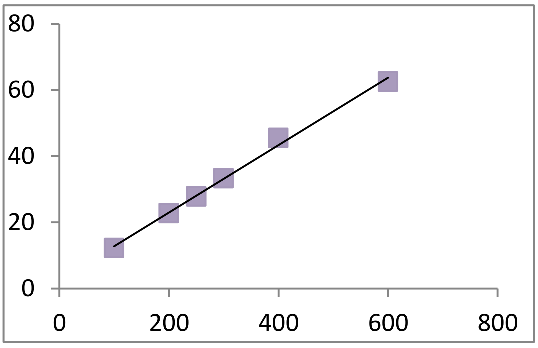
$$b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$$

Ezt tudja pl. az Excel. Pl. hiperbolát viszont azért nem tud az Excel, mert ott nem lehetett ilyen zárt képleteket kihozni.

Az órai probléma megoldása linearizálással:

$$I = \frac{E}{R_v + R_b} \qquad \rightarrow \qquad f(I) = a \cdot R_v + b \quad ????$$





$$\frac{1}{I} = \frac{R_v + R_b}{E} = \frac{1}{E} \cdot R_v + \frac{R_b}{E}$$

$$y \qquad\qquad = a \cdot x + b$$

új y: $y = \frac{1}{I}$; x nem változott, $x = R_v$; $a = \frac{1}{E}$; $b = \frac{R_b}{E}$

Számolás Excellel:

y oszlop: 1/I
x·y oszlop: R_v/I
x^2 oszlop: R_v^2
→ átlagok →

$$a = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} : \qquad \frac{\overline{\left(R_v \cdot \frac{1}{I}\right)} - \overline{R_v} \cdot \overline{\left(\frac{1}{I}\right)}}{\overline{\left(R_v^2\right)} - \overline{R_v}^2} = \frac{1}{E}$$

$$b = \overline{y} - a \cdot \overline{x} : \qquad \overline{\left(\frac{1}{I}\right)} - a \cdot \overline{R_v} = \frac{R_b}{E}$$

az órai feladatnál
a = 0,101884 → E = 1/a = 9,815049 V
b = 2,583663 → R_b = b/a = 25,35878 Ω

Mértékegységek!
$\overline{x} = \overline{R_v}$ [Ω]; $\overline{y} = \overline{\left(\frac{1}{I}\right)}$ [1/A]; $\overline{x^2} = \overline{\left(R_v^2\right)}$ [Ω²]; $\overline{x \cdot y} = \overline{\left(R_v \cdot \frac{1}{I}\right)}$ [Ω/A] ;
a = 0,101884 1/V; b = 2,583663 1/A

A linearizálással számolt mást adott, mint a SciDAVis. Miért?

Hibaterjedés

Linearizáláskor E és R_b értékét az egyenes meredekségéből és tengelymetszetéből számoljuk, így a hibabecsléshez a meredekség és a tengelymetszet hibáját kell ismernünk. Ezeknek a számítása nem kötelező feladat (ld. lejjebb), de
ha már ismerjük Δa és Δb értékét, akkor ΔE és ΔR_b hibaterjedéssel számolható:

$$a = \frac{1}{E} \quad \longrightarrow \quad E = \frac{1}{a}$$

$$\Delta E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial a}\cdot\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial b}\cdot\Delta b\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{a^2}\cdot\Delta a\right)^2 + 0} = \left|\frac{1}{a^2}\cdot\Delta a\right| = 0{,}3138\ \mathrm{V}$$

$$b = \frac{R_b}{E} \quad \longrightarrow \quad R_b = \frac{b}{a}$$

$$\Delta R_b = \sqrt{\left(\frac{\partial R_b}{\partial a}\cdot\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial R_b}{\partial b}\cdot\Delta b\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{b}{a^2}\cdot\Delta a\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\cdot\Delta b\right)^2} = 11{,}124\ \Omega$$

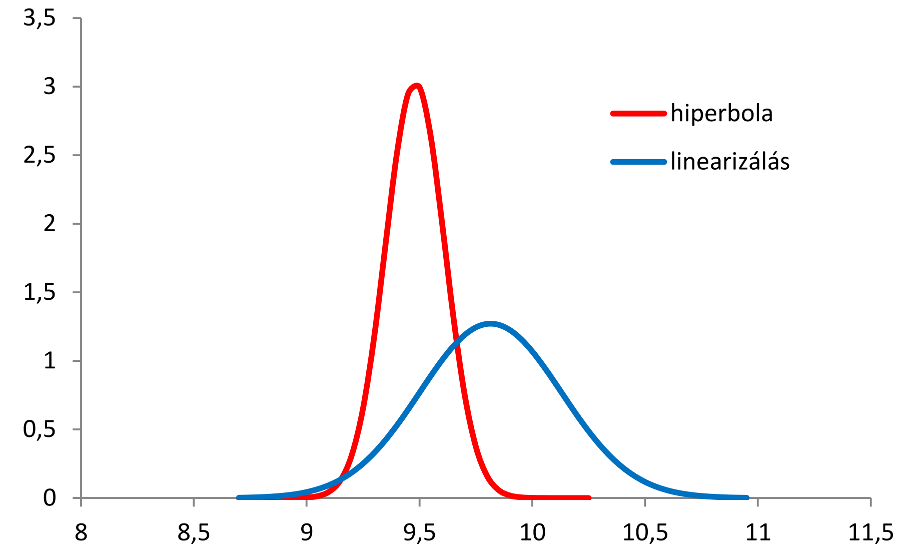
Tehát a linearizált alakból

$E = (9{,}82 \pm 0{,}31)$ V
$R_b = (25{,}4 \pm 11{,}1)\ \Omega$

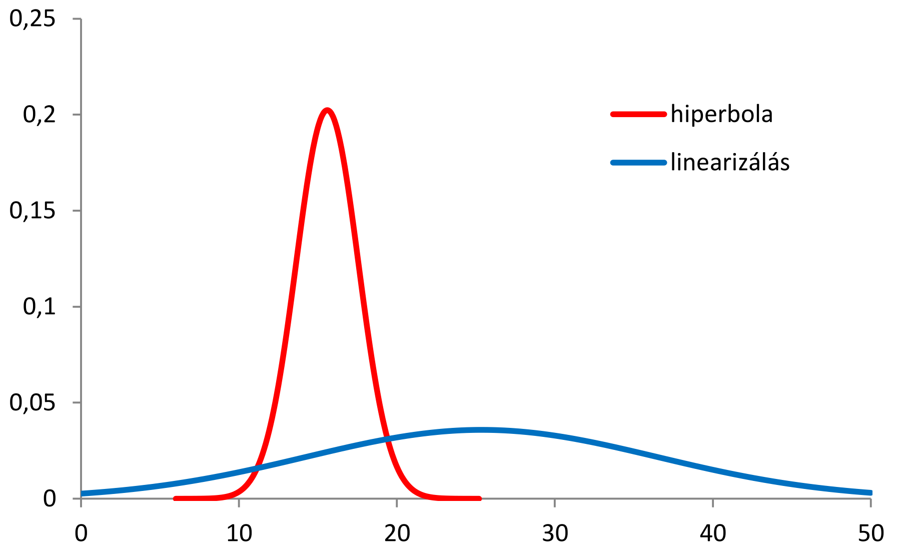
ÖSSZEGZÉS, A KÉT MÓDSZER ÖSSZEHASONLÍTÁSA

	hiperbola (SciDAVis)	**linearizálás (Excel)**
E (V)	9,48 ± 0,132	9,82 ± 0,31
R_b (Ω)	15,6 ± 1,97	25,4 ± 11,1
R^2 = ...	0,9996	0,9959

E elektromotoros erő:



R_b belső ellenállás:



Mi kell a jegyzőkönyvbe?

Egyéni feladatok, pl.:

Vízszintes, súrlódásmentes asztalon elhelyezett rugó végére ’m’ tömeget rögzítve a rugót kihúzzuk, majd elengedve rezgésbe hozzuk. Megmérjük, hogy különböző ’T’ rezgésidők mekkora ’m’ tömegekkel hozhatók létre.

T (s)	x	2	4	6	7	8
m (kg)	y	0,4	1,7	3,8	5,2	6,8

Határozzuk meg a ’k’ rugóállandót!

Görbeillesztés jegyzőkönyv

1. Felírni (röviden levezetni, ha szükséges) azt az összefüggést, ami leírja, hogy a táblázat második sorában szereplő mennyiség hogyan függ a táblázat első sorában szereplő mennyiségtől. Ebben a kifejezésben ismeretlen paraméterként jelenik meg a meghatározandó mennyiség.
2. Az összefüggés nemlineáris. A SciDAVis-be be kell írni a megfelelő függvényt és kiszámoltatni a kérdéses paraméter értékét. A jegyzőkönyvbe a függvényalakot (ahogy a programba be lett írva) és a kapott értéket kell beírni. (Aki nem tudja máshogy megoldani, használhatja a mi számítógépeinket, az időpontot előre egyeztetve.)
3. A nemlineáris összefüggést linearizálni kell, azaz az összefüggést megfelelő átalakítással olyan alakra kell hozni, hogy a második sorban szereplő mennyiség valamilyen függvénye az első sorban szereplő mennyiségnek lineáris függvénye legyen.
4. Le kell vezetni az y = ax egyenes ’a’ meredekségének számolására alkalmas képletet a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazva.
5. A levezetett képlettel ki kell számolni a linearizált függvény meredekségét. A számolást lehet Excellel is végezni, de a jegyzőkönyvbe akkor is be kell írni a részeredményeket (mint pl. a szükséges átlagok).
6. A meredekségből ki kell számolni a kérdéses paraméterértéket.

Ábra, hibaszámítás nem szükséges. Hibaszámítás elvégezhető szorgalmi feladatként.

HIBABECSLÉS

(nem kötelező jegyzőkönyvi feladat, csak szorgalmi)
A szükséges képletek az y = ax + b egyeneshez megtalálhatók a honlapon, itt ugyanezek a képletek láthatók praktikusabb alakban felírva.

A meredekség és a tengelymetszet hibája

y = ax + b egyenes esetén

$$s_r^{\,2} = \frac{\sum(a \cdot x_i + b - y_i)^2}{N-2}$$

N a mérések száma.
Számolás Excellel:

$(a \cdot x_i + b - y_i)^2$ oszlop: $\left(a \cdot R_v + b - \frac{1}{I}\right)^2 \rightarrow$ összeg $\rightarrow$ $s_r^{\,2}$ = ...
$s_r^{\,2}$ = 1,6137 az órai feladatnál

$$\mathrm{Var}[a] = \frac{s_r^{\,2}}{N \cdot \left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)} \rightarrow s_a = \sqrt{\mathrm{Var}[a]}$$

$$\mathrm{Var}[b] = \overline{x^2} \cdot \mathrm{Var}[a] \rightarrow s_b = \sqrt{\mathrm{Var}[b]}\,.$$

az órai feladatnál
Var a = 1,061E-05 s_a = 0,00326
Var b = 1,2776902 s_b = 1,13035

---

y = a x esetén a képletek módosulnak:

$$s_r^{\,2} = \frac{\sum(a \cdot x_i - y_i)^2}{N-1}, \qquad \mathrm{Var}[a] = \frac{s_r^{\,2}}{N \cdot \overline{x^2}} \rightarrow s_a = \sqrt{\mathrm{Var}[a]}$$

Ezek szükségesek a jegyzőkönyvi szorgalmi feladathoz.