**GÖRBEILLESZTÉS GYAKORLAT**

Órai mintafeladat:

 

Rákötünk egy E elektromotoros erejű, Rb belső ellenállású telepre egy Rv változtatható ellenállást, és mérjük az áramot (ideális ampermérővel):

|  |  |
| --- | --- |
| Rv (Ω) | I (A) |
| 100 | 0,082 |
| 200 | 0,044 |
| 250 | 0,036 |
| 300 | 0,030 |
| 400 | 0,022 |
| 600 | 0,016 |

Határozzuk meg E és Rb értékét és szórását!

Van értelme kiszámolni, hogy Rv = (308 ± 71) Ω és I = (0,0383 ± 0,0096) A?

Nincs, mert nem azt várjuk, hogy azonos értéket kapunk Rv-re ill. I-re.

Itt változtatjuk Rv értékét és mérjük az annak következtében változó I értékét, tehát egy összefüggést mérünk ki. Az ismeretlen E és Rb az összefüggésben paraméterek.

Ábrázolhatjuk a mért pontokat pl. Excellel.

Lehet rá illeszteni trendvonalat, és ki lehet íratni az egyenletet is.

Legjobban a hatványfüggvény illeszkedik, y = 5,8536 x–0,925

→ I = 5,8536 Rv–0,925 ; de honnan tudjuk, hogy mennyi E és Rb értéke?

Fel kell írnunk az összefüggést a mért mennyiségek (most Rv és I) és a kiszámítandó mennyiségek (most E és Rb) között:

Ez egy hiperbola: .

Az Excel által illesztett hatványfüggvényben szereplő konstansoknak semmi közük E-hez és Rb-hez. Ha lenne hiperbola is a trendvonalak között, akkor annak a konstansait ki tudnánk olvasni és az megadná E és Rb értékét, de hiperbola nincs.

Másik próbálkozás: 2 ismeretlen van, egy kétváltozós egyenletrendszerből ezeket ki tudjuk számolni, ha a fenti összefüggésbe 2 adatot behelyettesítünk. De most több adatunk van, túlhatározott az egyenletrendszer.

Megtehetnénk azt, hogy létrehozunk minden lehetséges módon kétváltozós egyenletrendszereket az összes adat felhasználásával, ez most n∙(n–1)/2 = 15 egyenletrendszer. Megoldás Excelben az összes megoldást figyelembe véve:

E = (9,57082 ± 0,21946) V,

Rb = (20,9693 ± 9,18895) Ω.

Jó-e ez a megoldás? „Szemre” tudjuk ellenőrizni, ha megrajzoljuk a pontokra a hiperbola függvényt ezekkel az értékekkel. Excellel bonyolult → SciDAVis

SciDavis:

adatokat beírni → PLOT → SCATTER

GRAPH → ADD FUNCTION:

9.57/(x+21) (tizedesvessző nem jó)

x: 90-től 600-ig

Nem rossz, de próbálkozhatunk azzal, hogy tudunk-e jobban illeszkedő hiperbolát létrehozni azzal, hogy kitalálunk más számokat a 9,57 és a 21 helyett.

Ez már görbeillesztés 😊

Mi alapján döntjük el, hogy melyik görbe illeszkedik jobban?

Mi a távolság egy mérési pont és a görbe között?

A hagyományos távolság nem fejezhető ki olyan alakban, amiből a paramétereket meg tudnánk határozni → a függőleges eltérést fogjuk távolságnak hívni.

RAJZ

S = Σ(yi,számolt – yi,mért )2 → min.

Az hiperbolánkra

Szélsőértéke?

 = 0

 = 0

xi -re és yi -re behelyettesíthetők Rv és I értékei (6 adatpár a táblázatból).

|  |  |
| --- | --- |
| xi | yi |
| Rv (Ω) | I (A) |
| 100 | 0,082 |
| 200 | 0,044 |
| 250 | 0,036 |
| 300 | 0,030 |
| 400 | 0,022 |
| 600 | 0,016 |

Csúnya nagy algebrai egyenletrendszer. Megoldása?

Numerikusan pl. Maple, Mathematica, Wolfram alpha (?) megoldja:

E = 9.480524812 V

Rb = 15.59110420 Ω

Megrajzolhatjuk ezt is a SciDAVis-szel.

Ezt a numerikus megoldást egyszerűbben is megkaphatjuk a **SciDAVis** (Origin) segítségével, úgy, hogy nem kell felírni a derivált egyenletrendszert és begépelni abba az adatokat. A SciDAVis-be beépített algoritmus a paraméterek értékét úgy változtatja, hogy S értéke csökkenjen, majd amikor a megadott határnál kisebb lesz, kiírja a paraméterértékeket.

**Illesztés a SciDAVis-ben**

Ez fog kelleni az otthoni feladathoz! [Segédlet a honlapon](https://physics.bme.hu/sites/physics.bme.hu/files/users/BMETE14AX05_kov/1_SciDavis.pdf).



a: E = (9,4805247987374 +/- 0,131725431900025) V

b: Rb = (15,5911037006196 +/- 1,97162054657795) Ω

Chi^2/doF = 2,78453858417807e-07

R^2 = 0,999599250863395

Egyszerűnek tűnik az illesztés, de minden feladat megy ilyen könnyen. Pl. látható hogy itt az Rb relatív szórása milyen nagy, sokkal nagyobb, mint az E relatív szórása.

Mit lehetett csinálni, amíg nem volt numerikus segítség? Linearizálni.

**Lineáris regresszió, azaz**

**a legkisebb négyzetek módszere lineáris függvény esetén:**

y = ax + b

 → min.

 (1)

 (2)

(1):

(2):

→

(1):

 , bővítve

Ezt tudja pl. az Excel. Pl. hiperbolát viszont azért nem tud az Excel, mert ott nem lehetett ilyen zárt képleteket kihozni.

Az órai probléma megoldása linearizálással:

 → f(I) = a∙ Rv + b ????

y = a ∙ x + b

új y: y = ; x nem változott, x = Rv ; a = ; b =

Számolás Excellel:

y oszlop: 1/I

x∙y oszlop: Rv/I

x2 oszlop: Rv2

→ átlagok →

 :

 :

az órai feladatnál

a = 0,101884 → E = 1/a = 9,815049 V

b = 2,583663 → Rb = b/a = 25,35878 Ω

Mértékegységek!

 [Ω]; [1/A]; [Ω2]; = [Ω/A] ;

a = 0,101884 1/V; b = 2,583663 1/A

A linearizálással számolt mást adott, mint a SciDAVis. Miért?

**Hibaterjedés**

Linearizáláskor E és Rb értékét az egyenes meredekségéből és tengelymetszetéből számoljuk, így a hibabecsléshez a meredekség és a tengelymetszet hibáját kell ismernünk. Ezeknek a számítása nem kötelező feladat (ld. lejjebb), de
ha már ismerjük Δa és Δb értékét, akkor ΔE és ΔRb hibaterjedéssel számolható:

 →

ΔE = = 0,3138 V

 →

ΔRb = = 11,124 Ω

Tehát a linearizált alakból

 E = (9,82 ± 0,31) V

 Rb = (25,4 ± 11,1) Ω

**ÖSSZEGZÉS, A KÉT MÓDSZER ÖSSZEHASONLÍTÁSA**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **hiperbola** **(SciDAVis)** | **linearizálás** **(Excel)**  |
| E (V) | 9,48 ± 0,132  | 9,82 ± 0,31  |
| Rb (Ω) | 15,6 ± 1,97  | 25,4 ± 11,1  |
| R2 = … | 0,9996 | 0,9959 |

E elektromotoros erő:

Rb belső ellenállás:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Mi kell a jegyzőkönyvbe?

Egyéni feladatok, pl.:

Vízszintes, súrlódásmentes asztalon elhelyezett rugó végére ’m’ tömeget rögzítve a rugót kihúzzuk, majd elengedve rezgésbe hozzuk. Megmérjük, hogy különböző ’T’ rezgésidők mekkora ’m’ tömegekkel hozhatók létre.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T (s) | x | 2 | 4 | 6 | 7 | 8 |
| m (kg) | y | 0,4 | 1,7 | 3,8 | 5,2 | 6,8 |

Határozzuk meg a ’k’ rugóállandót!

**Görbeillesztés jegyzőkönyv**

1. Felírni (röviden levezetni, ha szükséges) azt az összefüggést, ami leírja, hogy a táblázat második sorában szereplő mennyiség hogyan függ a táblázat első sorában szereplő mennyiségtől. Ebben a kifejezésben ismeretlen paraméterként jelenik meg a meghatározandó mennyiség.
2. Az összefüggés nemlineáris. A SciDAVis-be be kell írni a megfelelő függvényt és kiszámoltatni a kérdéses paraméter értékét. A jegyzőkönyvbe a függvényalakot (ahogy a programba be lett írva) és a kapott értéket kell beírni. (Aki nem tudja máshogy megoldani, használhatja a mi számítógépeinket, az időpontot előre egyeztetve.)
3. A nemlineáris összefüggést linearizálni kell, azaz az összefüggést megfelelő átalakítással olyan alakra kell hozni, hogy a második sorban szereplő mennyiség valamilyen függvénye az első sorban szereplő mennyiségnek lineáris függvénye legyen.
4. Le kell vezetni az y = ax egyenes ’a’ meredekségének számolására alkalmas képletet a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazva.
5. A levezetett képlettel ki kell számolni a linearizált függvény meredekségét. A számolást lehet Excellel is végezni, de a jegyzőkönyvbe akkor is be kell írni a részeredményeket (mint pl. a szükséges átlagok).
6. A meredekségből ki kell számolni a kérdéses paraméterértéket.

Ábra, hibaszámítás nem szükséges. Hibaszámítás elvégezhető szorgalmi feladatként.

**HIBABECSLÉS**

(nem kötelező jegyzőkönyvi feladat, csak szorgalmi)

A szükséges képletek [az y = ax + b egyeneshez megtalálhatók a honlapon](https://physics.bme.hu/sites/physics.bme.hu/files/users/BMETE14AX05_kov/lin_regr.pdf), itt ugyanezek a képletek láthatók praktikusabb alakban felírva.

**A meredekség és a tengelymetszet hibája**

y = ax + b egyenes esetén

N a mérések száma.

Számolás Excellel:

 oszlop: → összeg → = …

 = 1,6137 az órai feladatnál

 →

 → .

az órai feladatnál

Var a = 1,061E-05 sa = 0,00326

Var b = 1,2776902 sb = 1,13035

y = a x esetén a képletek módosulnak:

 , →

Ezek szükségesek a jegyzőkönyvi szorgalmi feladathoz.