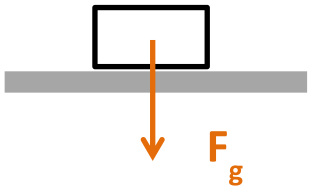
ERŐTÖRVÉNYEK folytatás



1. Földi nehézségi (gravitációs) erő

A Föld által bármely testre kifejtett vonzóerő.

Nagysága: $F_g = mg$, ahol

g a gravitációs gyorsulás, aminek értéke kis mértékben függ attól, hogy a Föld mely pontján van a test, Magyarországon $g \approx 9{,}81$ m/s^2;

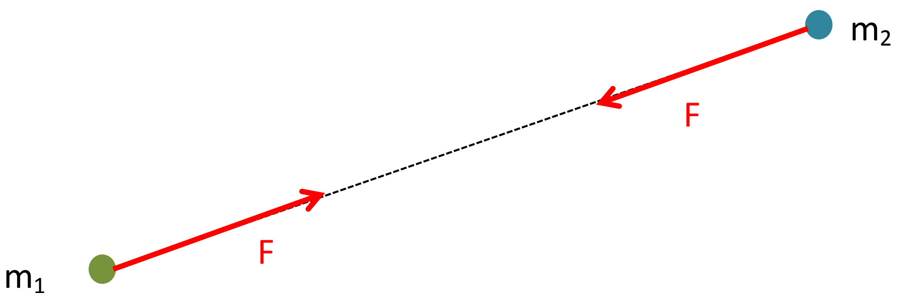
iránya: függőlegesen lefelé;

vektorként: **g**-t vektorként értelmezve $\mathbf{F_g} = m\mathbf{g}$,

vagy függőlegesen felfelé mutató z-tengellyel felírva $\mathbf{F_g} = -mg\,\mathbf{k}$.

2. Általános tömegvonzási (gravitációs) erő

Bármely két test között fellép.



Nagysága:

$$F_{grav} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} ,$$

ahol

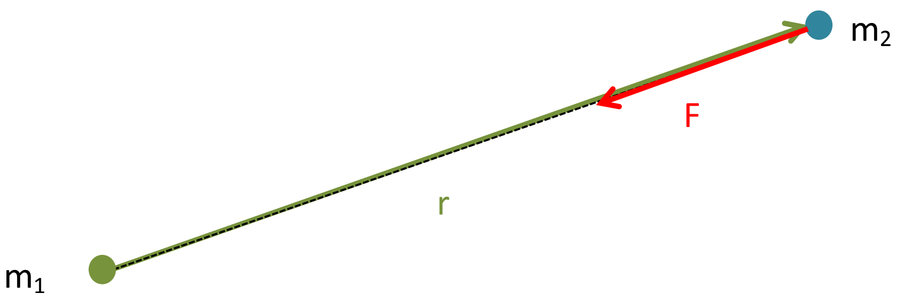
m_1 ill. m_2 a testek tömege [kg],

γ univerzális állandó ($\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^{3}s^2/kg),

d a két tömegpont közötti távolság [m];

iránya: vonzó a két testet összekötő egyenes mentén;

vektorként:



$$\mathbf{F_{grav}} = -\gamma \frac{m_1\, m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} ,$$

ahol **r** az egyikből a másikba mutató vektor.

Az tömegvonzási erő a távolság növekedésével csökken, de sehol nem zérus.

A földi nehézségi erő az általános tömegvonzási erőből származik, ahol a két egymást vonzó test közül az egyik a Föld. Az általános $F_{grav} = \gamma \frac{m_1\, m_2}{d^2}$ képlet tömegpontokra vonatkozik, de a Föld nagy kiterjedésű a felszínén levő testhez képest, nem tekinthető tömegpontnak. Belátható (térfogati integrálból következik), hogy ilyenkor a Föld teljes tömege a Föld középpontjába képzelendő, a távolság pedig a Föld sugara, és így a Föld és a felszínén levő m tömegű test között ható tömegvonzási erő

$$F_{grav} = \gamma \frac{m\, M_{Föld}}{{R_{Föld}}^2},$$

és ezt használjuk röviden

$F_g = mg$ alakban.

Tehát $\gamma \frac{\cancel{m}\, M_{Föld}}{{R_{Föld}}^2} = \cancel{m}g \quad \rightarrow$

a gravitációs gyorsulás értéke a Föld felszínén

$$g_0 = \gamma \frac{M_{Föld}}{{R_{Föld}}^2}.$$

A $\gamma = 6{,}67430 \cdot 10^{-11}\ m^3 s^2/kg$, $M_{Föld} = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg, és $R_{Föld} = 6371$ km értékek behelyettesítésével kapjuk meg g_0 értékét (ld. lejjebb).

g értéke függ a földrajzi szélességtől

egyrészt, mert a Föld nem gömb alakú:

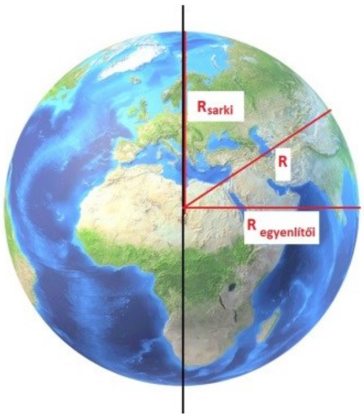
a sugara az Egyenlítőnél nagyobb

($R_{Föld,E} = 6378{,}2$ km, a saroknál $R_{Föld,s} = 6356{,}8$ km)

mivel $g \sim 1/(R_{Föld})^2 \rightarrow$ g értéke kisebb az Egyenlítőnél;

másrészt, mert a Föld forog

ld. később a neminercia-rendszereknél!



	$R_{Föld}$ (km)	$g_{számolt,1}$ (m/s^2)	$g_{mért}$ (m/s^2)
Egyenlítő	6378,2	9,798	9,780
sarok	6356,8	9,864	9,832

Budapesten $g = 9{,}81\ m/s^2$, a nagy pontosságot nem igénylő számolásoknál $g \approx 10\ m/s^2$.

g értéke függ a tengerszint feletti magasságtól:

a tengerszinten

$$F_0 = \gamma \frac{m\, M_{Föld}}{{R_{Föld}}^2} = mg_0 \quad \rightarrow \quad g_0 = \gamma \frac{M_{Föld}}{{R_{Föld}}^2};$$

h magasságban

$$F_h = \gamma \frac{m\, M_{Föld}}{(R_{Föld}+h)^2} = m\, g_h \quad \rightarrow \quad g_h = \gamma \frac{M_{Föld}}{(R_{Föld}+h)^2}.$$

g_h és g_0 hányadosát képezve egyszerűsíthetünk γ és $M_{Föld}$ értékével $\rightarrow$

$$\frac{g_h}{g_0} = \left(\frac{R_{Föld}}{R_{Föld}+h}\right)^2,$$

így csökken a Földön a tengerszinttől távolodva g értéke (a Mount Everesten ez kb. 0,3 %-os csökkenés).

Eddig homogénnek tételeztük fel a Földet, de g értéke függ még a helyi kőzettömegektől is.

Kérdés: A Föld és egy ember közötti kölcsönhatásban melyikre hat nagyobb ható tömegvonzási erő?

$F_{grav} = \gamma \frac{m_{ember} M_{Föld}}{R_{Föld}{}^2}$: az erő egyenlő!

de a gyorsulások eltérnek:

$m_{ember}\, a_{ember} = \gamma \frac{m_{ember} M_{Föld}}{R_{Föld}{}^2} \rightarrow a_{ember} = \gamma \frac{M_{Föld}}{R_{Föld}{}^2}$

$M_{Föld}\, a_{Föld} = \gamma \frac{m_{ember} M_{Föld}}{R_{Föld}{}^2} \rightarrow a_{Föld} = \gamma \frac{m}{R_{Föld}{}^2}$

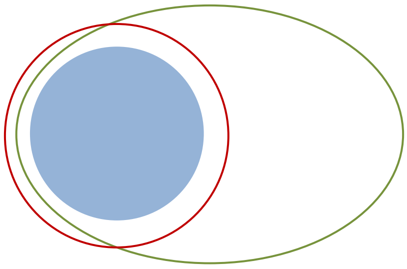
$a_{Föld} << a_{ember}$.

A $F_g = mg$ erőből levezettük, hogy a hajítás pályája egy parabola.

<u>Mi történik, ha a Föld felszínéről egyre nagyobb kezdősebességgel „dobunk” fel valamit?</u>

Amíg konstans mg-vel számolhatunk (azaz nem kell figyelembe vennünk, hogy a Föld középpontjától mért távolság növekedése miatt a gravitációs erő csökken): a pálya parabola.

Ha magasabbra „dobjuk” / lőjük, akkor már nem számolhatunk konstans g-vel, hanem az általános tömegvonzási erővel kell számolni.



Lesz egy speciális sebesség, amikor a test éppen körpályán „körbeesi” a Földet: $v_1 \approx 7{,}9$ km/s (ennek levezetését ld. később a körmozgás dinamikájánál); ez az első kozmikus sebesség, amivel Föld körüli körpályára lehet állítani valamit.

Ha a felszínről kilőtt test v sebessége ennél kisebb vagy nagyobb, akkor ellipszis alakú a pálya, csak az a különbség, hogy $v < v_1$ esetén a Föld középpontja az ellipszispálya eldobástól távolabbi fókuszpontjában van, $v > v_1$ esetén pedig a közelebbiben.

Tovább növelve a sebességet elérjük a második kozmikus (azaz szökési) sebességet: $v_2 \approx 11{,}2$ km/s (ennek levezetését ld. később az energia-megmaradásnál); ez az a legkisebb sebesség, amely esetén már nem jön vissza a Földre, hanem parabolapályán távolodik a Földtől.

Ha ennél is nagyobb a kezdősebesség, a test hiperbola pályán távolodik a Földtől.

Bolygómozgás

Ha két bolygó mozog szabadon, egymást vonzva („kéttest probléma”), annak még van analitikus megoldása.

https://www.youtube.com/watch?v=m4WOU1wZRVY

Három bolygó mozgása már nagyon bonyolult lehet:

https://www.youtube.com/watch?v=rr0JpgKPKgg

Naprendszer: hány bolygó van? 9 $\rightarrow$ 10 $\rightarrow$ 8 (Pluto…).

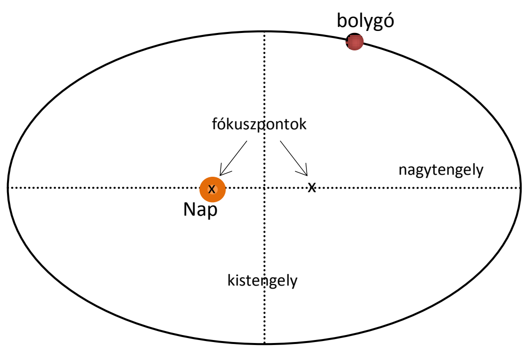
https://www.youtube.com/watch?v=gvSUPFZp7Yo

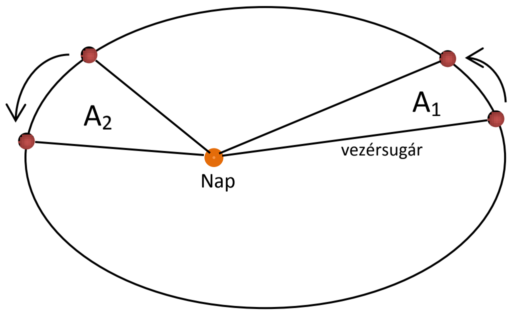
Mivel a Naprendszer bolygóira felírt mozgásegyenleteknek nincs analitikus megoldása (és a numerikus se könnyű), ezért jönnek jól

Kepler törvényei

http://nagysandor.eu/AsimovTeka/Kepler/full.html

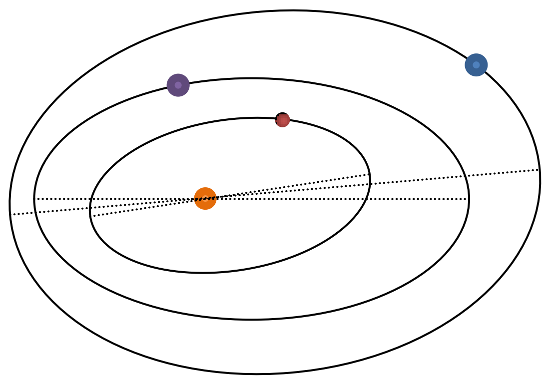
I. A bolygók ellipszis alakú pályán mozognak, a pálya egyik fókuszpontjában a Nap van.





II. A Naptól a bolygókhoz húzott vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol (azaz a területi sebesség állandó) [ez azt jelenti, hogy Napközelben nagyobb a bolygó sebessége].

III. T^2 / a^3 = konst. minden bolygóra, ahol T a bolygó keringési ideje, ’a’ a pálya nagytengelyének fele.



Pálya excentricitása: (a középpont és gyújtópont távolsága) / (nagytengely fele)

0: kör; 0–1: ellipszis; 1: parabola; 1– : hiperbola

pl. Föld: nagytengely fele 149597887,5 km, kistengely fele 149576999,8 km, excentricitás 0,0167

A bolygók pályájának excentricitása kicsi, az ellipszisek jó közelítéssel körnek tekinthetők, a pálya nagytengelyének fele (a) helyett használható az R pályasugár.

A III. Kepler törvény képletének értelmezésére a körmozgásnál visszatérünk.

Példa III. Kepler-törvény alkalmazására:

A Neptunusz keringési ideje ≈165 (földi) év.

Milyen távolságban kering a Neptunusz a Nap körül?

Adatok:

T_{Neptun} = 165 (földi) év

$T_{Föld}$ = 1 év

$a_{Föld}$ = 150 millió km = 1 CSE

(A Nap felszínéről a Földre 8,3 perc alatt ér a fény; a Nap-Föld távolság 150 millió km.)

Mivel T^2 / a^3 = konst. $\rightarrow$

$$\frac{{T_{Föld}}^2}{{a_{Föld}}^3} = \frac{{T_{Neptun}}^2}{{a_{Neptun}}^3},$$

azaz

$$\left(\frac{a_{Neptun}}{a_{Föld}}\right)^3 = \left(\frac{T_{Neptun}}{T_{Föld}}\right)^2 = \left(\frac{165}{1}\right)^2 = 27225,$$

amiből

$$\frac{a_{Neptun}}{a_{Föld}} \approx 30,$$

és behelyettesítve a Nap-Föld távolságot

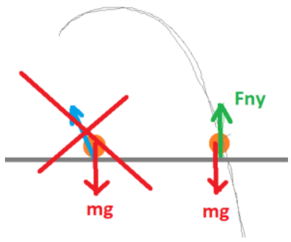
$a_{Neptun} = 30\ a_{Föld} = 30\cdot150\cdot10^6$ km $= 4500\cdot10^6$ km $= 4{,}5\cdot10^{12}$ m (30 CSE).

A pontos adat: $4495\cdot10^6$ km.

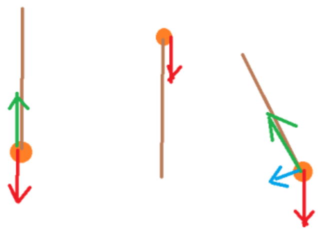
3) Kényszererők: felület, kötél, rúd

A testek mozgását felület, kötél, rúd korlátozza, ezt a geometriai kényszert a test és a felület, kötél, rúd között ható erővel írjuk le.
A kényszererőknek csak az irányukat tudjuk (a geometriai kényszer miatt), a nagyságukat nem, az mindig az adott problémából adódik!

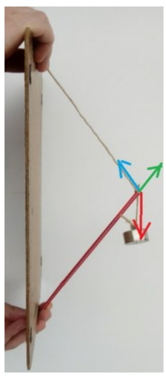
A testre a felület által kifejtett $\mathbf{F_{ny}}$ **nyomóerő**:
iránya: a felületre merőleges (ha görbült a felület, akkor a pontbeli érintősíkra merőleges); csak nyomni tud;
nagysága akkora, hogy a test a felületen maradjon.
Példák, rajzok: vízszintes sík, lejtő, körpálya; külső erő hatása.



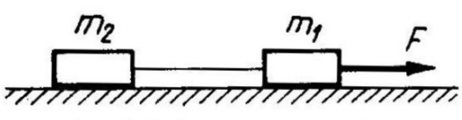
A testre a kötél által kifejtett $\mathbf{F_{kötél}}$ **kötélerő**:
iránya: csak húzni tudja a testet, kötélirányban;
nagysága: a test a kötél hosszánál távolabbra nem kerülhet a kötél rögzítési pontjától.
Példák, rajzok: függőleges helyzet; inga szélső pontja, alsó pontja, általános helyzete.



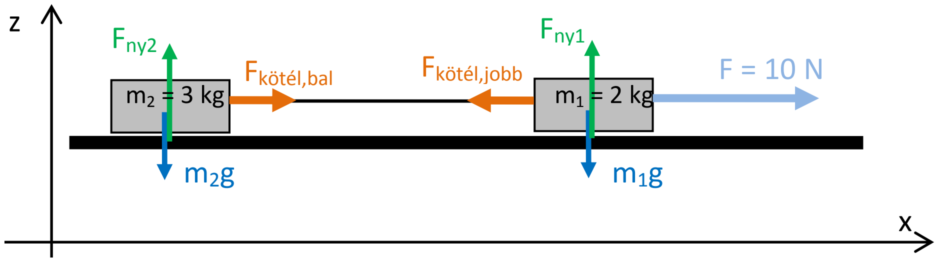
A testre rúd által kifejtett $\mathbf{F_{rúd}}$ **rúderő**:
iránya: húzni és nyomni is tudja a testet, rúdirányban;
nagysága abból adódik, hogy a rúd hossza nem változhat.



Példa: Vízszintes irányú, F = 10 N nagyságú erővel hatunk az m_1 = 2 kg tömegű testre, amely egy fonállal az m_2 = 3 kg tömegű testhez van kötve az ábrán látható elrendezésben. Mekkora erő feszíti a fonalat, ha a fonál tömegétől és a súrlódástól eltekintünk?



Megoldás



A testek mozgásegyenlete vektori alakban:

$m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{F} + m_1\mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny,1} + \mathbf{F}_{kötél,jobb}$;

$m_2\mathbf{a_2} = m_2\mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny,2} + \mathbf{F}_{kötél,bal}$

$\mathbf{F}_{kötél,jobb} = \mathbf{F}_{kötél,bal}$, mert a kötél tömege elhanyagolható $\rightarrow$ jelölje $\mathbf{F_k}$;

$\mathbf{a_1} = \mathbf{a_2}$, mert a kötél nyújthatatlan;

ezeket felhasználva:

$m_1\mathbf{a} = \mathbf{F} + m_1\mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny,1} + \mathbf{F_k}$;

$m_2\mathbf{a} = m_2\mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny,2} + \mathbf{F_k}$

A függőleges erők eredője zérus, mert a testek a felületen mozognak:

$F_{ny,1} - m_1g = 0 \quad \rightarrow \quad F_{ny,1} = m_1g$;

$F_{ny,2} - m_2g = 0 \quad \rightarrow \quad F_{ny,2} = m_2g$.

A vízszintes komponensek:

$m_1a = F - F_k$;

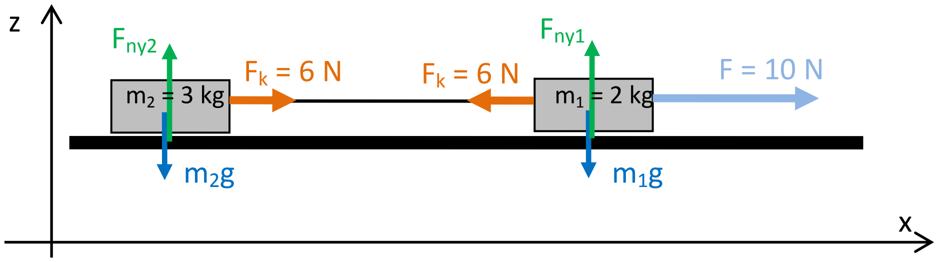
$m_2a = F_k$.

A két egyenletet összeadva F_k kiesik:

$(m_1+m_2)\ a = F \quad \rightarrow$

$a = F / (m_1+m_2) = 10/(2+3) = 2\ m/s^2 \quad \rightarrow \quad F_k = 6$ N.

Megjegyzés:



m_1-et $F - F_{kötél}$ gyorsítja: $a_1 = (F - F_{kötél})/m_1$,

m_2-t pedig $F_{kötél}$ gyorsítja: $a_2 = F_{kötél}/m_2$,

ezek hatására lesz $a_1 = a_2$.

A számértékekkel:

$a_1 = (F - F_{kötél})/m_1 = (10–6)/2 = 4/2 = 2\ m/s^2$; $a_2 = F_{kötél}/m_2 = 6/3 = 2\ m/s^2$.