**ERŐTÖRVÉNYEK** folytatás

**Fg**

**1. Földi nehézségi (gravitációs) erő**

A Föld által bármely testre kifejtett vonzóerő.

Nagysága: Fg = mg, ahol  
g a gravitációs gyorsulás, aminek értéke kis mértékben függ attól, hogy a Föld mely pontján van a test, Magyarországon g ≈ 9,81 m/s2;

iránya: függőlegesen lefelé;

vektorként: **g**-t vektorként értelmezve **Fg** = m**g** ,

vagy függőlegesen felfelé mutató z-tengellyel felírva **Fg** = –mg **k** .

**2. Általános tömegvonzási (gravitációs) erő**

Bármely két test között fellép.

m1

m2

F

F

Nagysága:

Fgrav = γ ,

ahol

m1 ill. m2 a testek tömege [kg],

γ univerzális állandó (γ = 6,67·10–11 m3s2/kg ),

d a két tömegpont közötti távolság [m];

iránya: vonzó a két testet összekötő egyenes mentén;

vektorként:

m1

m2

r

F

,

ahol **r** az egyikből a másikba mutató vektor.

Az tömegvonzási erő a távolság növekedésével csökken, de sehol nem zérus.

A földi nehézségi erő az általános tömegvonzási erőből származik, ahol a két egymást vonzó test közül az egyik a Föld. Az általános képlet tömegpontokra vonatkozik, de a Föld nagy kiterjedésű a felszínén levő testhez képest, nem tekinthető tömegpontnak. Belátható (térfogati integrálból következik), hogy ilyenkor a Föld teljes tömege a Föld középpontjába képzelendő, a távolság pedig a Föld sugara, és így a Föld és a felszínén levő m tömegű test között ható tömegvonzási erő

,

és ezt használjuk röviden

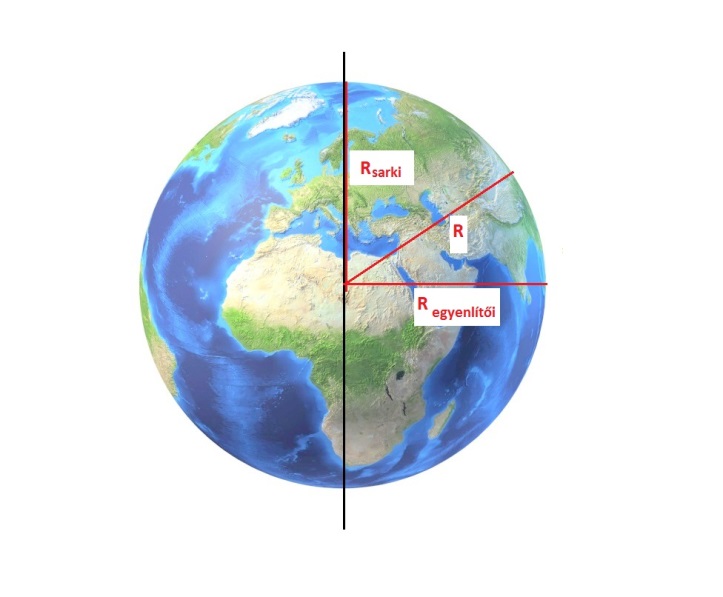
Fg = mg alakban.

Tehát = ~~m~~g →

a gravitációs gyorsulás értéke a Föld felszínén

g0 = .

A γ = 6,67430⋅10–11 m3s2/kg, MFöld = 5,972⋅1024 kg, és RFöld = 6371 km értékek behelyettesítésével kapjuk meg g0 értékét (ld. lejjebb).

g értéke függ a földrajzi szélességtől

egyrészt, mert a Föld nem gömb alakú:

a sugara az Egyenlítőnél nagyobb

(RFöld,E = 6378,2 km, a saroknál RFöld,s = 6356,8 km)

mivel g ~ 1/(RFöld)2 → g értéke kisebb az Egyenlítőnél;

másrészt, mert a Föld forog

ld. később a neminercia-rendszereknél!

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | RFöld (km) | gszámolt,1 (m/s2) | gmért (m/s2) |
| Egyenlítő | 6378,2 | 9,798 | 9,780 |
| sarok | 6356,8 | 9,864 | 9,832 |

Budapesten g = 9,81 m/s2 , a nagy pontosságot nem igénylő számolásoknál g ≈ 10 m/s2.

g értéke függ a tengerszint feletti magasságtól:

a tengerszinten

F0 = = mg0 → g0 = ;

h magasságban

Fh = = m gh → gh = .

gh és g0 hányadosát képezve egyszerűsíthetünk és MFöld értékével →

,

így csökken a Földön a tengerszinttől távolodva g értéke (a Mount Everesten ez kb. 0,3 %-os csökkenés).

Eddig homogénnek tételeztük fel a Földet, de g értéke függ még a helyi kőzettömegektől is.

Kérdés: A Föld és egy ember közötti kölcsönhatásban melyikre hat nagyobb ható tömegvonzási erő?

: az erő egyenlő!

de a gyorsulások eltérnek:

member aember → aember

MFöld aFöld → aFöld

aFöld << aember.

A Fg = mg erőből levezettük, hogy a hajítás pályája egy parabola.

Mi történik, ha a Föld felszínéről egyre nagyobb kezdősebességgel „dobunk” fel valamit?

Amíg konstans mg-vel számolhatunk (azaz nem kell figyelembe vennünk, hogy a Föld középpontjától mért távolság növekedése miatt a gravitációs erő csökken): a pálya parabola.

Ha magasabbra „dobjuk” / lőjük, akkor már nem számolhatunk konstans g-vel, hanem az általános tömegvonzási erővel kell számolni.

Lesz egy speciális sebesség, amikor a test éppen körpályán „körbeesi” a Földet: v1 ≈ 7,9 km/s (ennek levezetését ld. később a körmozgás dinamikájánál); ez az első kozmikus sebesség, amivel Föld körüli körpályára lehet állítani valamit.

Ha a felszínről kilőtt test v sebessége ennél kisebb vagy nagyobb, akkor ellipszis alakú a pálya, csak az a különbség, hogy v < v1 esetén a Föld középpontja az ellipszispálya eldobástól távolabbi fókuszpontjában van, v > v1 esetén pedig a közelebbiben.

Tovább növelve a sebességet elérjük a második kozmikus (azaz szökési) sebességet: v2 ≈ 11,2 km/s (ennek levezetését ld. később az energia-megmaradásnál); ez az a legkisebb sebesség, amely esetén már nem jön vissza a Földre, hanem parabolapályán távolodik a Földtől.

Ha ennél is nagyobb a kezdősebesség, a test hiperbola pályán távolodik a Földtől.

**Bolygómozgás**

Ha két bolygó mozog szabadon, egymást vonzva („kéttest probléma”), annak még van analitikus megoldása.

<https://www.youtube.com/watch?v=m4WOU1wZRVY>

Három bolygó mozgása már nagyon bonyolult lehet:

<https://www.youtube.com/watch?v=rr0JpgKPKgg>

Naprendszer: hány bolygó van? 9 → 10 → 8 (Pluto…).

<https://www.youtube.com/watch?v=gvSUPFZp7Yo>

Mivel a Naprendszer bolygóira felírt mozgásegyenleteknek nincs analitikus megoldása (és a numerikus se könnyű), ezért jönnek jól

**Kepler törvényei**

<http://nagysandor.eu/AsimovTeka/Kepler/full.html>

|  |  |
| --- | --- |
| 1. A bolygók ellipszis alakú pályán mozognak, a pálya egyik fókuszpontjában a Nap van. | Nap  bolygó  nagytengely  kistengely  x  x  fókuszpontok |
| vezérsugár  A1  A2  Nap | 1. A Naptól a bolygókhoz húzott vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol (azaz a területi sebesség állandó)   [ez azt jelenti, hogy Napközelben nagyobb a bolygó sebessége]. |
| 1. T2 / a3 = konst. minden bolygóra,   ahol T a bolygó keringési ideje,  ’a’ a pálya nagytengelyének fele. |  |

Pálya excentricitása: (a középpont és gyújtópont távolsága) / (nagytengely fele)

0: kör; 0–1: ellipszis; 1: parabola; 1– : hiperbola

pl. Föld: nagytengely fele 149597887,5 km, kistengely fele 149576999,8 km, excentricitás 0,0167

A bolygók pályájának excentricitása kicsi, az ellipszisek jó közelítéssel körnek tekinthetők, a pálya nagytengelyének fele (a) helyett használható az R pályasugár.

A III. Kepler törvény képletének értelmezésére a körmozgásnál visszatérünk.

Példa III. Kepler-törvény alkalmazására:

A Neptunusz keringési ideje ≈165 (földi) év.

Milyen távolságban kering a Neptunusz a Nap körül?

Adatok:

TNeptun = 165 (földi) év

TFöld = 1 év

aFöld = 150 millió km = 1 CSE

(A Nap felszínéről a Földre 8,3 perc alatt ér a fény; a Nap-Föld távolság 150 millió km.)

Mivel T2 / a3 = konst. →

,

azaz

,

amiből

≈ 30,

és behelyettesítve a Nap-Föld távolságot

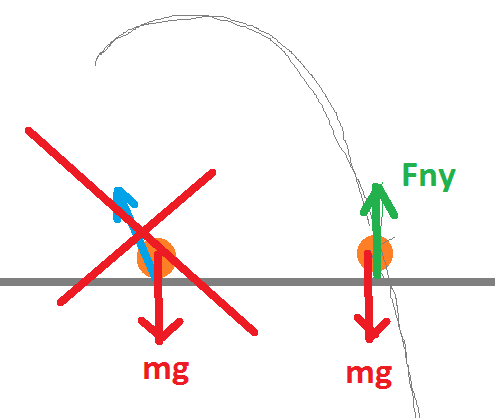
aNeptun = 30 aFöld = 30·150·106 km = 4500·106 km = 4,5·1012 m (30 CSE).

A pontos adat: 4495·106 km.

**3) Kényszererők: felület, kötél, rúd**

A testek mozgását felület, kötél, rúd korlátozza, ezt a geometriai kényszert a test és a felület, kötél, rúd között ható erővel írjuk le.

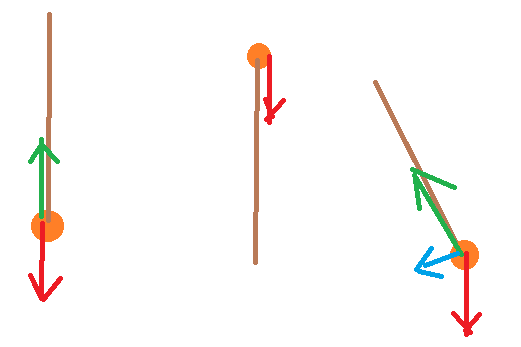
A kényszererőknek csak az irányukat tudjuk (a geometriai kényszer miatt), a nagyságukat nem, az mindig az adott problémából adódik!

A testre a felület által kifejtett **Fny** **nyomóerő**:

iránya: a felületre merőleges (ha görbült a felület, akkor a pontbeli érintősíkra merőleges); csak nyomni tud;

nagysága akkora, hogy a test a felületen maradjon.

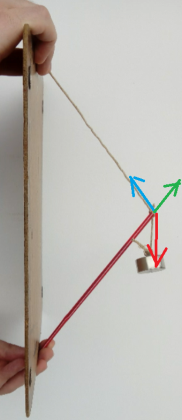
Példák, rajzok: vízszintes sík, lejtő, körpálya; külső erő hatása.

A testre a kötél által kifejtett **Fkötél** **kötélerő**:

iránya: csak húzni tudja a testet, kötélirányban;

nagysága: a test a kötél hosszánál távolabbra nem kerülhet a kötél rögzítési pontjától.

Példák, rajzok: függőleges helyzet; inga szélső pontja, alsó pontja, általános helyzete.

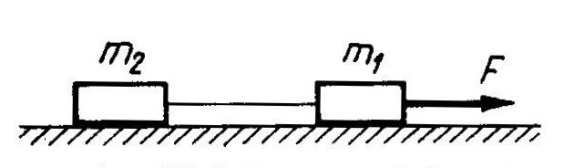
****

A testre rúd által kifejtett **Frúd** **rúderő**:

iránya: húzni és nyomni is tudja a testet, rúdirányban;

nagysága abból adódik, hogy a rúd hossza nem változhat.

Példa: Vízszintes irányú, F = 10 N nagyságú erővel hatunk az m1 = 2 kg tömegű testre, amely egy fonállal az m2 = 3 kg tömegű testhez van kötve az ábrán látható elrendezésben. Mekkora erő feszíti a fonalat, ha a fonál tömegétől és a súrlódástól eltekintünk?



Megoldás

Fkötél,bal

Fkötél,jobb

F = 10 N

m1 = 2 kg

m2 = 3 kg

m2g

m1g

Fny1

Fny2

z

x

A testek mozgásegyenlete vektori alakban:

m1**a**1 = **F** + m1**g** + **Fny,1** + **Fkötél,jobb** ;

m2**a2** = m2**g** + **Fny,2** + **Fkötél,bal**

**Fkötél,jobb** = **Fkötél,bal** , mert a kötél tömege elhanyagolható → jelölje **Fk**;

**a1** = **a2** , mert a kötél nyújthatatlan;

ezeket felhasználva:

m1**a** = **F** + m1**g** + **Fny,1** + **Fk** ;

m2**a** = m2**g** + **Fny,2** + **Fk**

A függőleges erők eredője zérus, mert a testek a felületen mozognak:

Fny,1 – m1g = 0 → Fny,1 = m1g;

Fny,2 – m2g = 0 → Fny,2 = m2g.

A vízszintes komponensek:

m1a = F – Fk ;

m2a = Fk .

A két egyenletet összeadva Fk kiesik:

(m1+m2) a = F →

a = F / (m1+m2) = 10/(2+3) = 2 m/s2 → Fk = 6 N.

Megjegyzés:

Fk = 6 N

Fk = 6 N

F = 10 N

m1 = 2 kg

m2 = 3 kg

m2g

m1g

Fny1

Fny2

z

x

m1-et F – Fkötél gyorsítja: a1 = (F – Fkötél)/m1 ,

m2-t pedig Fkötél gyorsítja: a2 = Fkötél/m2 ,   
ezek hatására lesz a1 = a2.

A számértékekkel:

a1 = (F – Fkötél)/m1 = (10–6)/2 = 4/2 = 2 m/s2; a2 = Fkötél/m2 = 6/3 = 2 m/s2.