DINAMIKA

Newton axiómái

I. axióma: ha nincs kölcsönhatás → (inerciarendszerben) nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgás végez: a sebességvektora állandó, **v** = konst. → a gyorsulása zérus.
https://www.youtube.com/watch?v=LmRkPyuet_o

II. axióma: a dinamika alaptörvénye.
A test gyorsulása arányos a rá ható erővel:

$$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{F},$$

az arányossági tényező a test tömege:

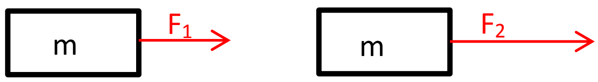
$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}\ .$$

Új fizikai mennyiség az $\boldsymbol{F}$ és az m:
az m **tömeg** a **tehetetlenség mértéke** [kg],
az $\boldsymbol{F}$ **erő** a **kölcsönhatás mértéke** [N],
ezeket az alábbi mérési utasításokkal definiáljuk:

Dinamikai és sztatikai erő- és tömegmérés

Sztatikai tömeg- ill. erőmérés: Az ismeretlen tömeg ill. erő mellett szükségünk van ismert, változtatható nagyságú tömegre ill. erőre, és egy „nulldetektor"-ra. Az ismeretlen tömeget / erőt összehasonlítjuk az ismert tömeggel / erővel, aminek nagyságát tudjuk változtatni. A nulldetektor mutatja, hogy mikor egyenlőek. Pl. tömegmérés kétkarú mérleggel; erők összehasonlítása hasonlóan (ismert erő lehet pl. rugós erőmérő).

Dinamikai mérés:
Dinamikai erőmérésnél egy testet (aminek a tömegét nem ismerjük) gyorsítunk egy ismert nagyságú F_1 erővel → a test a_1 gyorsulással mozog, ill.
az ismeretlen F_2 erővel → a test a_2 gyorsulással mozog.

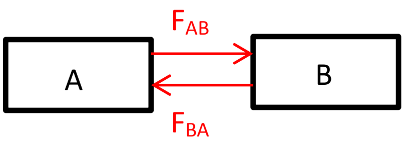


Mivel a tömeg állandó, ezért $F_2/a_2 = F_1/a_1$, amiből F_2-t ki tudjuk számolni.
(Ismert nagyságú erőt rugóval vagy tömeggel hozunk létre.)
A gyorsulásokat a gyorsított test mozgásából (idő- és helymérés alapján) tudjuk kiszámolni.

Dinamikai tömegmérésnél azonos (de nem ismert) nagyságú erővel gyorsítjuk
az ismert m_1, ill.
az ismeretlen m_2 tömegű testet,

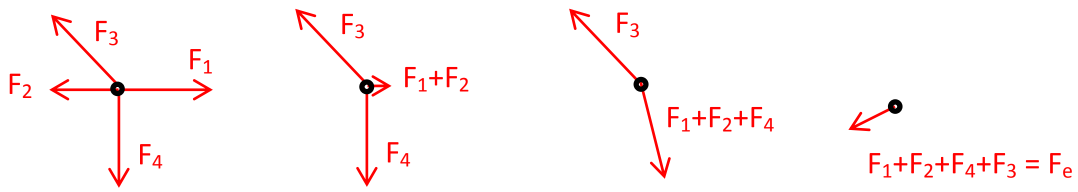
meghatározzuk a gyorsulásukat,
és mivel F állandó, $m_1 a_1 = m_2 a_2$ alapján számoljuk ki az ismeretlen tömeget.

<u>**III. axióma**</u>: kölcsönhatás törvénye.
Jelölje $\boldsymbol{F}_{AB}$ az A test által a B testre kifejtett erőt, és $\boldsymbol{F}_{BA}$ a B test által az A testre kifejtett erőt; a két erő egyenlő nagyságú, megegyező hatásvonalú és ellentétes irányú, azaz $\boldsymbol{F}_{BA} = -\boldsymbol{F}_{AB}$, azaz
$\boldsymbol{F}_{AB} + \boldsymbol{F}_{BA} = \boldsymbol{0}$.



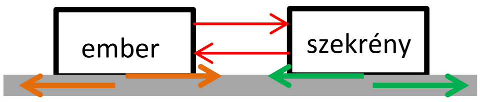
Az erő-ellenerő (akció-reakció) megnevezés azt sugallja, hogy az egyik váltja ki a másikat, időben késleltetés van közöttük, de ez nem igaz, egyszerre, egy időben lépnek fel.

<u>**IV. axióma**</u>: szuperpozíció törvénye (az erők összegzése).
Ha egy testre egyszerre több erő is hat, akkor a test gyorsulását az erők vektori eredője határozza meg: $\boldsymbol{F}_{eredő} = \Sigma \boldsymbol{F}_i$, az $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ egyenletbe az erők vektori eredőjét kell írni: $\Sigma \boldsymbol{F}_i = m\boldsymbol{a}$.
Ez azt is jelenti, hogy az egyszerre fellépő erők nem befolyásolják egymást (vagyis a kölcsönhatások egymástól függetlenek).

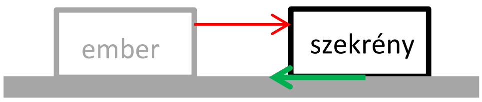


Kérdés: hogy is tudunk eltolni egy szekrényt? A III. axióma szerint $\Sigma \boldsymbol{F} = 0$, a IV. axióma szerint $\Sigma \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, akkor ezek szerint mindig $\boldsymbol{a} = 0$?!? Nem, a kérdés az, hogy mikor mire összegzünk: a III. axióma egy kölcsönhatásra, a IV. axióma pedig egy testre vonatkozik!

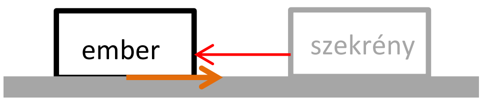
3 test van kölcsönhatásban: az ember, a szekrény, és a padló. Egy-egy kölcsönhatásban érvényes a III. axióma, az erő nagysága egyenlő:

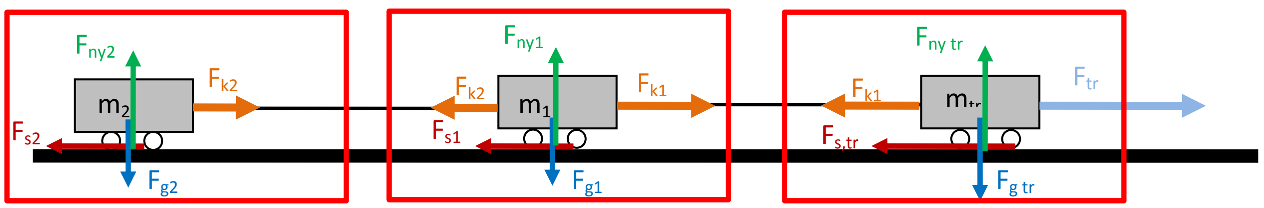


A szekrény két kölcsönhatásban vesz részt, a két erő eredője határozza meg a gyorsulását:



Az ember két kölcsönhatásban vesz részt, a két erő eredője határozza meg a gyorsulását:





MOZGÁSEGYENLET

Az $m\boldsymbol{a} = \Sigma \boldsymbol{F}_i$ egyenletbe
egyrészt behelyettesítjük az egyes kölcsönhatásoknak megfelelő erőtörvényeket (ld. később), amelyek általánosan $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$ alakban írhatók fel;
másrészt tudjuk kinematikából, hogy $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}$; ezeket behelyettesítve

$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t)$: ez a test **mozgásegyenlet**e ,

(matematikailag ez egy másodrendű differenciálegyenlet)
ennek megoldásaként kapjuk az $\boldsymbol{r}(t)$ függvényt, ami a mozgást leírja. A megoldáshoz szükség van 2 integrációs állandóra, azaz a kezdeti helyvektorra és a kezdősebességre is (vagy hely és sebesség vektorára bármely időpontban).
Determinisztikus, azaz a mozgásegyenlet és a kezdeti feltételek ismeretében a jövőbeli viselkedés meghatározható.
[De: létezik determinisztikus káosz is! ilyenkor a rendszer nagyon érzékeny a kezdeti feltételekre, a közeli állapotok kis eltérése exponenciálisan növekedhet, és mivel a valóságban kis eltérésekre mindig számítani kell, a viselkedés megjósolhatatlan lesz.
Pl. https://www.youtube.com/watch?v=N6cwXkHxLsU]

ERŐTÖRVÉNYEK

avagy: mitől, hogyan függ az egyes kölcsönhatásokban fellépő erő? milyen alakú az $\boldsymbol{F}(\ldots)$ függvény?

Általánosan az erő függhet a test helyétől, sebességétől, és függhet az időtől is: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$
Akkor van úgy-ahogy könnyű dolgunk, ha $\boldsymbol{v}$-től nem függ.
Ha nem függ helytől: HOMOGÉN
Ha nem függ időtől: STACIONÁRIUS

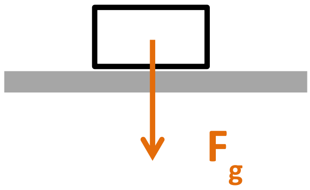
Ezeket az erőtörvények fogjuk tanulni:
1) Általános tömegvonzási (gravitációs) erő:
2) Földi nehézségi (gravitációs) erő:
3) Kényszererők: felület, kötél, rúd
4) Súrlódási erők (csúszási és gördülési súrlódás, tapadási súrlódás)
5) Közegellenállási erő
6) Lineáris rugalmas erő, rugóerő

Erőnek hívjuk, de nem erőtörvények:
– a centripetális „erő”: mint látni fogjuk, ez nem a $\Sigma\boldsymbol{F}$-ben jelenik meg, hanem az $m\boldsymbol{a}$ tartalmaz ma_{cp} = „F_{cp}” -t, ha a mozgás görbe vonalú (az erők eredőjének a sebességre merőleges komponense). Nem köthető egy bizonyos kölcsönhatáshoz (többféle kölcsönhatásból is származhat);
– a tehetetlenségi erők (transzlációs, centrifugális, Coriolis, Euler erő).

Nézzük sorra az erőtörvényeket, és hogy mi következik belőlük:

Földi nehézségi (gravitációs) erő

A Föld által bármely testre kifejtett vonzóerő.



Nagysága: $F_g = mg$, ahol

g a gravitációs gyorsulás, aminek értéke kis mértékben függ attól, hogy a Föld mely pontján van a test (ld. később), Magyarországon $g \approx 9{,}81$ m/s^2;

iránya: függőlegesen lefelé;

vektorként: $\boldsymbol{g}$-t vektorként értelmezve $\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{g}$,

vagy függőlegesen felfelé mutató z-tengellyel felírva $\boldsymbol{F}_g = -mg\,\boldsymbol{k}$.

Alkalmazás:

Hajítás

A test szabadon mozog, a testre ható egyetlen erő a nehézségi erő, ami adott testre egy konstans erő, mert hajítás esetén eltekinthetünk g helyfüggésétől.

Tetszőleges **konstans erő** esetén: ha $\boldsymbol{F}$ = konst.

$\rightarrow$ a test gyorsulása $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}$ = konst.

$\rightarrow$ a test sebessége, ha t = 0-ban $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0$: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}\cdot t$

$\rightarrow$ a test helyvektora, ha t = 0-ban $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0\cdot t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot t^2$

Hajítás esetén $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$, tehát

$\rightarrow$ a test gyorsulása $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$ = konst.; $\dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{g}$

$\rightarrow$ a test sebessége, ha t = 0-ban $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0$: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}\cdot t$

$\rightarrow$ a test helyvektora, ha t = 0-ban $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0\cdot t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}\cdot t^2$

(ez koordinátarendszertől független megoldás)

Függőleges hajítás

Függőlegesen felfelé mutató z tengelyt veszünk fel $\rightarrow$ $a_z = -g$;

$\rightarrow$ a sebessége: $v_z(t) = v_0 - gt$;

$\rightarrow$ a z koordinátája (ha a kiinduló koordinátája z_0): $z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$.

A sebesség pozitív, ha felfelé mozog a test; a lefelé zuhanás közben a sebesség negatív.

A felfelé és lefelé mozgó szakasz egyben kezelhető.

Szabadesés: olyan függőleges hajítás, amikor $v_0 = 0$ $\rightarrow$ $v_z(t) = -gt$ $\rightarrow$ $z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2$.

<u>Feladat:</u> Függőlegesen felfelé dobunk egy követ 20 m/s sebességgel.

a) Mekkora lesz a sebessége 3 s múlva?

b) Hol lesz ekkor a test?

c) Milyen irányban mozog ebben a pillanatban?

d) Milyen maximális magasságra jut fel a test?

Megoldás

Számolhatnánk úgy, hogy először kiszámoljuk, mennyi ideig emelkedik, és milyen magasra jut ezalatt, majd a maradék időre a pálya legmagasabb pontjáról induló szabadeséssel számolnánk tovább. Mivel azonban a sebességet a képletben előjeles mennyiségként kezeljük, a felfelé ill. lefelé irányuló mozgást egyben számolhatjuk: felfelé $v_z > 0$, lefelé $v_z < 0$, a legfelső ponton $v_z = 0$.

Adatok: $v_0 = 20$ m/s (pozitív, mert felfelé dobtuk el a testet); és z_0 legyen 0

$\rightarrow$ $v_z(t) = 20 - 10t$; $z(t) = 20t - 5t^2$.

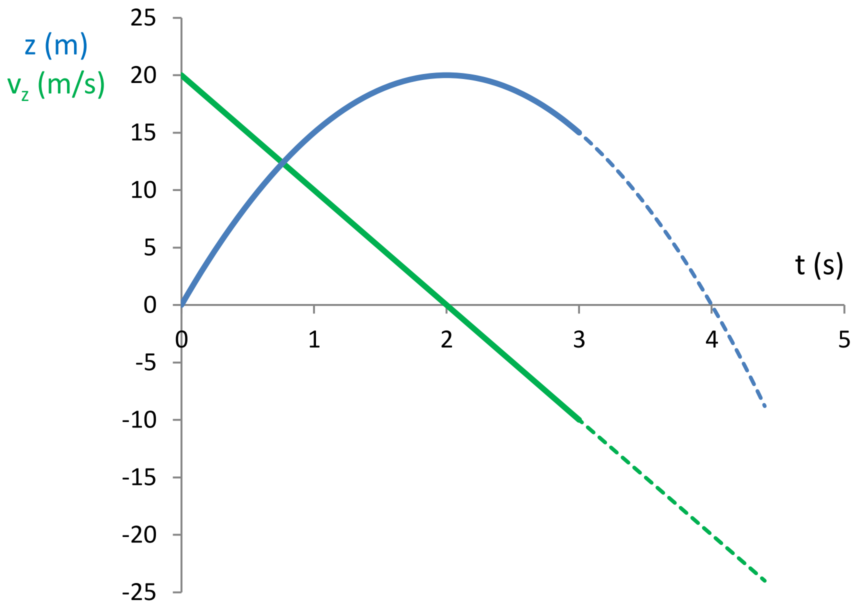
a) t = 3 s: $v(3) = 20 - 10{\cdot}3 = -10$ m/s.

c) v(3) előjele negatív $\rightarrow$ a test lefelé mozog.

b) $z(3) = 20{\cdot}3 - 5{\cdot}3^2 = 15$ m.

d) Az emelkedés ideje: $v(t_h) = 0$: $20 - 10t_h = 0$ $\rightarrow$ $t_h = 2$ s ;

ezalatt $z(t_h) = 20{\cdot}2 - 5{\cdot}2^2 = 20$ m magasra jutott, ez volt a maximális magasság.



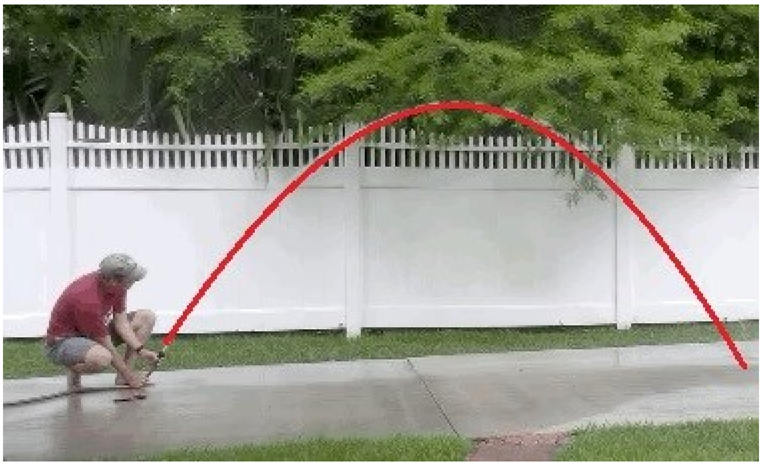
Az ábrán látható, hogy a $v_z(t)$ függvény a z(t) deriváltja, v_z aktuális értéke a z(t) érintőjének meredekségével arányos:

t = 2 s-nál z(t) érintője vízszintes $\rightarrow$ ekkor $v_z = 0$;

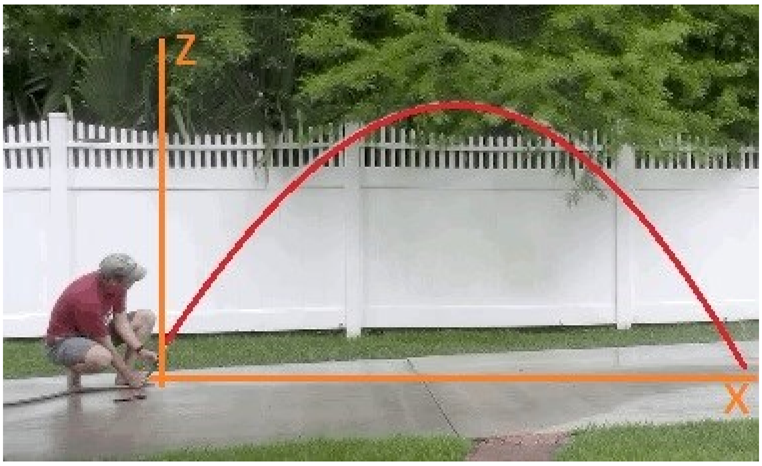
előtte z(t) érintőjének meredeksége pozitív $\rightarrow$ $v_z > 0$;

utána z(t) érintőjének meredeksége negatív $\rightarrow$ $v_z < 0$.

Ferde hajítás



Írjuk fel a gyorsulást, a sebességvektort és a helyvektort Descartes-koordinátarendszerben. A mozgás az x – z síkban történik, a z tengely felfelé mutat.

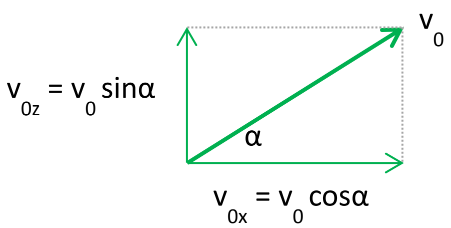


A gyorsulásnak csak egy komponense van:

$\boldsymbol{g} = -g\,\boldsymbol{k}$.

A kezdősebességet felbontjuk komponensekre:

$\boldsymbol{v_0} = v_0 \cos\alpha\, \boldsymbol{i} + v_0 \sin\alpha\, \boldsymbol{k}$,



így a sebességvektor

$\boldsymbol{v}(t) = v_{0x}\,\boldsymbol{i} + (v_{0z} - gt)\,\boldsymbol{k}$.

A helyvektor

$\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + v_{0x}\,t)\,\boldsymbol{i} + y_0\,\boldsymbol{j} + (z_0 + v_{0z}\,t - ½\,gt^2)\,\boldsymbol{k}$,

ill. ha lehet, az origót toljuk az $\mathbf{r_0} = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k}$ pontba, így

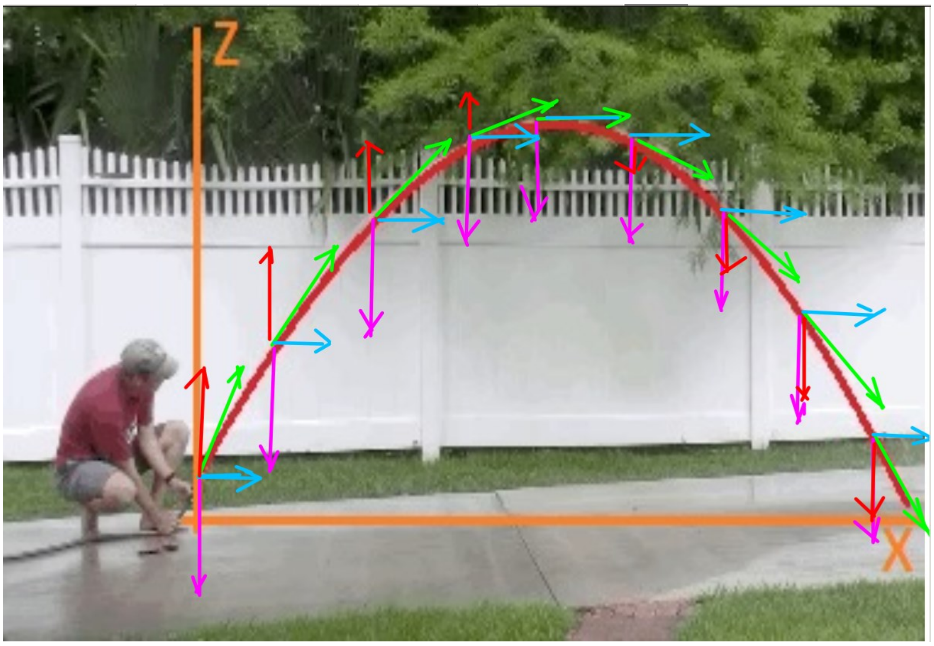
$\mathbf{r}(t) = v_{0x}\,t\;\mathbf{i} + (v_{0z}\,t - ½\,gt^2)\,\mathbf{k}$.

Kiírva külön csak a koordinátafüggvényeket:

$a_x = 0$	$a_z = -g$
$v_x = v_{0x}$	$v_z(t) = v_{0z} - gt$
$x(t) = v_{0x}\, t\ (+\ x_0)$	$z(t) = v_{0z}\, t - ½\, gt^2\ (+z_0)$

illetve a kezdősebesség nagyságát és a vízszintes síkkal bezárt α szögét felhasználva:

$a_x = 0$	$a_z = -g$
$v_x = v_0 \cos\alpha$	$v_z(t) = v_0 \sin\alpha - gt$
$x(t) = v_0\, t \cos\alpha\ (+\ x_0)$	$z(t) = v_0\, t \sin\alpha - ½\, gt^2\ (+z_0)$



A sebesség vízszintes komponense állandó, mert vízszintes irányban nincs gyorsulása a testnek (mivel nem hat vízszintes erő).

A sebesség függőleges komponense csökken: először felfelé mutat és a nagysága csökken, majd a pálya legfelső pontján zérus, utána lefelé mutat és az abszolút értéke nő.

A két komponens vektori eredője a test pillanatnyi sebessége, ami a pálya érintőjének irányába mutat.

A testre állandó nagyságú gyorsulás hat lefelé (a nehézségi erő miatt), ezért csökken a függőleges sebességkomponens.

Látható, hogy a sebességvektor iránya és nagysága hogyan változik a gyorsulásvektor (ill. a nehézségi erő vektora) hatására.

A hajítás pályája

A fenti függvények minden mennyiséget az idő függvényében írnak le. A pálya megadásához az összetartozó z(x) értékeket kell kifejeznünk, ehhez az időt kiküszöböljük a kifejezésekből (a pálya alakjánál nem lényeges, hogy mikor van az adott ponton a test).

Fejezzük ki x(t)-ből t-t:

$$x(t) = v_{0x}\, t \quad\rightarrow\quad t = x/(v_0\cos\alpha),$$

és írjuk át z(t)-be:

$$z(x) = v_0 \cdot x/(v_0\cos\alpha) \cdot \sin\alpha - ½\, g\cdot[x/(v_0\cos\alpha)]^2 = \mathrm{tg}\alpha\cdot x - ½\,[g/(v_0^2\cos^2\alpha)]\cdot x^2$$

Látható, hogy ez egy parabola.

Hajítás magassága

azaz: a kiindulási pont magasságához képest mennyivel magasabban van a pálya legfelső pontja?

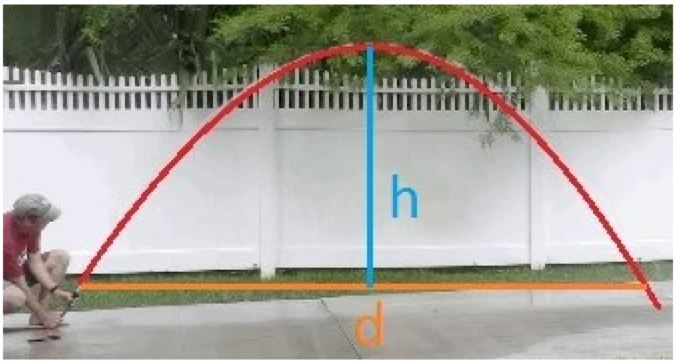
Ez a $z(t) = v_0\, t \sin\alpha - ½\, gt^2$ értéke akkor, amikor a test legmagasabban van.

Amikor legmagasabban van, akkor a függőleges sebességkomponens zérus:

$$v_0 \sin\alpha - gt_e = 0 \quad\rightarrow\quad t_e = v_0 \sin\alpha / g\,.$$

Ezt az időt helyettesítjük be a z(t) függvénybe:

$$h = z(t_e) = v_0\, t_e \sin\alpha - ½\, gt_e^2 = v_0 \cdot (v_0 \sin\alpha / g) \cdot \sin\alpha - ½\, g \cdot (v_0 \sin\alpha / g)^2 = \ldots = \frac{(v_0\sin\alpha)^2}{2g}.$$



Hajítás távolsága

azaz: milyen távol van a test a kiindulási ponttól, amikor visszaérkezik a kiindulási pont magasságára?

Ez az $x(t) = v_0\, t \cos\alpha$ értéke akkor, amikor a földre (sík terepen, azaz az elhajítás magasságára) érkezik, azaz amikor $z(t) = v_0\, t \sin\alpha - ½\, gt^2$ értéke zérus.

$$v_0\, t_d \sin\alpha - ½\, gt_d^2 = 0 \quad\rightarrow\quad t_d = 2\, v_0 \sin\alpha / g\,,$$

vagyis $t_d = 2t_e$, hiszen a felfelé és a lefelé rész szimmetrikus.

Ezt az időt helyettesítjük be az x(t) függvénybe:

$$d = x(t_d) = v_0\, t_d \cos\alpha = v_0\,(2\, v_0 \sin\alpha / g) \cos\alpha = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\,.$$

Ezt az értéket kifejezhetjük a pályából is:

$$x\cdot (\mathrm{tg}\alpha - g/(2v_0^2\cos^2\alpha)\cdot x) = 0 \quad\rightarrow\quad x_1 = x_0 = 0 \quad \text{és} \quad x_2 = d = \ldots = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Adott v_0 kezdősebesség esetén milyen α szöggel elhajítva lesz a legnagyobb a földet érés távolsága?

Mivel sin(2α) maximuma 1, ha $2\alpha = 90°$ $\rightarrow$ $\alpha = 45°$-nál maximális a távolság.

Nem sík terepen a kiindulási és a földre érkezési pont közötti távolság nem ezzel a képlettel számolható, hanem az x(t), z(t) függvényekkel!

Levezethető, hogy h magasságból történő hajítás esetén a maximális távolságra $\mathrm{ctg}^2\alpha = 1 + 2gh / v_0^2$.