VEKTOROK

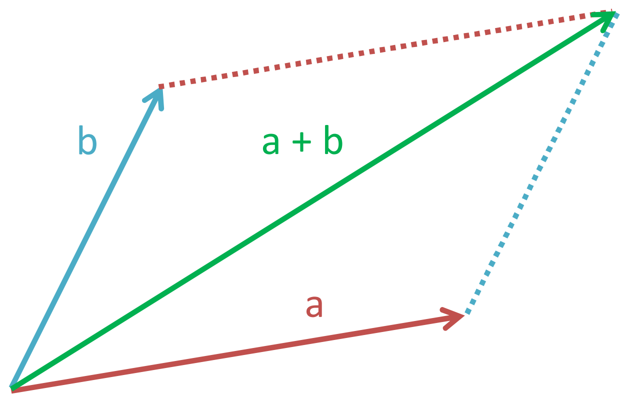
A vektorok olyan mennyiségek, melyeknek nagyságuk és irányuk is van.

Vektor jelölése: $\underline{a}$ vagy $\vec{a}$ vagy **a**; az abszolút értéke |**a**| = a.

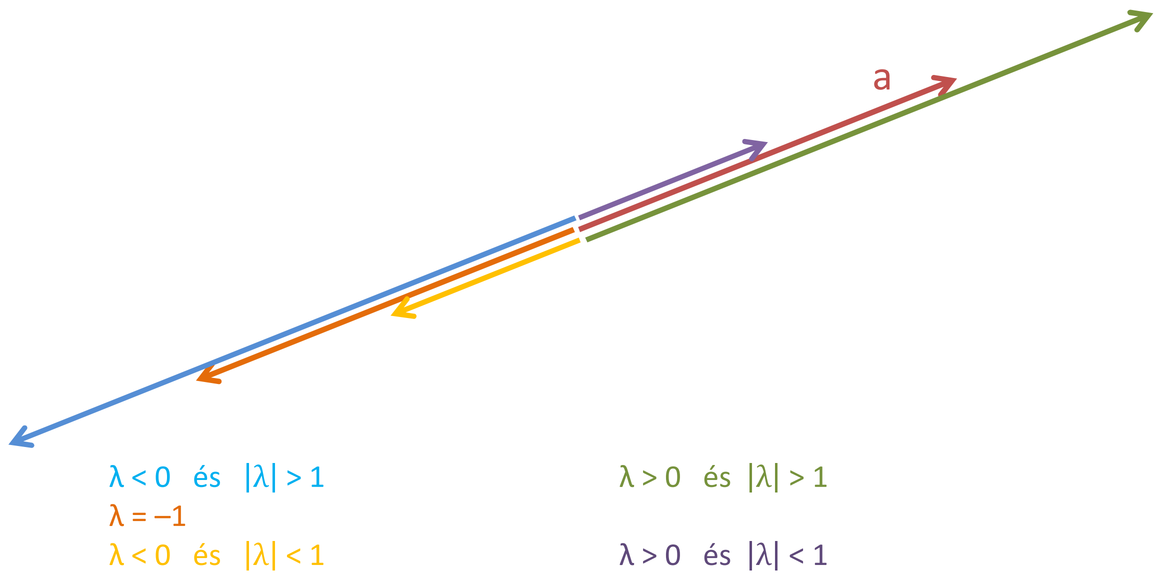
VEKTOR	SKALÁR
sebesség	tömeg
gyorsulás	rugóállandó
rugó megnyúlása	idő
helyvektor	út
erő	munka
elmozdulásvektor	mozgási energia
impulzus **I** = m**v**	helyzeti energia
	nyomás p = F / A

MŰVELETEK VEKTOROKKAL

Két vektor összege: **a** + **b**



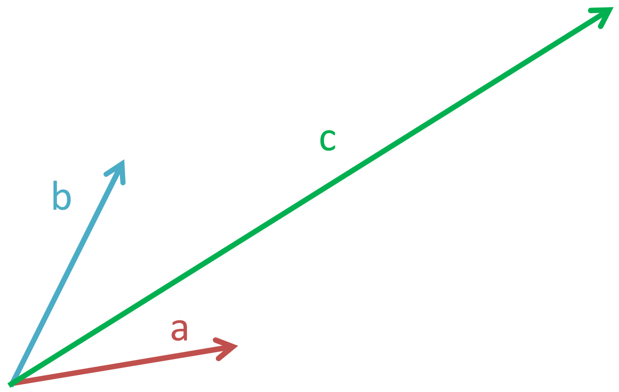
Vektor szorzása skalárral: λ·**a**



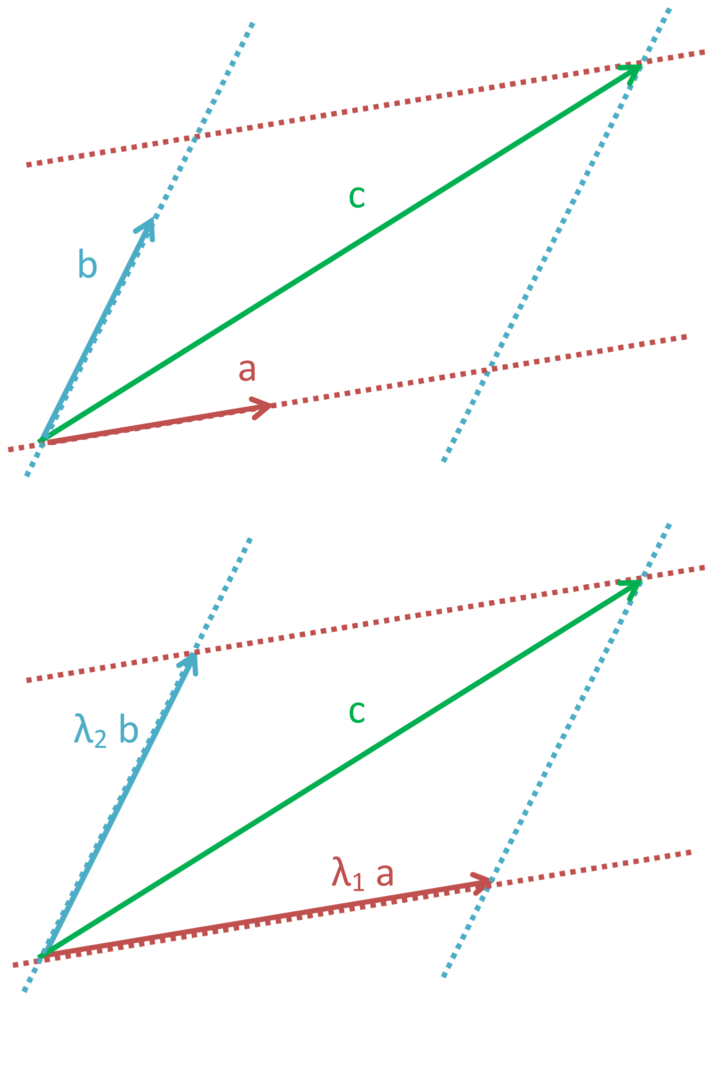
→ két vektor különbsége: **a** – **b** = **a** + (–1)·**b**

→ vektorok lineáris kombinációja: $\lambda_1 \cdot \mathbf{a} + \lambda_2 \cdot \mathbf{b}$ kifejezés a λ_1, λ_2 összes lehetséges értékével előállítja az **a** és **b** vektorok által kifeszített síkot → a sík összes vektora felbontható **a** és **b** irányú komponensekre λ_1 és λ_2 megfelelő értékének meghatározásával.

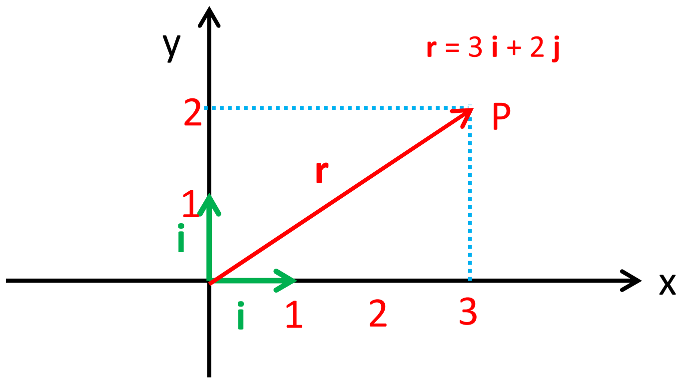
pl.

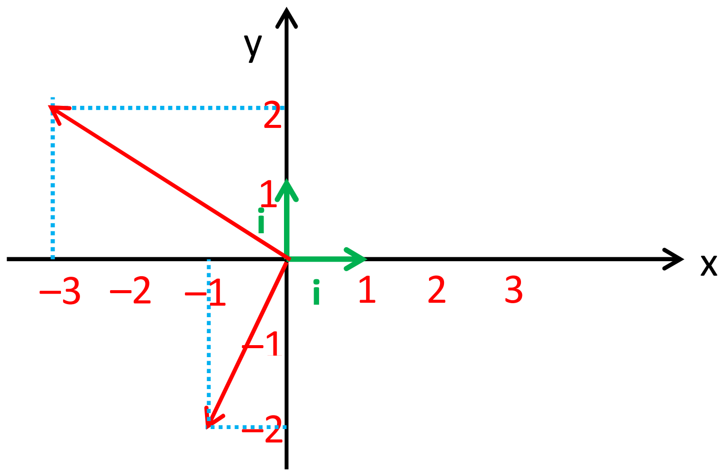


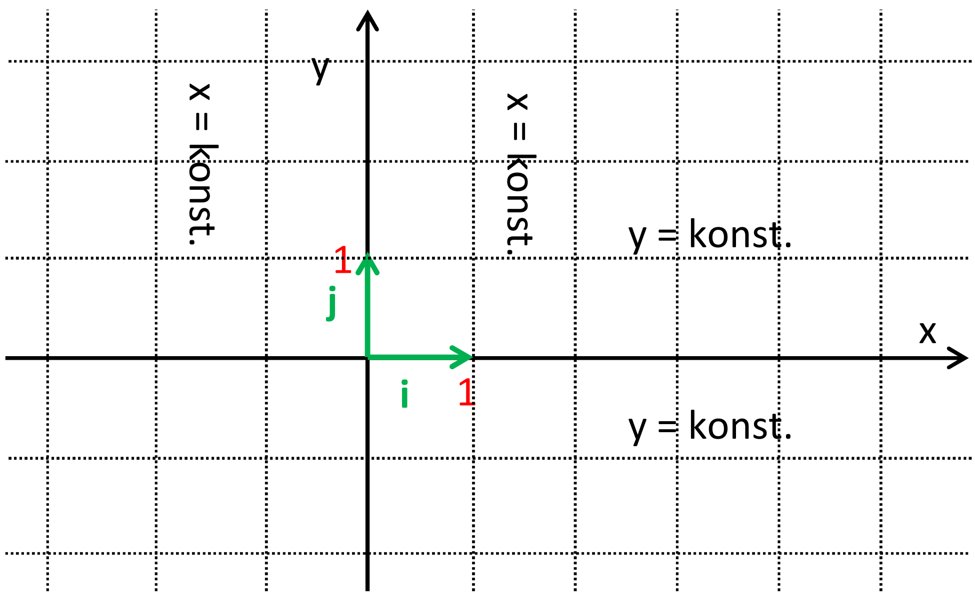
→ vektor felbontása két másik vektor irányával párhuzamos komponensekre:



Descartes-kooordinátarendszer (2D)







Az **i** egységvektor az x koordináta növekedésének irányába mutat, a **j** egységvektor az y koordináta növekedésének irányába (vagyis az egységvektorok az adott koordináta növekedésének irányába mutatnak);

i és **j** lineáris kombinációja feszíti ki a síkot;

a koordináták vetületek az egységvektorokra;

koordinátavonalak: x = konst. ill. y = konst. vonalak.

$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$

összeadás: $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_x+b_x)\mathbf{i} + (a_y+b_y)\mathbf{j}$

szorzás skalárral: $\lambda\cdot\mathbf{a} = \lambda\cdot a_x\mathbf{i} + \lambda\cdot a_y\mathbf{j}$

3 dimenzióban

az egységvektorok: **i**, **j**, **k**;

a koordináták: x, y, z.

A kinematikában megismert vektorok felírása Descartes-koordinátarendszerben

helyvektor:

r(t) = x(t) **i** + y(t) **j** + z(t) **k**

vagy röviden

r = x **i** + y **j** + z **k**

sebességvektor:

v(t) = v_x(t) **i** + v_y(t) **j** + v_z(t) **k**

vagy röviden

v = v_x **i** + v_y **j** + v_z **k**

gyorsulásvektor:

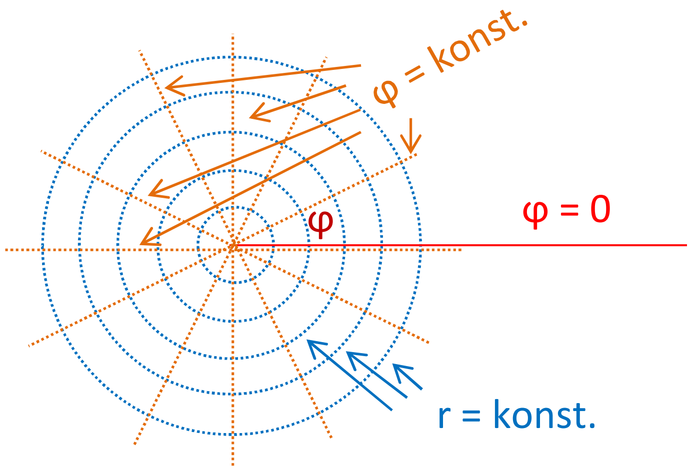
a(t) = a_x(t) **i** + a_y(t) **j** + a_z(t) **k**

vagy röviden

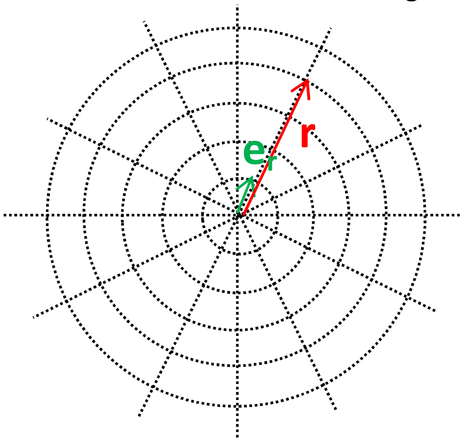
a = a_x **i** + a_y **j** + a_z **k**

2D polár-koordinátarendszer:

A pont helyét az origótól vett távolsággal és egy szöggel adjuk meg: r és φ a két koordináta.



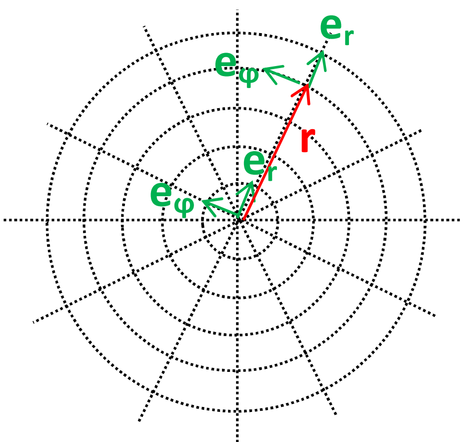
Az r = konst. koordinátavonalak körök,
a φ = konst. koordinátavonalak origóból induló félegyenesek.



Az $\mathbf{e}_r$ egységvektor az r koordináta növekedésének irányába mutat (sugár irányban kifelé).

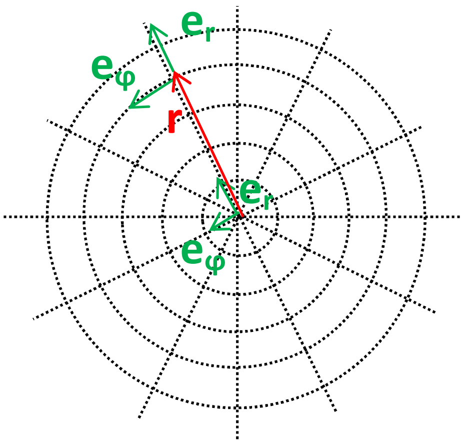
A helyvektor felírása: $\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$

$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$ r: az r vektor hossza, skalár



Az $\mathbf{e}_\varphi$ egységvektor a φ koordináta növekedésének irányába mutat,
merőleges az $\mathbf{e}_r$ egységvektorra pozitív forgásirányban.

Az egységvektorok együtt fordulnak a mozgó ponttal!



Kinematika: $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \rightarrow \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$

Hogyan lehet konkrét koordinátarendszerekben számolni?

A helyvektor, a sebességvektor és a gyorsulásvektor komponensei Descartes-koordinátarendszerben:

A helyvektor: $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$

A sebességvektort a helyvektor deriválásával kapjuk meg: $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\,\boldsymbol{i} + \dot{y}\,\boldsymbol{j} + \dot{z}\,\boldsymbol{k}$
Formálisan a deriváláskor megjelennek az ***i, j, k*** vektorok deriváltjai is, de mivel az ***i, j, k*** egységvektorok konstansok, a deriváltjuk zérus.
A sebességvektor tehát
$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} = \dot{x}\,\boldsymbol{i} + \dot{y}\,\boldsymbol{j} + \dot{z}\,\boldsymbol{k}$
azaz koordinátánként deriválunk: $v_x = \dot{x}\,, v_y = \dot{y}\,, v_z = \dot{z}$.

A gyorsulásvektort a sebességvektor deriválásával kapjuk meg: $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{v}_x\,\boldsymbol{i} + \dot{v}_y\,\boldsymbol{j} + \dot{v}_z\,\boldsymbol{k}$,
a gyorsulásvektor tehát
$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = \dot{v}_x\,\boldsymbol{i} + \dot{v}_y\,\boldsymbol{j} + \dot{v}_z\,\boldsymbol{k}$
azaz $a_x = \dot{v}_x,\ a_y = \dot{v}_y,\ a_z = \dot{v}_z.$

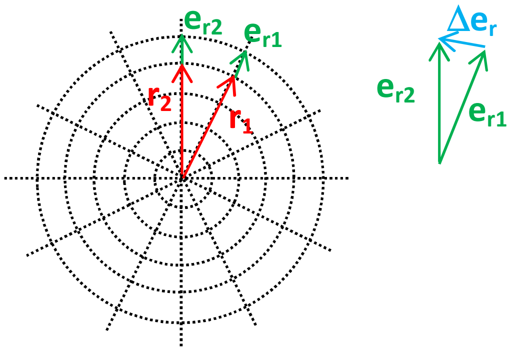
A gyorsulásvektort kifejezhetjük a helyvektor második deriváltjaként is:
$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{v}_x\,\boldsymbol{i} + \dot{v}_y\,\boldsymbol{j} + \dot{v}_z\,\boldsymbol{k} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}\,\boldsymbol{i} + \ddot{y}\,\boldsymbol{j} + \ddot{z}\,\boldsymbol{k}$
azaz $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x},\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$
(A vektorok nagysága a komponenseiből Pitagorasz-tétellel számítható.)

A helyvektor, a sebességvektor és a gyorsulásvektor komponensei síkbeli polárkoordináta-rendszerben:

A helyvektor: $\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$.

A sebességvektort a helyvektor deriválásával kapjuk meg:
$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\dot{\mathbf{e}}_r$,
ez az alak azonban még nem az $\mathbf{e}_r$ és $\mathbf{e}_\varphi$ egységvektorok szerinti felbontás, az $\mathbf{e}_r$ deriváltját ki kell fejezni az $\mathbf{e}_r$ és $\mathbf{e}_\varphi$ egységvektorokkal.

Mivel az egységvektorokat mindig úgy vesszük fel, hogy kövessék a mozgó pontot, változik az irányuk $\rightarrow$ nem lesz a deriváltjuk zérus!



$\dot{\mathbf{e}}_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{e}_r}{\Delta t}$

Ahogy a pont mozog és az $\mathbf{e}_r$ egységvektor követi a mozgását, belátható, hogy $\Delta t \to 0$ esetén a $\Delta\mathbf{e}_r$ vektor merőleges lesz az $\mathbf{e}_r$ vektorra, éppen $\mathbf{e}_\varphi$ irányú,

$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi$ [mivel $\mathbf{e}_r{}^2 = 1 \rightarrow 2\mathbf{e}_r\dot{\mathbf{e}}_r = 0$, ezért $\dot{\mathbf{e}}_r \perp \mathbf{e}_r$]

és a nagysága a φ szög változási sebességétől függ.

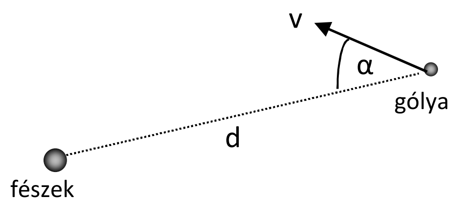
Ezt behelyettesítjük, ezzel tehát a sebességvektor polárkoordináta-rendszerben:

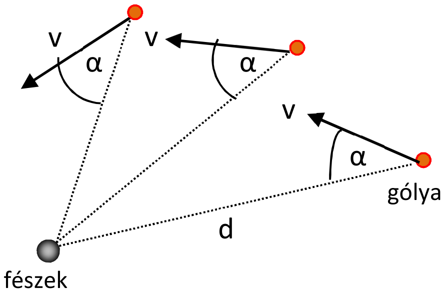
$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi$$

Az $\mathbf{e}_r$ szorzója, $\dot{r}$ azt jelenti, hogy mennyire változik az origótól mért távolság. Ennek segítségével könnyen megoldható a következő feladat:

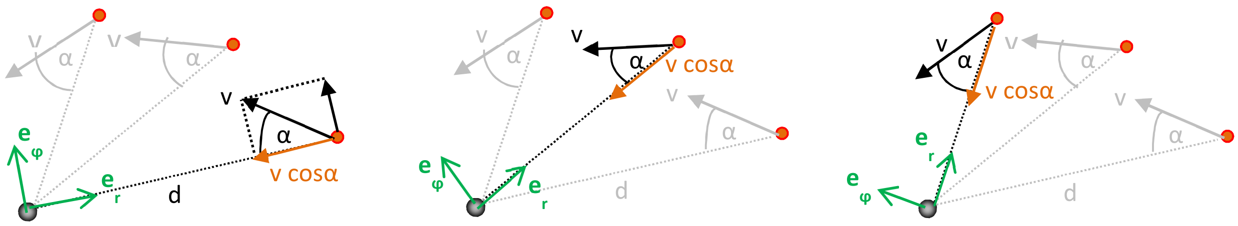
Pl.: kancsal gólya

A kancsal gólya szeretne a fészkére repülni. Ő azt hiszi, hogy egyenesen a fészke felé repül, de kancsalsága miatt mindig az őt a fészekkel összekötő egyenessel állandó α szöget bezárva repül. A gólya sebességének nagysága állandó (v). Odaér-e valaha a fészkére?





Legyen a fészek a vonatkozási pont, onnan mutat a helyvektor a gólya aktuális helyéhez.
Ahogy a gólya repül és a helyvektora változik, változik az $\mathbf{e}_r$ vektor iránya is.
A gólya sebessége mindig állandó szöget zár be a helyvektorával (a kancsalsága miatt), ezért ha a gólya sebességét felbontjuk a helyvektorával párhuzamos és arra merőleges komponensekre, akkor ezek a helyétől függetlenül állandó értékek.



A sebességének a helyvektorral párhuzamos, tehát $\mathbf{e}_r$ irányú komponensének a nagysága $v\cdot\cos\alpha$, és a fészek felé mutat, ellenkező irányba, mint az $\mathbf{e}_r$ vektor.
A sebességnek a polárkoordináta-rendszerben általános képlete szerint

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi$$

az $\mathbf{e}_r$ szorzója $\dot{r}$, ami ebben az esetben $-v\cdot\cos\alpha$ -val egyenlő:

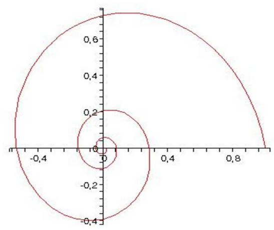
$$\dot{r} = -v\cdot\cos\alpha$$

r a gólya távolsága a fészektől.
Mivel $v\cdot\cos\alpha$ = konst., ezért $\dot{r}$ = konst. $\rightarrow$ r az időben egyenletesen csökken:

$$r = d - (v\cdot\cos\alpha)\,t\ ,$$

és a gólya $t^* = d / (v\cdot\cos\alpha)$ idő alatt a fészkébe ér ($r(t^*) = 0$ lesz).

Eközben persze a gólya köröz a fészek körül, sőt, az $r\dot{\varphi} = v\cdot\sin\alpha$ egyenletből az is belátható, hogy végtelen sok fordulatot tesz meg.
A gólya pályája egy spirál (ún. logaritmikus spirál).
A polárkoordináta-rendszerben felírt sebességgel egy bonyolult mozgást sokkal egyszerűbben tudtunk vizsgálni, mint Descartes-koordinátarendszerben tudtunk volna, kihasználva, hogy az egységvektorok követik a test mozgását.



A gyorsulásvektort a sebességvektor deriválásával kapjuk meg:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r}\,\mathbf{e}_r + \dot{r}\,\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\,\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi + r\,\ddot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi + r\,\dot{\varphi}\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi$$

Az átalakításhoz szükségünk van a másik egységvektor deriváltjára is: $\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_r$.
Ezt beírva a gyorsulásvektor tehát:

$$\mathbf{a} = (\,\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2\,)\,\mathbf{e}_r + (\,2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi}\,)\,\mathbf{e}_\varphi$$

<u>KÖRMOZGÁS felírása polárkoordináta-rendszerben</u>

Az egységvektorok:
az $\mathbf{e}_r$ vektor sugár irányban kifelé mutat: radiális (azaz sugár irányú) egységvektor;
az $\mathbf{e}_\varphi$ vektor érintő irányú (pozitív forgásirányba mutat): tangenciális (azaz érintő irányú) egységvektor.

Mivel körmozgás esetén az r (a távolság az origótól) állandó, r = konst., ezért $\dot{r} = \ddot{r} = 0$,
a fenti általános képletek egyszerűsödnek:

A sebesség $\mathbf{v} = r\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi$:
a sebesség érintő irányú (mivel $\mathbf{e}_\varphi$ irányú),
nagysága $r\dot{\varphi}$, ahol $\dot{\varphi} = \omega$ a szögsebesség, tehát $v = r\omega$ („kerületi sebesség”).

A gyorsulás $\mathbf{a} = -r\,\dot{\varphi}^2\,\mathbf{e}_r + r\,\ddot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi$:
az $\mathbf{e}_\varphi$ érintő irányú komponens
nagysága $r\,\ddot{\varphi}$, ahol $\ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \beta$ a szöggyorsulás,
tehát $a_t = r\ddot{\varphi} = r\dot{\omega} = r\beta = \dot{v}$;
neve **tangenciális** gyorsulás,
ez a sebesség nagyságának változását okozza;
(ilyet láttunk az egyenes vonalú mozgásnál is, de a gyorsulásnak körmozgás esetén van egy másik komponense is)

az $\mathbf{e}_r$ sugár irányú komponens
sugár irányban befelé mutat (mivel negatív előjelű),
a neve **centripetális** gyorsulás,
nagysága $a_{cp} = r\,\dot{\varphi}^{\mathbf{2}} = r\,\omega^2$, ami $v = r\omega$ felhasználásával átírható $a_{cp} = v^2 / r$ alakba is;
ez a sebességvektor irányának változását okozza
(egyenletes körmozgásnál is fellép!)

Tehát polárkoordináta-rendszerben felírva a körmozgást R sugarú kör esetén

a helyvektor: $\mathbf{r} = R\,\mathbf{e}_r$

a sebességvektor: $\mathbf{v} = R\omega\,\mathbf{e}_\varphi$

a gyorsulásvektor $\mathbf{a} = -R\omega^2\mathbf{e}_r + R\beta\,\mathbf{e}_\varphi$

Egyenletes körmozgás esetén $\beta = 0$, ω = konst., $\varphi = \varphi_0 + \omega t$;
egyenletesen változó körmozgás esetén β = konst., $\omega = \omega_0 + \beta t$, $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + ½\beta t^2$;
általánosan $\omega(t)$ tetszőleges lehet.

DINAMIKA

Minek a hatására mozog a test? Kell-e hatás ahhoz, hogy egy test mozgásban legyen?
https://www.youtube.com/watch?v=ZVfhztmK9zI&feature=youtu.be
https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs
A közegellenállás (és a súrlódás) állandóan fékezi a testek mozgását, de ha ezek nem lennének, akkor nem lenne különbség a vasgolyó / kalapács és a tollpihe között mozgása között.

Arisztotelész (i.e. 384-322) így „indokolta", hogy nem létezhet vákuum:
„…továbbá senki sem tudná megmondani, hogy egy valamilyen módon egyszer mozgásba hozott test miért állana meg bárhol is. Mert hiszen miért álljon meg inkább itt, mint emitt. Úgyhogy egy test vagy nyugalomban lenne, vagy pedig mozogna ad infinitum, amíg valami akadály az útjába nem kerülne."

NEWTON AXIÓMÁK

<u>**I. axióma**</u>: tehetetlenség törvénye.
Magára hagyott test nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, ha a test mozgását olyan vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk, ami inerciarendszer.

Magára hagyott: nincs kölcsönhatásban más testtel; ha megfelelően távol van más testektől.
Nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez: $\boldsymbol{v}$ = konst.
Mi az inerciarendszer? olyan vonatkoztatási rendszer, amiben érvényes Newton I. axiómája. Vagyis körbeért a definíció. Feloldás: az állítás az, hogy <u>létezik</u> inerciarendszer. Meg kell vizsgálni, hogy egy bizonyos vonatkoztatási rendszerben a magukra hagyott testek $\boldsymbol{v}$ = konst. mozgást végeznek-e. (Nem elég egyetlen testet vizsgálni, mert bármely testhez rögzíthetünk vonatkoztatási rendszert, és abban a vonatkoztatási rendszerben persze az a test nyugalomban van; de három független mozgást végző test már elég.) Ha igen, akkor ez a vonatkoztatási rendszer egy inerciarendszer, és ebben a vonatkoztatási rendszerben az összes testre igaz lesz Newton I. axiómája.
A Földet inerciarendszernek tekintjük olyan mozgások vizsgálatánál, amelyeknél a megtett távolságok elhanyagolhatóak a Föld méretéhez képest – de nagyobb távolságot átfogó mozgásoknál már nem tekinthetünk el a Föld forgásától, keringésétől, és így nem tekinthető inerciarendszernek.
Vagy: állócsillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszer alkalmas inerciarendszernek.
Ha van egy olyan vonatkoztatási rendszer, ami inerciarendszer, akkor az ahhoz képest álló, ill. állandó sebességgel mozgó (azaz egyenes vonalú egyenletes mozgást végző) vonatkoztatási rendszerek is inerciarendszerek (Galilei-féle relativitási elv) $\rightarrow$ végtelen sok inerciarendszer van.