Eddigiek összefoglalása: kinematika $x(t) \rightarrow v(t) \rightarrow a(t) \rightarrow ? \rightarrow ?$

Dinamika: $F \rightarrow a \rightarrow v \rightarrow x$

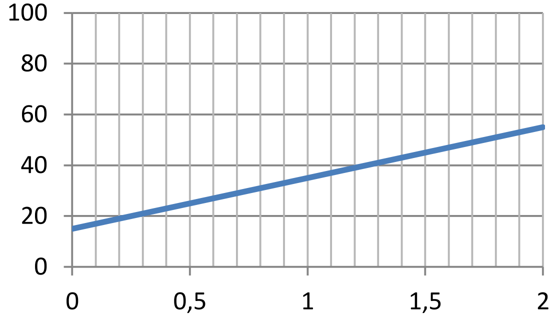
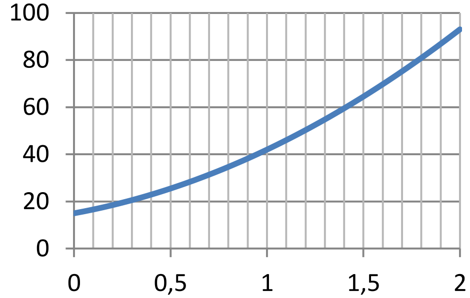
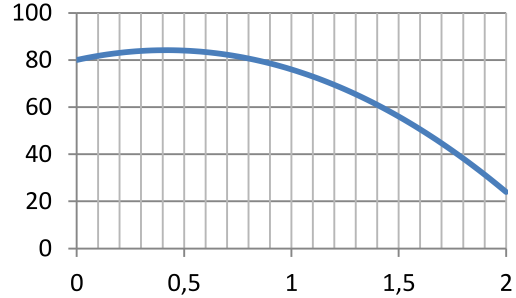
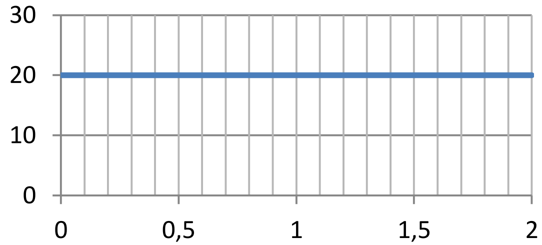
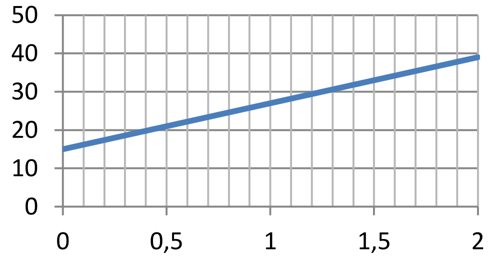
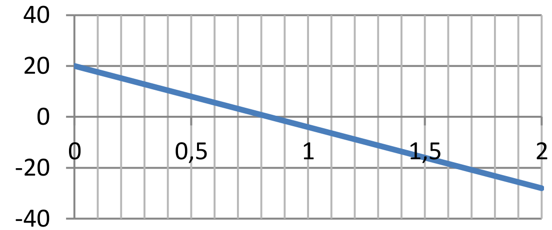
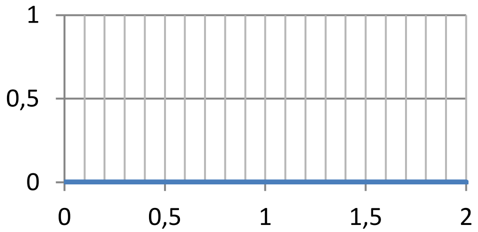
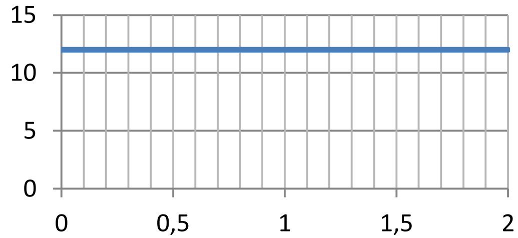
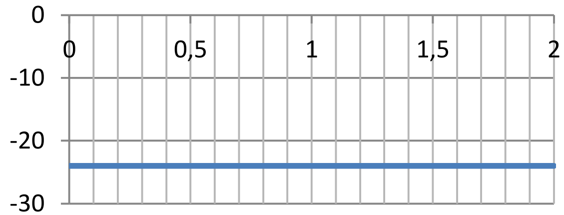
Minden **egyenes vonalú mozgást** összefoglalnak ezek a képletek:

$x(t)$ – $v(t) = \dot{x}$ – $a(t) = \dot{v} = \ddot{x}$

Nézzük meg, milyen képletek voltak középiskolában

	x(t)	v(t)	a(t)
egyenes vonalú egyenletes mozgás	$x = vt + x_0$ ~~s = vt~~	v = konst.	a = 0
egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás	$x = \frac{a}{2}t^2 + v_0 \cdot t + x_0$	$v = at + v_0$	a = konst.
harmonikus rezgőmozgás	$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$	$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$	$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$

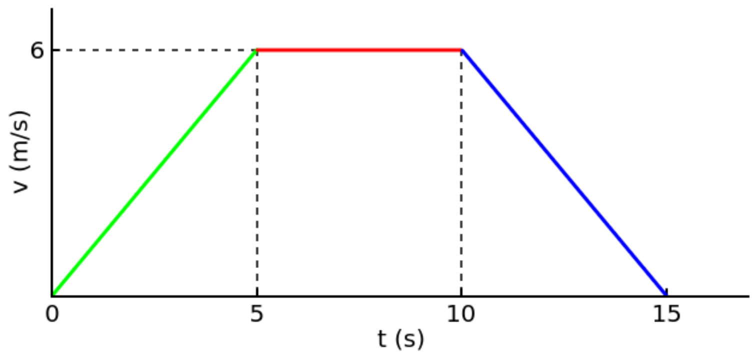
Előjelek!

<table>
<tr><th>egyenletes mozgás</th><th colspan="2">egyenletesen változó mozgás</th></tr>
<tr><td></td><td>$a > 0$</td><td>$a < 0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$x = vt + x_0$</td><td colspan="2">$x = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$v =$ konst.</td><td colspan="2">$v = at + v_0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$a = 0$</td><td colspan="2">$a =$ konst.</td></tr>
</table>

Látható, hogy
$v = \dot{x}$ és $a = \dot{v} = \ddot{x}$
(ill. visszafelé $v = \int a\, dt + \mathit{konst.}$, $x = \int v\, dt + \mathit{konst.}$,
ahol a konstansokat v_0 és x_0 értéke alapján tudjuk meghatározni).

Mikor igaz, hogy „s = v·t”?
Csak akkor, ha v = konst., vagyis egyenletes mozgás esetén!
Minden más esetben a v(t) függvényt kell integrálni
(ami grafikusan a v – t diagramon a görbe alatti terület, ami negatív is lehet).

Számolási feladat:
Az ábra egy felvonó emelkedésének sebesség–idő diagramja.



a) Hány métert emelkedett a felvonó a 15 s alatt?
b) Mennyi volt az átlagsebessége?
c) Rajzoljuk fel a felvonó gyorsulását és a kiindulási szinttől mért magasságát is az idő függvényében!

Megoldás
A mozgás szakaszonként egyenletesen változó mozgás:
$v(t) = v_0 + at$ és $x(t) = x_0 + v_0t + ½at^2$.
Minden mennyiséget SI alapmennyiségekkel írunk fel.
A 0 – 5 s között
 a kiinduló koordináta $x_{01} = 0$;
 a kezdősebesség $v_{01} = 0$;
 a gyorsulás: $a_1 = \Delta v/\Delta t = (6–0)/(5–0) = 1{,}2$ m/s^2 (pozitív, a lift sebessége nő);
 $\rightarrow$ $v_1(t) = a_1t = 1{,}2t$ és $x_1(t) = ½a_1t^2 = 0{,}6t^2$;
 5 s-ban $x_1(5) = 0{,}6·5^2 = 15$ m (és ellenőrizhetjük, hogy $v_1(5) = 1{,}2·5 = 6$ m/s).
Az 5 – 10 s között
 mivel ez a szakasz az 5 s-nál kezdődik, ezért ezen a szakaszon $t_2 = t – 5$ s;
 a kiinduló koordináta $x_{02} = x_1(5) = 15$ m;
 a (kezdő)sebesség $v_{02} = v_1(5) = 6$ m/s;
 a gyorsulás zérus;
 $\rightarrow$ $v_2(t) = 6$ m/s és $x_2(t) = 15 + 6·(t–5)$;
 10 s-ban $x_2(10) = 15 + 6·5 = 45$ m.

A 10 – 15 s között

mivel ez a szakasz a 10 s-nál kezdődik, ezért ezen a szakaszon $t_3 = t - 10$ s;

a kiinduló koordináta $x_{03} = x_2(10) = 45$ m;

a kezdősebesség $v_{03} = v_2(10) = 6$ m/s;

a gyorsulás $a_3 = \Delta v/\Delta t = (0-6)/(15-10) = -1{,}2$ m/s^2 (negatív, a lift sebessége csökken);

$\rightarrow$ $v_3(t) = 6 - 1{,}2(t-10)$ és $x_3(t) = 45 + 6(t-10) - 1{,}2(t-10)^2$;

15 s-ban $x_3(15) = 45 + 6\cdot 5 - 0{,}6\cdot 5^2 = 60$ m

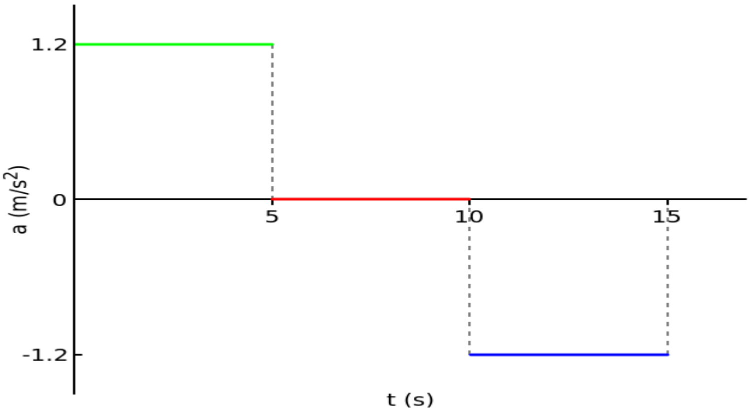
(és ellenőrizhetjük, hogy $v_3(15) = 6 - 1{,}2\cdot 5 = 0$ m/s).

a) A felvonó emelkedése $x_3(15) = 60$ m volt.

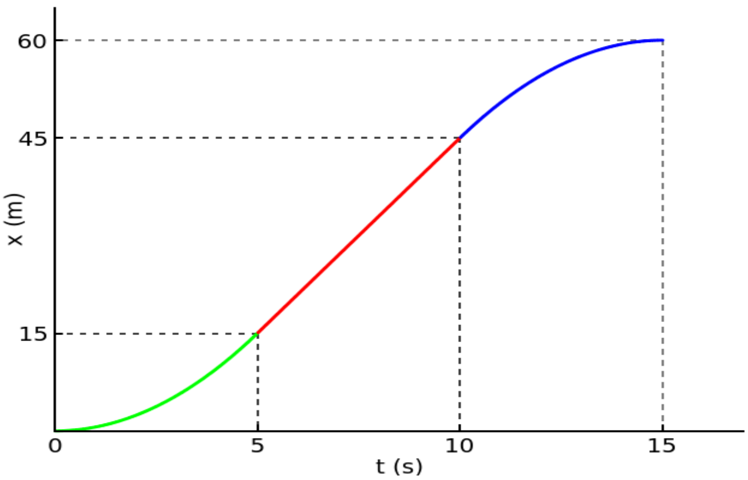
b) A felvonó átlagsebessége $v_{átl} = \Delta x/\Delta t = (60-0)/(15-0) = 4$ m/s volt.

c)

$a_1 = 1{,}2$ m/s^2 $a_2 = 0$ $a_3 = -1{,}2$ m/s^2



$x_1(t) = 0{,}6t^2$ $x_2(t) = 15 + 6\cdot(t-5)$ $x_3(t) = 45 + 6(t-10) - 1{,}2(t-10)^2$



KÖRMOZGÁS felírása szögváltozóval

Ugyanúgy kezelhető, mint az x tengely menti haladó mozgás, csak

$\varphi(t)$ **szögváltozó**val adjuk meg a test helyét [–] (az x(t) helyett),

aminek deriváltja az
ω **szögsebesség**: $\omega = \dot{\varphi}$ $[s^{-1}]$ (a v sebesség megfelelője),

és annak deriváltja a
β **szöggyorsulás**: $\beta = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ $[s^{-2}]$ (az a gyorsulás megfelelője).

	$\varphi(t)$	$\omega(t)$	$\beta(t)$
egyenletes körmozgás	$\varphi = \omega t + \varphi_0$	ω = konst.	$\beta = 0$
egyenletesen változó körmozgás	$\varphi = \frac{\beta}{2}t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$	$\omega = \beta t + \omega_0$	β = konst.

R sugarú körön

$i = R\,\varphi$,
$v = R\,\omega$,
$a_t = R\,\beta$ (a gyorsulásra a dinamikánál visszatérünk!).

$$\varphi(t) \quad - \quad \omega(t) = \dot{\varphi} \quad - \quad \beta(t) = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

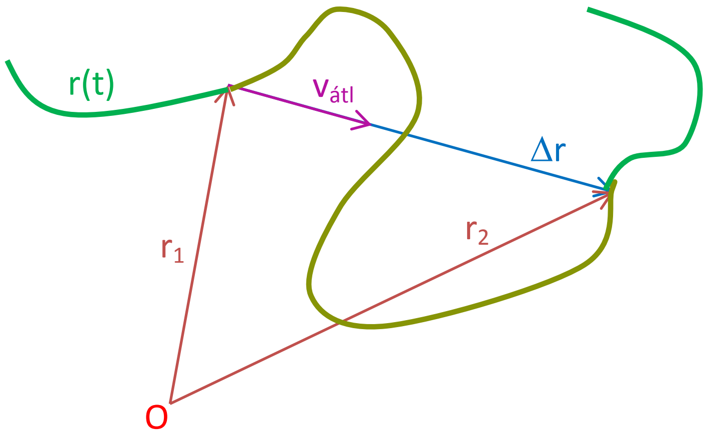
SÍKBELI ÉS TÉRBELI MOZGÁS

Helyvektor, **r** : az O vonatkoztatási pontból az adott pontba mutató vektor.
A test mozgásával a helyvektor időben változik: **r**(t) (vektor-skalár függvény)

Pálya: a helyvektor végpontja által érintett pontok (paraméteres térgörbe).

Út (s): a pálya hossza.

Elmozdulásvektor: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$ (a helyvektor megváltozása)
mindig a későbbiből vonjuk ki a korábbit!

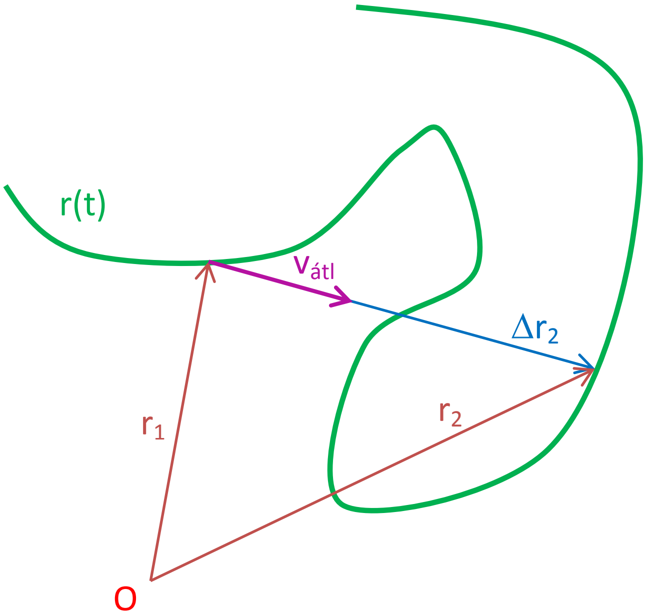


Átlagsebesség-vektor: $\mathbf{v}_{\text{átl}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$,

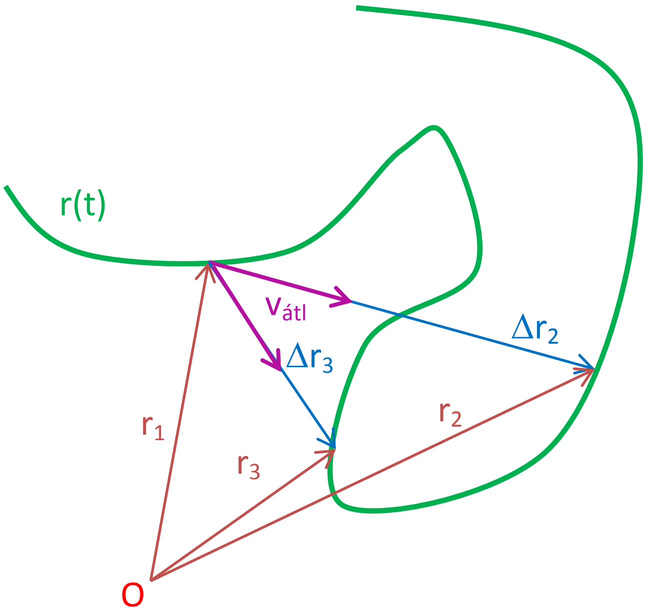
iránya megegyezik a $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulásvektor irányával,
nagysága az elmozdulás nagysága ($\Delta\mathbf{r}$ abszolút értéke) osztva az eltelt idővel.

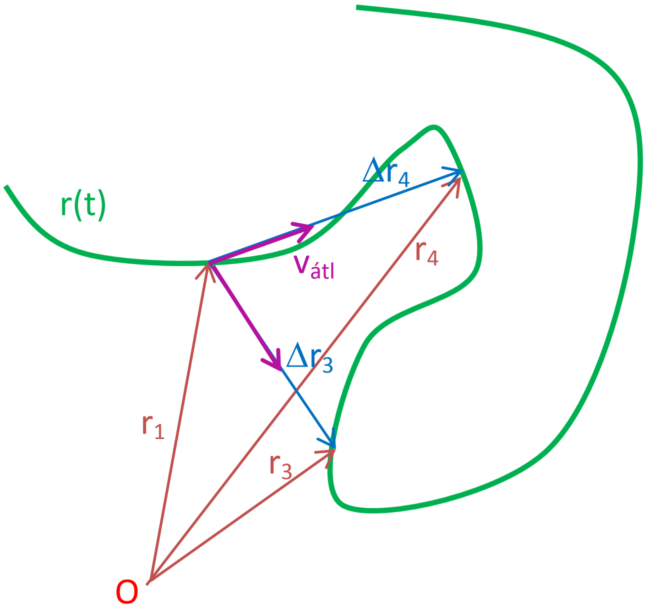
A $t_1 - t_2$ intervallumhoz tartozó átlagsebesség $\Delta\mathbf{r}$ irányú.

Az egyenes vonalú mozgáshoz hasonlóan a t_1 időponthoz tartozó pillanatnyi sebességet úgy tudjuk megkapni, hogy átlagsebességet számolunk egy t_1 pillanatban induló Δt hosszú időintervallumra, és nézzük a határértékét $\Delta t \rightarrow 0$ esetén.

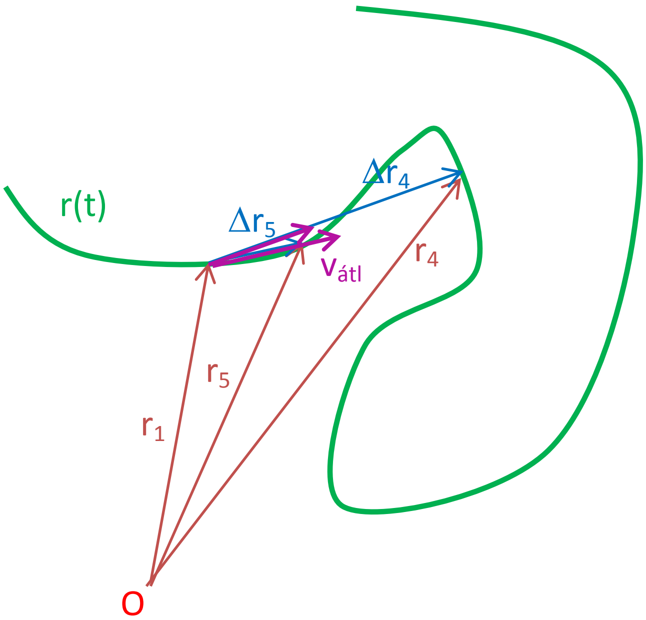


Tekintsünk olyan időintervallumokat, amiknek a kezdete t_1, de a vége közelebb van t_1-hez, mint t_2: ezek t_3, t_4, t_5, … , az ezekhez tartozó átlagsebesség $\mathbf{\Delta r_3}$, $\mathbf{\Delta r_4}$ **,** $\mathbf{\Delta r_5}$ irányú, vagyis mindig a pálya két pontján ($\mathbf{r_1}$ és $\mathbf{r_2}$, ill. $\mathbf{r_1}$ és $\mathbf{r_3}$, ill. $\mathbf{r_1}$ és $\mathbf{r_4}$, ill. $\mathbf{r_1}$ és $\mathbf{r_5}$, …) átmenő szelő irányába mutat.

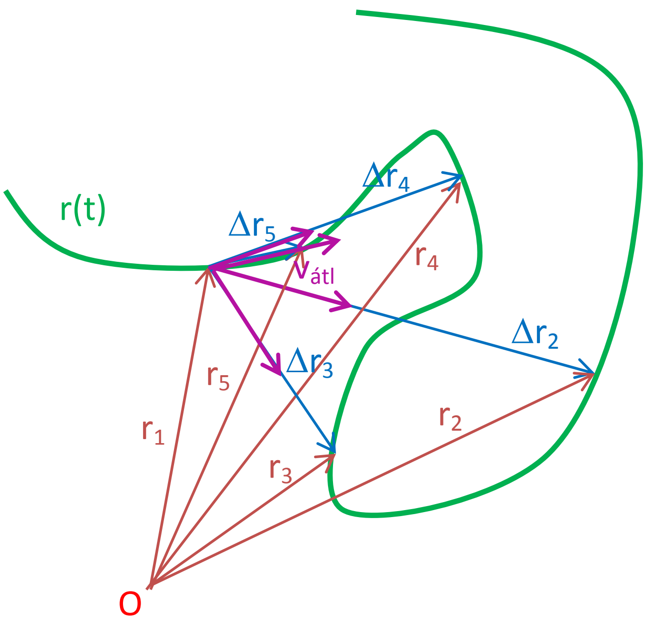




r(t)
Δr4
r4
vátl
Δr3
r1
r3
O



r(t)
Δr4
Δr5
vátl
r4
r5
r1
O



r(t)
Δr4
Δr5
vátl
r4
Δr2
Δr3
r5
r1
r2
r3
O

$\Delta t \to 0$ esetén a végpont is a t_1 időhöz tartozó $\mathbf{r_1}$, így a pillanatnyi sebesség iránya a pálya $\mathbf{r_1}$-beli érintőjének iránya lesz.

A **(pillanatnyi) sebesség vektor** az átlagsebesség-vektor határértéke:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{pill}} = \lim \mathbf{v}_{\text{átl}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \ .$$

Vektor, melynek
iránya: a pálya érintőjének iránya,
nagysága: az út idő szerinti deriváltja: $\frac{ds}{dt}$, $v_{pill} = \dot{s}$.

Az átlagsebesség nagysága $v_{átl} = |\Delta \mathbf{r}|/\Delta t$.
$|\Delta \mathbf{r}|$, azaz az elmozdulásvektor nagysága legfeljebb a két pont közötti út hossza: $|\Delta \mathbf{r}| \le s$, de $\Delta \mathbf{r} \to 0$ esetén a két mennyiség megegyezik, ezért lesz a pillanatnyi sebesség nagysága az út deriváltja.

Hasonlóan bevezethető az

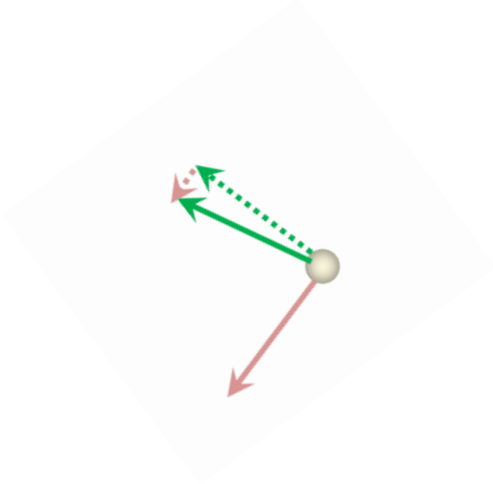
átlagos gyorsulás: $\boldsymbol{a}_{átl} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$ és a

(pillanatnyi) gyorsulás: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{pill} = lim\, \boldsymbol{a}_{átl} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}$

Tehát röviden az egész kinematika:

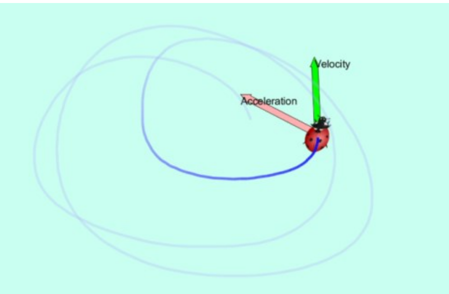
$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ és $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}$.

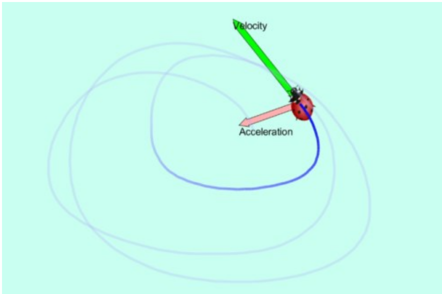
Volt már: milyen lehet a gyorsulásvektor iránya a sebességvektorhoz képest?

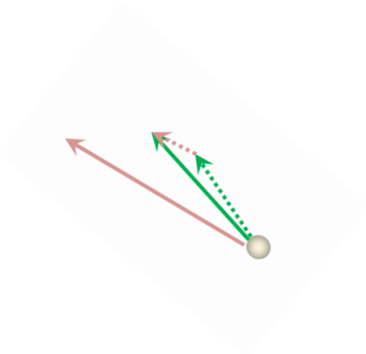


Ha a gyorsulás merőleges a sebességre, akkor a sebesség nagysága nem változik:

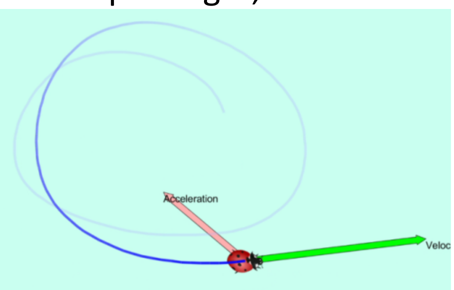
Ha a gyorsulás nem pontosan merőleges a sebességre, akkor a sebesség nagysága is változik:
ha hegyes szöget zárnak be, akkor a test gyorsabb lesz:

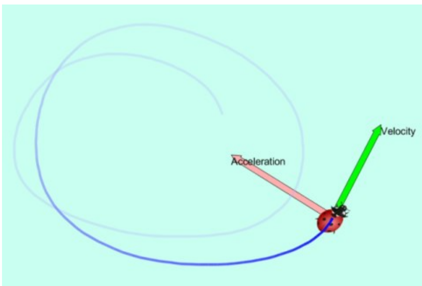


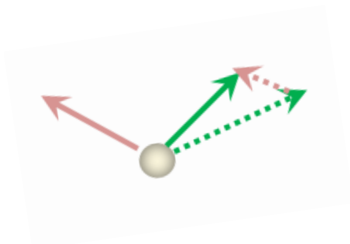




ha tompa szöget, akkor a test lassul:





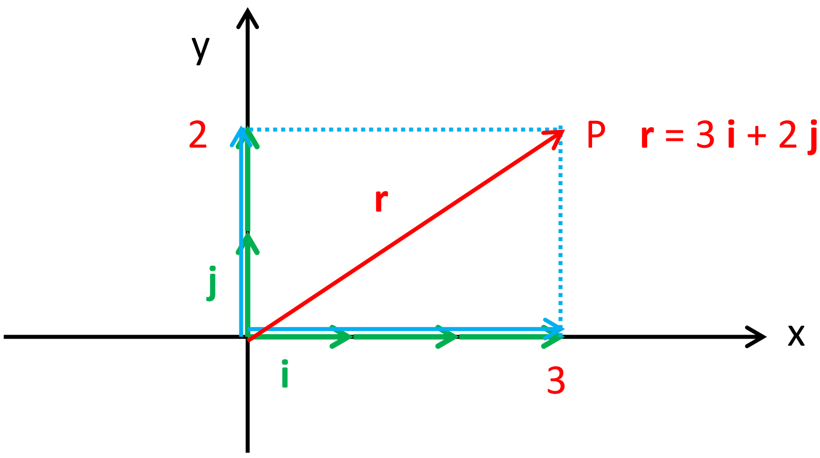


A gyorsulásnak a sebességgel párhuzamos komponense a sebesség nagyságát változtatja (növeli, ha egyirányúak, ill. csökkenti, ha ellentétes irányúak); a gyorsulás sebességre merőleges komponense pedig a sebesség irányát változtatja meg (a sebesség nagyságát nem befolyásolja). Ahhoz is kell tehát gyorsulás, hogy a test állandó nagyságú sebességgel irányt változtasson!

KOORDINÁTARENDSZEREK

<u>Descartes-koordinátarendszer</u>

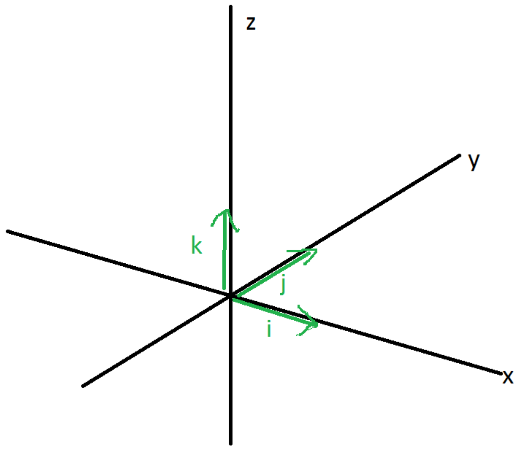
2 dimenzióban:



Koordináták: x, y

Egységvektorok **i**, **j**

3 dimenzióban



Koordináták: x, y, z

Egységvektorok **i**, **j**¸k

Jobbsodrású: **i** × **j** = **k**
(és **j** × **k** = **i**, **k** × **i** = **j**, ciklikus permutáció;
j × **i** = –**k**, **k** × **j** = –**i**, **i** × **k** = –**j**)

Helyvektor felírása:

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$