KINEMATIKA folytatás

Átlagsebesség egyenes vonalú mozgás esetén:

$v_{átl} = \Delta x / \Delta t$, ahol $\Delta x = x_{vég} - x_{kezdő}$

Pozitív, ha a végpont x koordinátája nagyobb a kezdőpont x koordinátájánál, vagyis növekvő x értékek irányába mozdult el a test;
ill. negatív, ha csökkenő x értékek irányába mozdul el.
Ha a mozgás végpontjaként a test visszaérkezik a kiindulópontba, akkor $v_{ált} = 0$.

Átlagsebesség számítása:

1. feladat

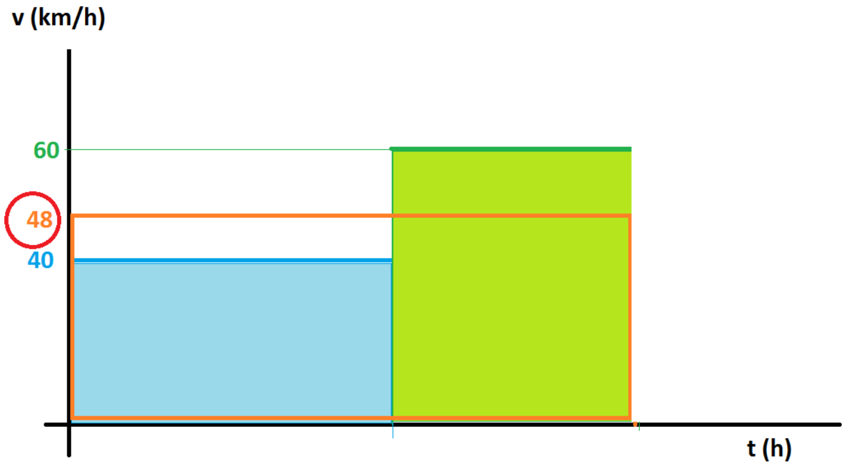
Két helyiség közötti autóbuszjáraton a kocsik átlagsebessége
egyik irányban 40 km/h,
a másik irányban 60 km/h.
Mekkora az átlagsebesség egy teljes fordulót figyelembe véve?

Megoldás:

Az út s km; pl. s = 120 km ,
odafelé $t_1 = s / v_1 = s/40$ óra; $t_1 = 120/40 = 3$ h ,
visszafelé $t_2 = s / v_2 = s/60$ óra alatt teszi meg. $t_2 = 120/60 = 2$ h ,
Az összes út s+s = 2s; 2s = 120 km,
az összes idő $t_1 + t_2 = s/40 + s/60$ óra, $t_1+t_2 = 5$ h ,

$v_{átl} = \Delta x / \Delta t = \frac{2\,s}{\frac{s}{40}+\frac{s}{60}} = \frac{2\,s}{\frac{3s+2s}{120}} = \frac{2s\cdot 120}{5s} = 48$ km/h. $v_{átl} = 240/5 = 48$ km/h.

Az átlagsebesség általában nem számolható egyszerűen a pillanatnyi sebességek átlagaként!



$s = v\cdot t$ a diagramon a téglalapok területe. A kék és a zöld téglalap területe megegyezik, mivel oda-vissza ugyanakkora utat tesz meg. Nagyobb sebesség → rövidebb idő. Átlagsebesség: akkora területű téglalap, mint a kék és zöld összege, az idő a kék és zöld idő-tengelyen fekvő oldalainak összege → ebből kiadódik a $v_{átl}$ értéke.

Átlagsebesség (és általánosan valamilyen időben változó mennyiség átlagos értéke): mekkora az a konstans érték, ami az adott időintervallum alatt ugyanakkora változást hoz létre, mint az időben változó mennyiség?

Grafikusan: tetszőleges alakú terület → téglalap.

<u>2. feladat</u>

A és B város vízparton helyezkednek el egymástól d távolságra. Egy motorcsónakkal, ami a vízhez képest v_{cs} sebességgel tud menni, elmegyünk A-ból B-be, majd vissza B-ből A-ba. Megegyezik-e az oda-vissza út ideje, ha a víz folyó, ill. tó?

<u>Megoldás:</u>

Ha a víz egy folyó és A-tól B felé folyik v_f sebességgel, akkor
A-ból B-be $t_{AB} = d / (v_{cs} + v_f)$ idő alatt,
B-ből A-ba $t_{BA} = d / (v_{cs} - v_f)$ idő alatt ér a csónak,
tehát az összes idő
$t_{folyó} = d/(v_{cs} + v_f) + d/(v_{cs} - v_f)$.
Ha a víz egy tó, akkor oda- ill. visszaút ideje is $t = d / v_{cs}$, tehát $t_{tó} = 2d / v_{cs}$.

$$\frac{t_{folyó}}{t_{tó}} = \frac{\frac{d}{v_{cs}+v_f}+\frac{d}{v_{cs}-v_f}}{\frac{2d}{v_{cs}}} = \frac{\frac{v_{cs}-v_f+v_{cs}+v_f}{{v_{cs}}^2-{v_f}^2}}{\frac{2}{v_{cs}}} = \frac{{v_{cs}}^2}{{v_{cs}}^2-{v_f}^2} > 1$$

Hogyhogy? mert a folyó kevesebb ideig segíti a csónakot, mint akadályozza.

Általában: ha

t_1 ideig v_1 sebességgel haladva s_1 utat, majd

t_2 ideig v_2 sebességgel haladva s_2 utat tett meg a test,

akkor általánosan az átlagsebesség $v_{átl} = \frac{s_1+s_2}{t_1+t_2}$.

Speciálisan ha $t_1 = t_2 = t$, akkor $v_{átl} = \frac{s_1+s_2}{t_1+t_2} = \frac{v_1 t+v_2 t}{t+t} = \frac{v_1+v_2}{2}$,

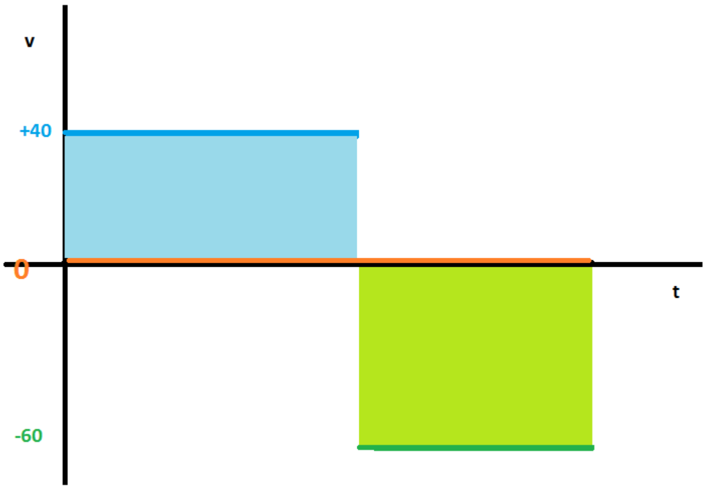
de ha $s_1 = s_2 = s$, akkor $v_{átl} = \frac{s_1+s_2}{t_1+t_2} = \frac{s+s}{s/v_1+s/v_2} = \frac{2}{1/v_1+1/v_2} = \frac{2v_1 v_2}{v_1+v_2}$.

Átlagsebesség: $v_{átl} = \Delta x / \Delta t$

az A $\to$ B $\to$ A mozgásra?!?

Ha visszaérkezett oda, ahonnan elindult, akkor $\Delta x = 0 \quad \to \quad v_{átl} = 0$!!!

A B $\to$ A szakaszon ellentétes irányban mozgott azzal, mint amikor az A $\to$ B szakaszon mozgott, a sebességének az előjele ellentétes:



A területek előjelesen értendők!
A két terület összege zérus.

Tehát $v_{átl} = \Delta x / \Delta t$ az általános képlet.

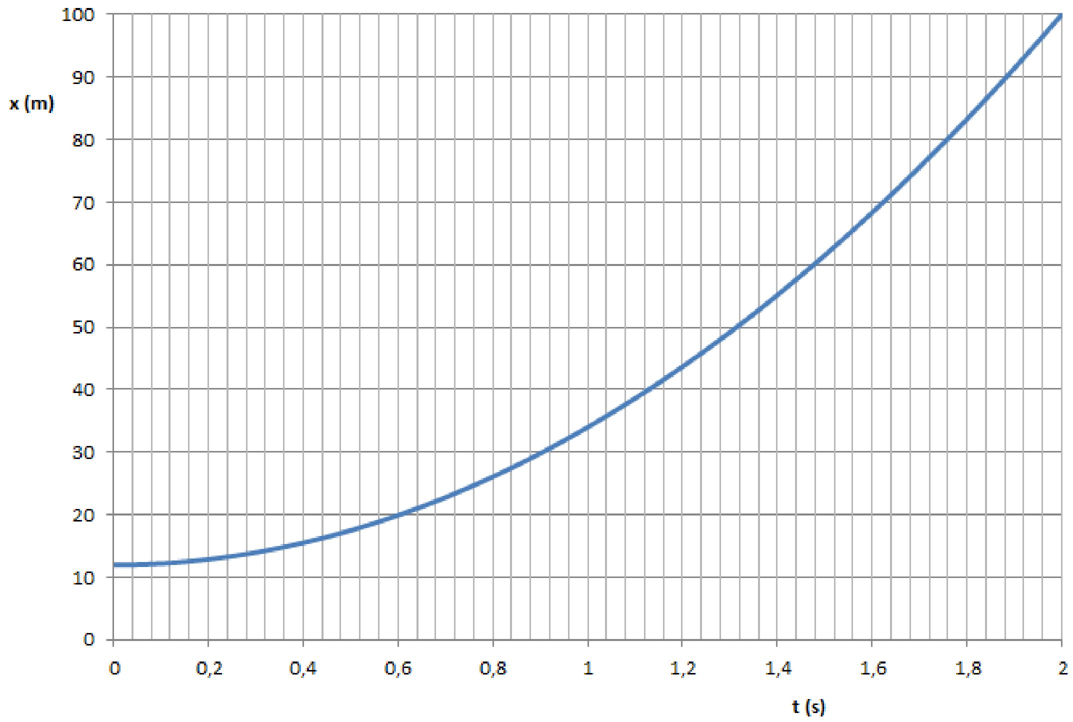
De a köznapi életben használatos a **sebesség nagyságának átlaga**:

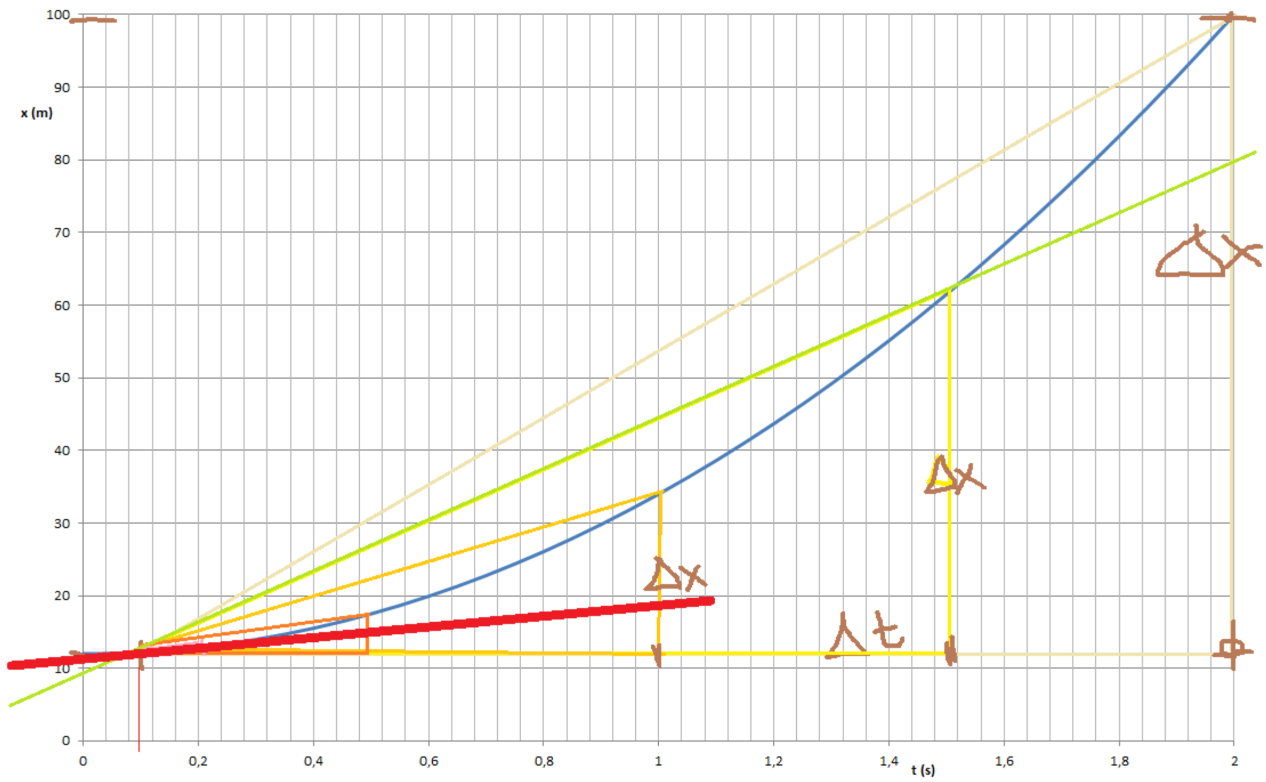
$|v|_{átl} = s / t$ (azaz az összes megtett út osztva az összes eltelt idővel)

Ez mindig pozitív, mert minden elmozdulásnak a nagyságát összegezzük.

Hogyan számolható a pillanatnyi sebesség, ha nem lineáris az x(t) függvény?

pl. $x(t) = 22t^2 + 12$. Mennyi a pillanatnyi sebesség t = 0,1 s-ban?





t (s)	x (m)	Δt = t - 0,1 s	Δx = x - x(0,1)	v_átl = Δx / Δt
0	12			
0,05	12,055			
0,1	12,22	0	0	v = ???
0,11	12,2662	0,01	0,0462	4,62
0,12	12,3168	0,02	0,0968	4,84
0,13	12,3718	0,03	0,1518	5,06
0,14	12,4312	0,04	0,2112	5,28
0,15	12,495	0,05	0,275	5,5
0,2	12,88	0,1	0,66	6,6
0,25	13,375	0,15	1,155	7,7
0,3	13,98	0,2	1,76	8,8
0,35	14,695	0,25	2,475	9,9
0,4	15,52	0,3	3,3	11
0,45	16,455	0,35	4,235	12,1
0,5	17,5	0,4	5,28	13,2
0,55	18,655	0,45	6,435	14,3
0,6	19,92	0,5	7,7	15,4
0,65	21,295	0,55	9,075	16,5
0,7	22,78	0,6	10,56	17,6
0,75	24,375	0,65	12,155	18,7
0,8	26,08	0,7	13,86	19,8
0,85	27,895	0,75	15,675	20,9
0,9	29,82	0,8	17,6	22
0,95	31,855	0,85	19,635	23,1
1	34	0,9	21,78	24,2
1,05	36,255	0,95	24,035	25,3
1,1	38,62	1	26,4	26,4
1,15	41,095	1,05	28,875	27,5
1,2	43,68	1,1	31,46	28,6
1,25	46,375	1,15	34,155	29,7
1,3	49,18	1,2	36,96	30,8
1,35	52,095	1,25	39,875	31,9
1,4	55,12	1,3	42,9	33
1,45	58,255	1,35	46,035	34,1
1,5	61,5	1,4	49,28	35,2
1,55	64,855	1,45	52,635	36,3
1,6	68,32	1,5	56,1	37,4
1,65	71,895	1,55	59,675	38,5
1,7	75,58	1,6	63,36	39,6
1,75	79,375	1,65	67,155	40,7
1,8	83,28	1,7	71,06	41,8
1,85	87,295	1,75	75,075	42,9
1,9	91,42	1,8	79,2	44
1,95	95,655	1,85	83,435	45,1
2	100	1,9	87,78	46,2

Tudunk átlagsebességet számolni egy intervallumra.
Kiindulunk 0,1 s-tól, ahhoz képest eltelik Δt idő,
tehát a 0,1 s $\to$ 0,1 s $+\Delta t$ időintervallumot vizsgáljuk:
az intervallum kezdetén $x(0{,}1) = 22\cdot 0{,}1^2+12$ [m],
az intervallum végén $x(0{,}1+\Delta t) = 22\cdot(0{,}1+\Delta t)^2+12$ [m]
$\to$ $\Delta x = (22\cdot(0{,}1+\Delta t)^2+12) - (22\cdot 0{,}1^2+12)$
$v_{\acute{a}tl} = \Delta x / \Delta t = [(22\cdot(0{,}1+\Delta t)^2+12) - (22\cdot 0{,}1^2+12)] / \Delta t$

Δt -t egyre kisebbre választhatjuk, de minket az érdekel, amikor $\Delta t = 0$.

Ez határértékként írható fel:

$$v_{pill}(0{,}1) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(0{,}1+\Delta t)-x(0{,}1)}{(0{,}1+\Delta t)-0{,}1} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(22(0{,}1+\Delta t)^2+12)-(22\cdot 0{,}1^2+12)}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{22((0{,}1+\Delta t)^2-0{,}1^2)}{\Delta t} = = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{22(0{,}1^2+2\cdot 0{,}1\cdot\Delta t+(\Delta t)^2-0{,}1^2)}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{22(2\cdot 0{,}1\cdot\Delta t+(\Delta t)^2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{22(2\cdot 0{,}1+\Delta t)\cdot\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} 22(2\cdot 0{,}1+\Delta t)$$

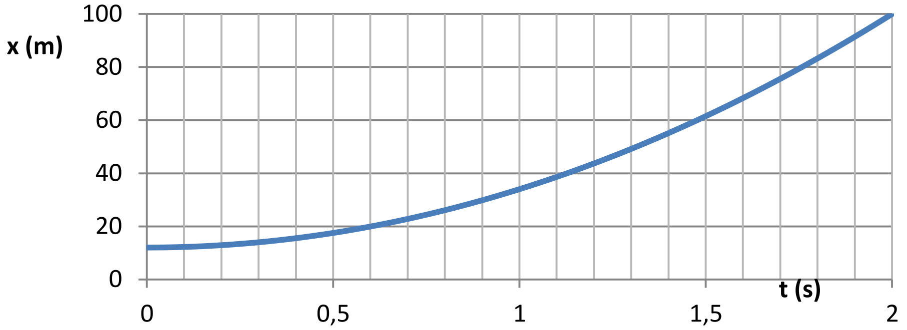
$\Delta t \to 0$ esetén marad $v_{pill}(0{,}1) = 22\cdot 2\cdot 0{,}1 = 4{,}4$ m/s.
Ehhez tartanak a táblázat utolsó oszlopában kiszámolt $v_{\acute{a}tl}$ értékek,
ennyi a t = 0,1 s-nál a görbéhez húzott érintő meredeksége.

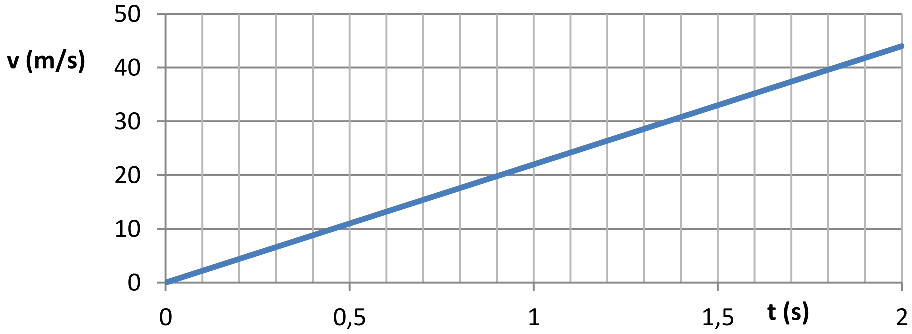
Tetszőleges időpontra is felírhatjuk a határértéket:

$$v_{pill}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{(t+\Delta t)-t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(22(t+\Delta t)^2+12)-(22\cdot t^2+12)}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{22((t+\Delta t)^2-t^2)}{\Delta t} = = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{22(t^2+2\cdot t\cdot\Delta t+(\Delta t)^2-t^2)}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{22(2\cdot t\cdot\Delta t+(\Delta t)^2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{22(2\cdot t+\Delta t)\cdot\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} 22(2\cdot t+\Delta t)$$

$\Delta t \to 0$ esetén marad $v_{pill}(t) = 22\cdot 2\cdot t = 44\,t$ [m/s].

Ezzel megkaptunk egy függvényt, ami minden időben az x(t) pillanatnyi növekedési sebességét mutatja.
Ebbe belehelyettesítve pl. a t = 0,1 s-t megkapjuk a $v_{pill}(0{,}1)$ értékét: $v_{pill}(0{,}1) = 44\cdot 0{,}1 = 4{,}4$ m/s.





A **pillanatnyi sebesség** az átlagsebesség határértéke $\Delta t \to 0$ esetén:

$$v_{pill}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{átl} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \qquad ***$$

azaz **az x(t) függvény idő szerinti deriváltja:**

jelölése:

$$v_{pill}(t) = \frac{d\,x(t)}{d\,t} = \frac{d\,x}{d\,t} = \dot{x} \;,$$

A továbbiakban nem fogjuk hozzátenni, hogy „pillanatnyi".

A legrövidebb jelölés:

$$v = \dot{x}\,.$$

***A határérték-képzéskor zérushoz tartó mennyiségeket osztunk egymással, de nem azt kell nézni, hogy a számláló vagy a nevező külön-külön zérushoz tart, hanem hogy a hányadosuk milyen véges értékhez tart.

Deriváláskor nem kell a határértékes számítást mindig végigvinni, hanem tudjuk, hogy egyes függvényeknek mi a derivált függvénye.
Fizikához most az alábbiakat fontos tudnunk:
hatvány: $d\,(t^n) / dt = n \cdot t^{n-1}$
$d\,(\sin(t)) / dt = \cos(t)$ és $d\,(\cos(t)) / dt = -\sin(t)$ (grafikus trükk!)
$d\,(e^t) / dt = e^t$
(a független változó nem x-szel van jelölve, hanem t-vel, mivel esetünkben a legtöbb mennyiség az idő függvénye)
Fontos tudni még a deriválási szabályokat (összeg, szorzat, hányados).
Vannak olyan számítógépes programok is, amikkel nem csak numerikusan lehet deriválni, hanem kiírja a függvényt is.

Vizsgáljuk most a v(t) (pillanatnyi) sebesség változását!

$\Delta v / \Delta t = a_{\text{átl}}$ a test **átlagos gyorsulás**a a Δt időintervallumra.

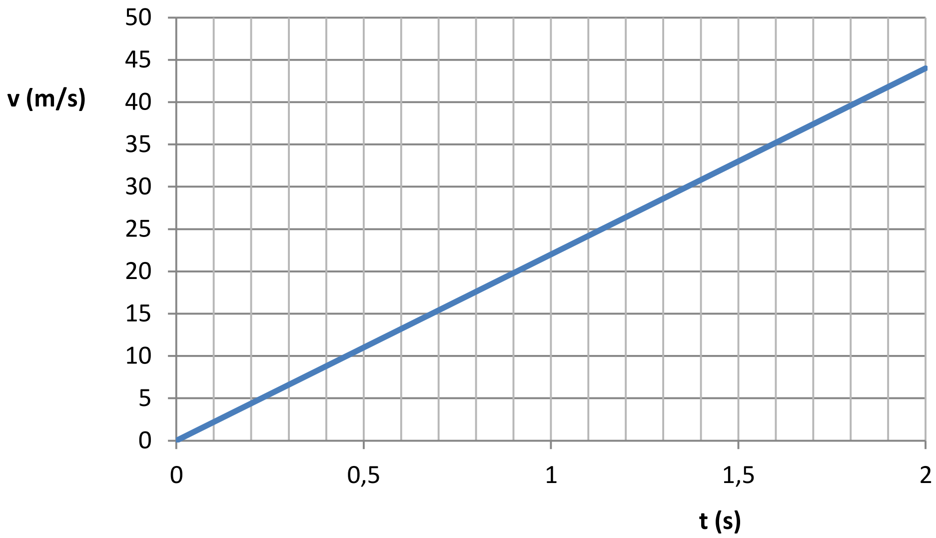
A test (pillanatnyi) gyorsulását a (pillanatnyi) sebességhez hasonlóan vezethetjük be:

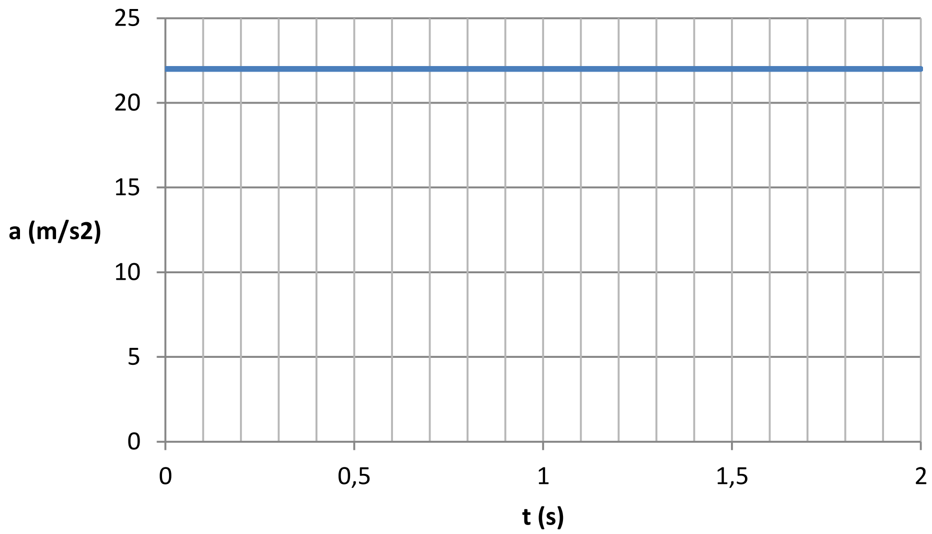
$$a = a_{\text{pill}} = \lim_{\Delta t \to 0} a_{\text{átl}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

A **gyorsulás** a v(t) függvény idő szerinti deriváltja: röviden

$a = \dot{v}$ (egyenes vonalú mozgás esetén).

Mivel $v = \dot{x}$, a gyorsulás kifejezhető az x(t) függvény második deriváltjaként:
$a = \dot{v} = \ddot{x}$.



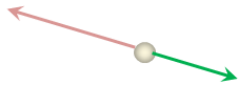


Magasabb rendű deriváltak: mi az $\dot{a}$? van olyan?!? – magyarázat a dinamikában.
Példák: infláció, árfolyam, árvíz, Csernobil/Fukushima, a népesség növekedése/csökkenése,…

KATICA
https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/ladybug-motion-2d
https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/maze-game

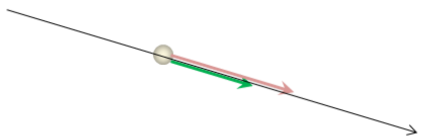
A gyorsulásvektor a sebességvektor változását mutatja.

Ha egy irányba mutat a sebességvektorral, akkor a sebesség nagysága nőni fog;



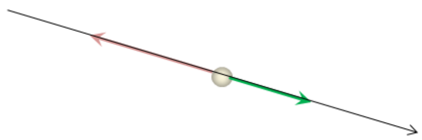
ha ellenkező irányba mutat vele, akkor a sebesség nagysága csökkenni fog.

Ha felveszünk egy x tengelyt, előjelükkel tudjuk megadni a mennyiségeket:



$v > 0$ és $a > 0$

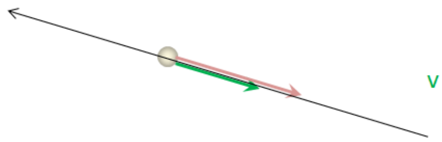
Ha egy irányba mutat a sebességvektorral, akkor a sebesség nagysága nőni fog;



$v > 0$ és $a < 0$

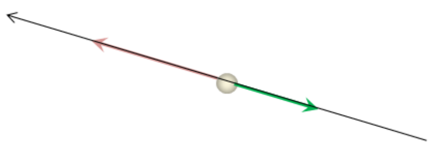
ha ellenkező irányba mutat vele, akkor a sebesség nagysága csökkenni fog.

Vagy ellentétes irányítottsággal:



$v < 0$ és $a < 0$

Ha egy irányba mutat a sebességvektorral, akkor a sebesség nagysága nőni fog;



$v < 0$ és $a > 0$

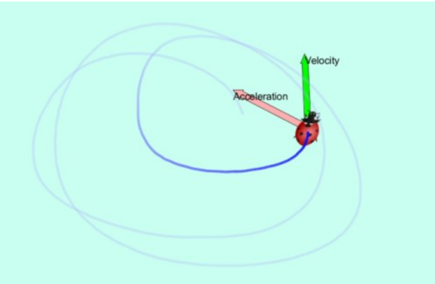
ha ellenkező irányba mutat vele, akkor a sebesség nagysága csökkenni fog.

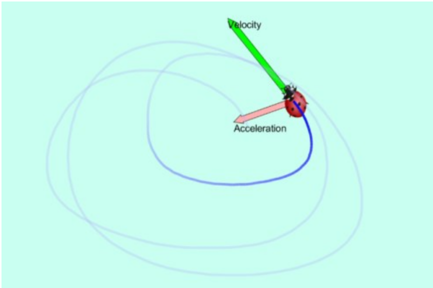
$v>0$ és $a>0$: az x növekedésének irányába halad egyre gyorsabban;
$v>0$ és $a<0$: az x növekedésének irányába halad egyre lassabban;
$v<0$ és $a<0$: az x csökkenésének irányába halad egyre gyorsabban;
$v<0$ és $a>0$: az x csökkenésének irányába halad egyre lassabban.

Milyen lehet a gyorsulásvektor iránya a sebességvektorhoz képest?

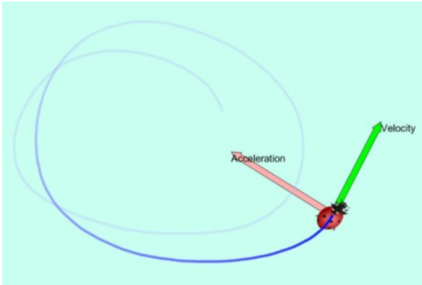
Bármilyen. Mi mit jelent? **a**-t felbontjuk **v**-vel párhuzamos és arra merőleges komponensekre.

Ha a gyorsulás nem pontosan merőleges a sebességre, akkor a sebesség nagysága is változik:
ha hegyes szöget zárnak be, akkor a test gyorsabb lesz:





ha tompa szöget, akkor a test lassul:



A gyorsulásnak a sebességgel párhuzamos komponense a sebesség nagyságát változtatja (növeli, ha egyirányúak, ill. csökkenti, ha ellentétes irányúak); a gyorsulás sebességre merőleges komponense pedig a sebesség irányát változtatja meg (a sebesség nagyságát nem befolyásolja). Ahhoz is kell tehát gyorsulás, hogy a test állandó nagyságú sebességgel irányt változtasson!