**KINEMATIKA folytatás**

**Átlagsebesség** egyenes vonalú mozgás esetén:

vátl = Δx / Δt , ahol Δx = xvég – xkezdő

Pozitív, ha a végpont x koordinátája nagyobb a kezdőpont x koordinátájánál, vagyis növekvő x értékek irányába mozdult el a test;

ill. negatív, ha csökkenő x értékek irányába mozdul el.

Ha a mozgás végpontjaként a test visszaérkezik a kiindulópontba, akkor vált = 0.

Átlagsebesség számítása:

1. feladat

Két helyiség közötti autóbuszjáraton a kocsik átlagsebessége   
egyik irányban 40 km/h,   
a másik irányban 60 km/h.   
Mekkora az átlagsebesség egy teljes fordulót figyelembe véve?

Megoldás:

Az út s km; pl. s = 120 km ,

odafelé t1 = s / v1 = s/40 óra; t1 = 120/40 = 3 h ,

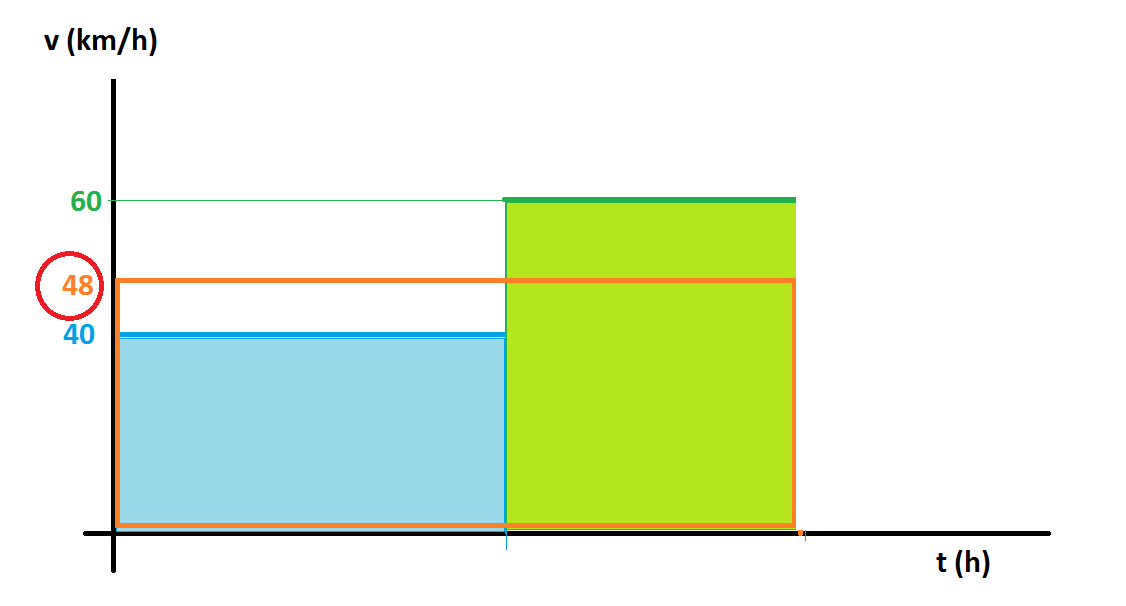
visszafelé t2 = s / v2 = s/60 óra alatt teszi meg. t2 = 120/60 = 2 h ,

Az összes út s+s = 2s; 2s = 120 km,

az összes idő t1 + t2 = s/40 + s/60 óra, t1+t2 = 5 h ,

vátl = Δx / Δt = = 48 km/h. vátl = 240/5 = 48 km/h.

Az átlagsebesség általában nem számolható egyszerűen a pillanatnyi sebességek átlagaként!



s = v∙t a diagramon a téglalapok területe. A kék és a zöld téglalap területe megegyezik, mivel oda-vissza ugyanakkora utat tesz meg. Nagyobb sebesség → rövidebb idő. Átlagsebesség: akkora területű téglalap, mint a kék és zöld összege, az idő a kék és zöld idő-tengelyen fekvő oldalainak összege → ebből kiadódik a vátl értéke.

Átlagsebesség (és általánosan valamilyen időben változó mennyiség átlagos értéke): mekkora az a konstans érték, ami az adott időintervallum alatt ugyanakkora változást hoz létre, mint az időben változó mennyiség?

Grafikusan: tetszőleges alakú terület → téglalap.

2. feladat

A és B város vízparton helyezkednek el egymástól d távolságra. Egy motorcsónakkal, ami a vízhez képest vcs sebességgel tud menni, elmegyünk A-ból B-be, majd vissza B-ből A-ba. Megegyezik-e az oda-vissza út ideje, ha a víz folyó, ill. tó?

Megoldás:

Ha a víz egy folyó és A-tól B felé folyik vf sebességgel, akkor

A-ból B-be tAB = d / (vcs + vf) idő alatt,

B-ből A-ba tBA = d / (vcs – vf) idő alatt ér a csónak,

tehát az összes idő   
tfolyó = d/(vcs + vf) + d/(vcs – vf).

Ha a víz egy tó, akkor oda- ill. visszaút ideje is t = d / vcs , tehát ttó = 2d / vcs.

Hogyhogy? mert a folyó kevesebb ideig segíti a csónakot, mint akadályozza.

Általában: ha

t1 ideig v1 sebességgel haladva s1 utat, majd

t2 ideig v2 sebességgel haladva s2 utat tett meg a test,

akkor általánosan az átlagsebesség .

Speciálisan ha t1 = t2 = t, akkor ,

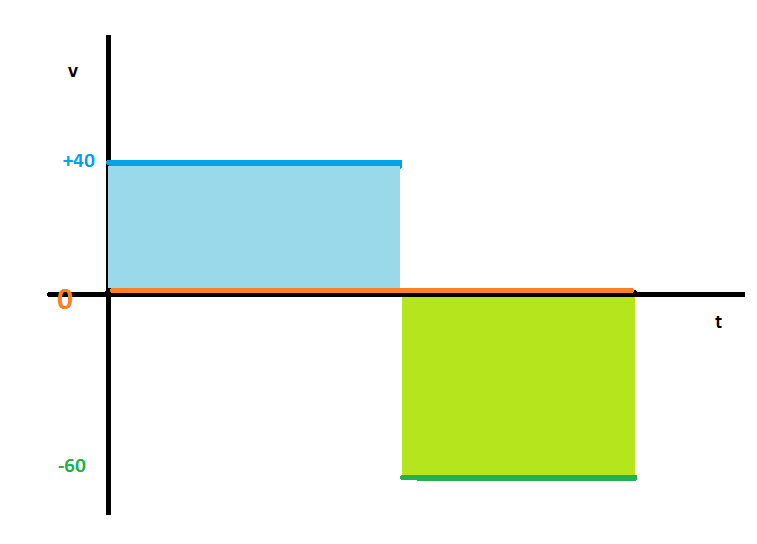
de ha s1 = s2 = s, akkor .

Átlagsebesség: vátl = Δx / Δt

az A → B → A mozgásra?!?

Ha visszaérkezett oda, ahonnan elindult, akkor Δx = 0 → vátl = 0 !!!

A B → A szakaszon ellentétes irányban mozgott azzal, mint amikor az A → B szakaszon mozgott, a sebességének az előjele ellentétes:



A területek előjelesen értendők!

A két terület összege zérus.

Tehát vátl = Δx / Δt az általános képlet.

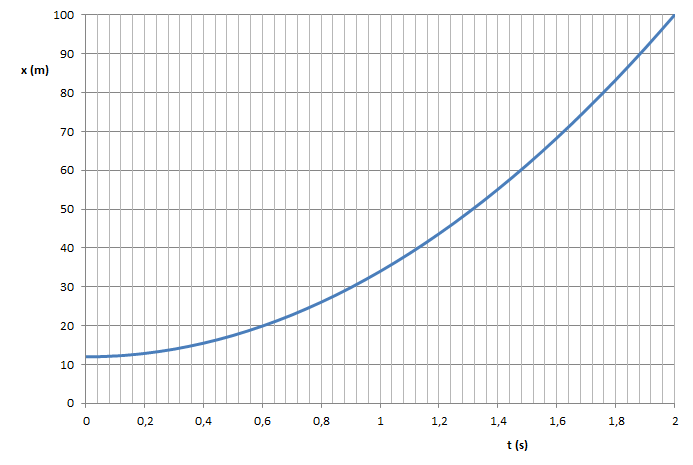
De a köznapi életben használatos a **sebesség nagyságának átlaga**:

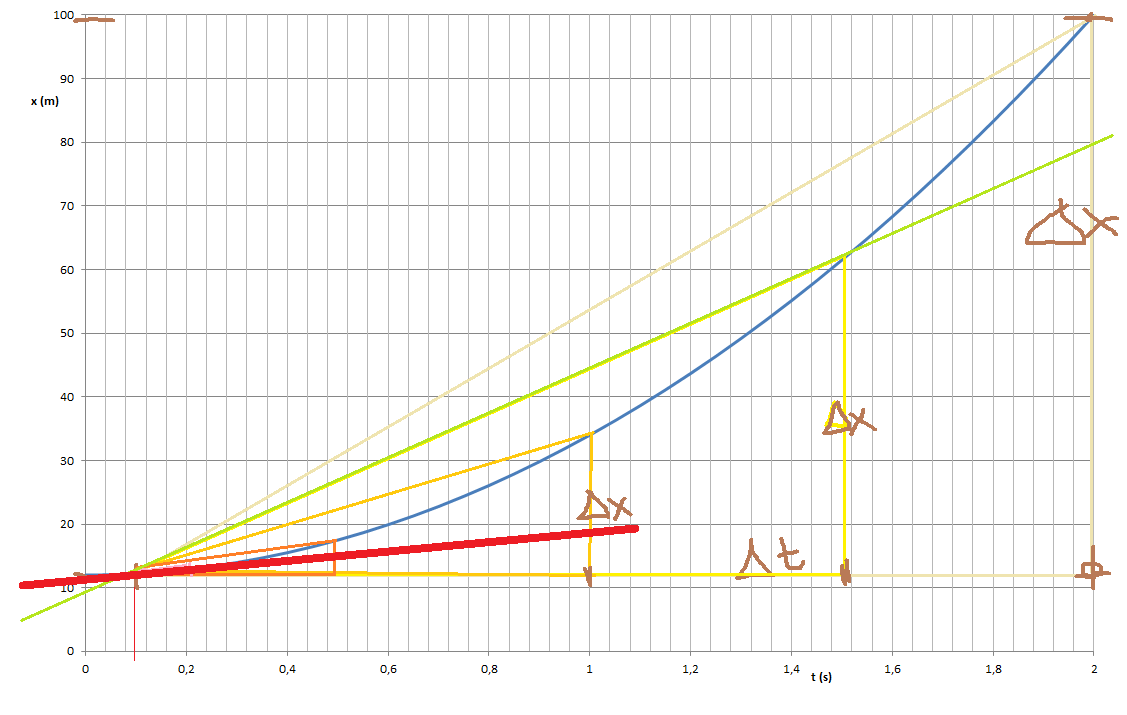
|v|átl = s / t (azaz az összes megtett út osztva az összes eltelt idővel)

Ez mindig pozitív, mert minden elmozdulásnak a nagyságát összegezzük.

**Hogyan számolható a pillanatnyi sebesség, ha nem lineáris az x(t) függvény?**

pl. x(t) = 22t2 + 12. Mennyi a pillanatnyi sebesség t = 0,1 s-ban?





|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| t (s) | x (m) | t = t - 0,1 s | x = x - x(0,1) | v\_átl = x / t |
| 0 | 12 |  |  |  |
| 0,05 | 12,055 |  |  |  |
| 0,1 | 12,22 | 0 | 0 | v = ??? |
| 0,11 | 12,2662 | 0,01 | 0,0462 | 4,62 |
| 0,12 | 12,3168 | 0,02 | 0,0968 | 4,84 |
| 0,13 | 12,3718 | 0,03 | 0,1518 | 5,06 |
| 0,14 | 12,4312 | 0,04 | 0,2112 | 5,28 |
| 0,15 | 12,495 | 0,05 | 0,275 | 5,5 |
| 0,2 | 12,88 | 0,1 | 0,66 | 6,6 |
| 0,25 | 13,375 | 0,15 | 1,155 | 7,7 |
| 0,3 | 13,98 | 0,2 | 1,76 | 8,8 |
| 0,35 | 14,695 | 0,25 | 2,475 | 9,9 |
| 0,4 | 15,52 | 0,3 | 3,3 | 11 |
| 0,45 | 16,455 | 0,35 | 4,235 | 12,1 |
| 0,5 | 17,5 | 0,4 | 5,28 | 13,2 |
| 0,55 | 18,655 | 0,45 | 6,435 | 14,3 |
| 0,6 | 19,92 | 0,5 | 7,7 | 15,4 |
| 0,65 | 21,295 | 0,55 | 9,075 | 16,5 |
| 0,7 | 22,78 | 0,6 | 10,56 | 17,6 |
| 0,75 | 24,375 | 0,65 | 12,155 | 18,7 |
| 0,8 | 26,08 | 0,7 | 13,86 | 19,8 |
| 0,85 | 27,895 | 0,75 | 15,675 | 20,9 |
| 0,9 | 29,82 | 0,8 | 17,6 | 22 |
| 0,95 | 31,855 | 0,85 | 19,635 | 23,1 |
| 1 | 34 | 0,9 | 21,78 | 24,2 |
| 1,05 | 36,255 | 0,95 | 24,035 | 25,3 |
| 1,1 | 38,62 | 1 | 26,4 | 26,4 |
| 1,15 | 41,095 | 1,05 | 28,875 | 27,5 |
| 1,2 | 43,68 | 1,1 | 31,46 | 28,6 |
| 1,25 | 46,375 | 1,15 | 34,155 | 29,7 |
| 1,3 | 49,18 | 1,2 | 36,96 | 30,8 |
| 1,35 | 52,095 | 1,25 | 39,875 | 31,9 |
| 1,4 | 55,12 | 1,3 | 42,9 | 33 |
| 1,45 | 58,255 | 1,35 | 46,035 | 34,1 |
| 1,5 | 61,5 | 1,4 | 49,28 | 35,2 |
| 1,55 | 64,855 | 1,45 | 52,635 | 36,3 |
| 1,6 | 68,32 | 1,5 | 56,1 | 37,4 |
| 1,65 | 71,895 | 1,55 | 59,675 | 38,5 |
| 1,7 | 75,58 | 1,6 | 63,36 | 39,6 |
| 1,75 | 79,375 | 1,65 | 67,155 | 40,7 |
| 1,8 | 83,28 | 1,7 | 71,06 | 41,8 |
| 1,85 | 87,295 | 1,75 | 75,075 | 42,9 |
| 1,9 | 91,42 | 1,8 | 79,2 | 44 |
| 1,95 | 95,655 | 1,85 | 83,435 | 45,1 |
| 2 | 100 | 1,9 | 87,78 | 46,2 |

Tudunk átlagsebességet számolni egy intervallumra.

Kiindulunk 0,1 s-tól, ahhoz képest eltelik Δt idő,

tehát a 0,1 s → 0,1 s +Δt időintervallumot vizsgáljuk:

az intervallum kezdetén x(0,1) = 22∙0,12+12 [m],

az intervallum végén x(0,1+Δt) = 22∙(0,1+Δt)2+12 [m]

→ Δx = (22∙(0,1+Δt)2+12) – (22∙0,12+12)

vátl = Δx / Δt = [(22⋅(0,1+Δt)2+12) – (22⋅0,12+12)] / Δt

Δt -t egyre kisebbre választhatjuk, de minket az érdekel, amikor Δt = 0.

Ez határértékként írható fel:

vpill(0,1) =

Δt → 0 esetén marad vpill(0,1) = 22∙2∙0,1 = 4,4 m/s.

Ehhez tartanak a táblázat utolsó oszlopában kiszámolt vátl értékek,

ennyi a t = 0,1 s-nál a görbéhez húzott érintő meredeksége.

Tetszőleges időpontra is felírhatjuk a határértéket:

vpill(t) =

Δt → 0 esetén marad vpill(t) = 22∙2∙t = 44 t [m/s].

Ezzel megkaptunk egy függvényt, ami minden időben az x(t) pillanatnyi növekedési sebességét mutatja.

Ebbe belehelyettesítve pl. a t = 0,1 s-t megkapjuk a vpill(0,1) értékét: vpill(0,1) = 44∙0,1 = 4,4 m/s.

A **pillanatnyi sebesség** az átlagsebesség határértéke Δt → 0 esetén:

\*\*\*

azaz **az x(t) függvény idő szerinti deriváltja:**

jelölése:

,

A továbbiakban nem fogjuk hozzátenni, hogy „pillanatnyi”.

A legrövidebb jelölés:

.

\*\*\*A határérték-képzéskor zérushoz tartó mennyiségeket osztunk egymással, de nem azt kell nézni, hogy a számláló vagy a nevező külön-külön zérushoz tart, hanem hogy a hányadosuk milyen véges értékhez tart.

Deriváláskor nem kell a határértékes számítást mindig végigvinni, hanem tudjuk, hogy egyes függvényeknek mi a derivált függvénye.

Fizikához most az alábbiakat fontos tudnunk:

**hatvány: d (tn) / dt = n·tn–1**

d (sin(t)) / dt = cos(t) és d (cos(t)) / dt = –sin(t) (grafikus trükk!)

d (et) / dt = et

(a független változó nem x-szel van jelölve, hanem t-vel, mivel esetünkben a legtöbb mennyiség az idő függvénye)

Fontos tudni még a deriválási szabályokat (összeg, szorzat, hányados).

Vannak olyan számítógépes programok is, amikkel nem csak numerikusan lehet deriválni, hanem kiírja a függvényt is.

Vizsgáljuk most a v(t) (pillanatnyi) sebesség változását!

Δv / Δt = aátl a test **átlagos gyorsulás**a a Δt időintervallumra.

A test (pillanatnyi) gyorsulását a (pillanatnyi) sebességhez hasonlóan vezethetjük be:

A **gyorsulás** a v(t) függvény idő szerinti deriváltja: röviden

(egyenes vonalú mozgás esetén).

Mivel , a gyorsulás kifejezhető az x(t) függvény második deriváltjaként:

.

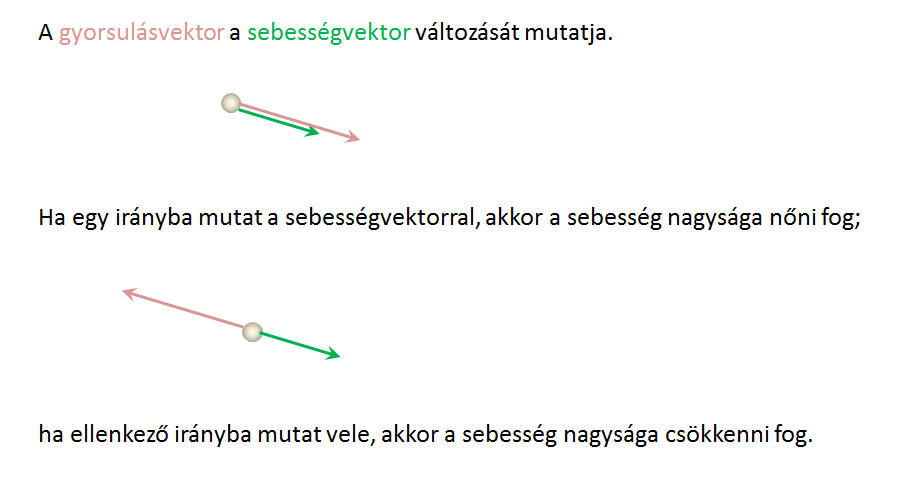
Magasabb rendű deriváltak: mi az ? van olyan?!? – magyarázat a dinamikában.

Példák: infláció, árfolyam, árvíz, Csernobil/Fukushima, a népesség növekedése/csökkenése,…

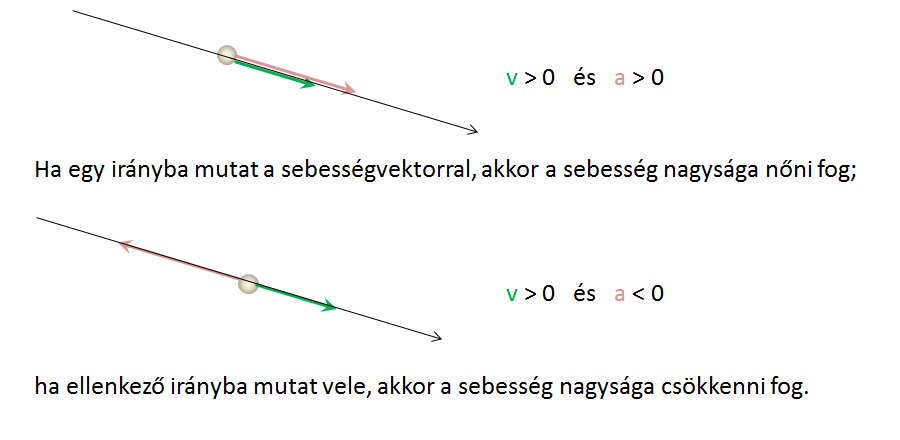
KATICA

<https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/ladybug-motion-2d>

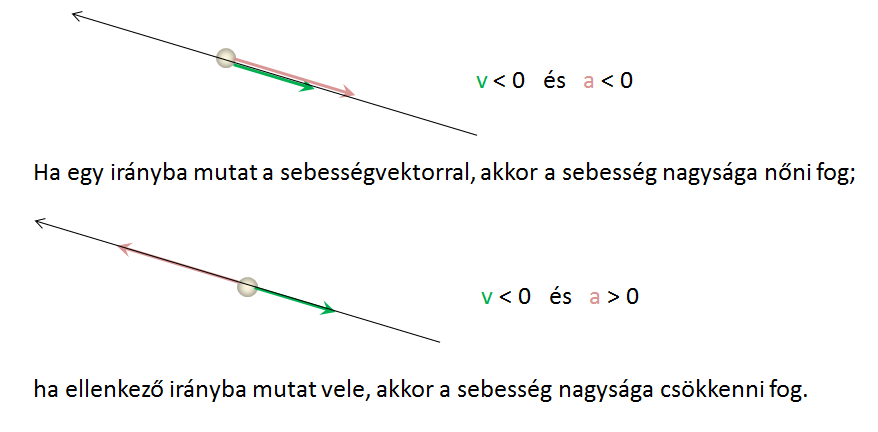
<https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/maze-game>



Ha felveszünk egy x tengelyt, előjelükkel tudjuk megadni a mennyiségeket:



Vagy ellentétes irányítottsággal:



v>0 és a>0: az x növekedésének irányába halad egyre gyorsabban;

v>0 és a<0: az x növekedésének irányába halad egyre lassabban;

v<0 és a<0: az x csökkenésének irányába halad egyre gyorsabban;

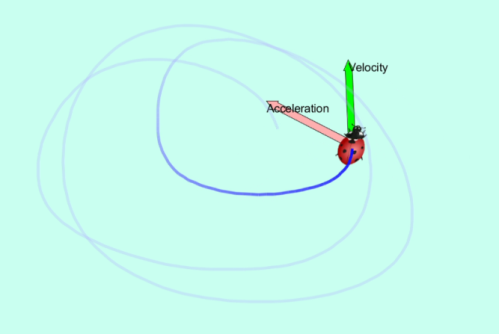
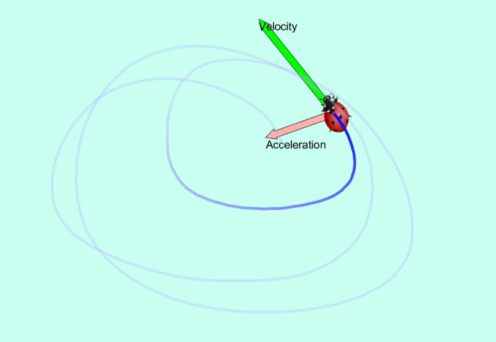
v<0 és a>0: az x csökkenésének irányába halad egyre lassabban.

Milyen lehet a gyorsulásvektor iránya a sebességvektorhoz képest?

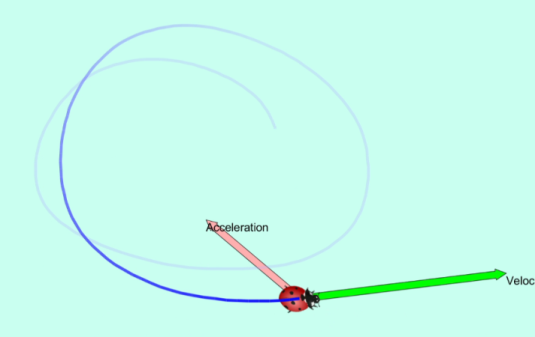
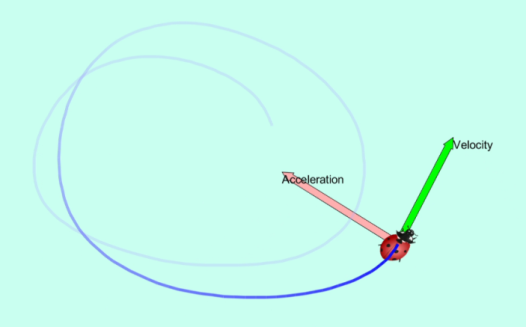
Bármilyen. Mi mit jelent? **a**-t felbontjuk **v**-vel párhuzamos és arra merőleges komponensekre.

Ha a gyorsulás nem pontosan merőleges a sebességre, akkor a sebesség nagysága is változik:

ha hegyes szöget zárnak be, akkor a test gyorsabb lesz:

ha tompa szöget, akkor a test lassul:

A gyorsulásnak a sebességgel párhuzamos komponense a sebesség nagyságát változtatja (növeli, ha egyirányúak, ill. csökkenti, ha ellentétes irányúak); a gyorsulás sebességre merőleges komponense pedig a sebesség irányát változtatja meg (a sebesség nagyságát nem befolyásolja). Ahhoz is kell tehát gyorsulás, hogy a test állandó nagyságú sebességgel irányt változtasson!