**A szürke háttérrel jelölt rész nem vizsgaanyag**

egységesíteni a jelöléseket, és egy jelöléslistát csinálni?!

pl. **Fk**! kötélerő? közegellenállási erő?

pl. m**g** helyett **Fg**?

pl. **Fg** gravitációs erő: általános ill. földi

pl. ω: szögsebesség ill. körfrekvencia

**MECHANIKA** (klasszikus mechanika)

**Modellek.**

**Fizikai mennyiség**: mérési utasítással definiálható.

Fizikai mennyiség megadása: mérőszám és mértékegység szorzata.

Jelölésekhez használjuk a görög ABC betűit is

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | minek a jelölésére szoktuk használni? | | | |
| alfa | α | szög; bizonyos konstansok | Α |  |
| béta | β | szöggyorsulás (lehet szög is) | Β |  |
| gamma | γ | szög | Γ |  |
| delta | δ | szög | Δ | megváltozás |
| epszilon | ε | „kicsi” | Ε |  |
| zéta | ζ |  | Ζ |  |
| éta | η | hatásfok | Η |  |
| teta | θ |  | Θ | tehetetlenségi nyomaték;  hőmérséklet (°C esetén) |
| iota | ι |  | Ι |  |
| kappa | κ |  | Κ |  |
| lambda | λ | hullámhossz | Λ |  |
| mű | μ | súrlódási együttható | Μ |  |
| nű | ν | frekvencia | Ν |  |
| kszi | ξ |  | Ξ |  |
| omikron | ο |  | Ο |  |
| pí | π |  | Π | szorzat |
| ró | ρ | sűrűség | Ρ |  |
| szigma | ς , σ |  | Σ | összeg |
| tau | τ | idő, időállandó | Τ |  |
| üpszilon | υ |  | Υ |  |
| fí | φ | szög | Φ |  |
| khí | χ |  | Χ |  |
| pszí | ψ |  | Ψ |  |
| omega | ω | szögsebesség | Ω | Ohm |

Egységes mértékegység-rendszer: az **SI rendszer** (1960).

2019. májusától változás: minden definíció fizikai állandón alapul!

**Alapmennyiségek:**

Idő: **s**: eredetileg a nap, majd az év hosszával definiálták; most atomi átmenettel (Cs-133).

[A cézium-133 által kibocsátott fény frekvenciája ν = 9192631770 Hz.]

Hosszúság: **m**: XVIII. szd-i definíció: (gondolkoztak a másodpercingán, de nem az lett, mert a g nem állandó, hanem) a Párizson átmenő délkör tízmilliomod része (tehát az Egyenlítő ~40ezer km). De honnan tudták, mekkora a Föld? [Simonyi: A fizika kultúrtörténete 83-84. oldal] azt már a görögök is tudták: Eratosztenész (az alexandriai könyvtár vezetője) mérése i.e. 230 körül: a nyári napfordulókor Szieneben (Asszuánhoz közel) délben a napsugár pont merőlegesen érkezik a földre (visszacsillan a kút mélye), és megmérte, milyen szögben érkezik ugyanekkor a napsugár Alexandriában a földre, ami azonos délkörön van. 360°/50-t mért, ebből kiszámolható, hogy a Föld kerülete 50-szerese a Sziene-Alexandria távolságnak. Az meg mennyi? 50 nap tevekaravánnal, ami napi 100 stádiummal számolva 5000 stádium. tehát a Föld kerülete 250000 stádium. De mennyi az méterben? Az egyiptomi stádium 157 m → 39250 km, a görög stádium 180 m → 45000 km, a későegyiptomi stádium 211 m → 52750 km. 1795-ben csináltak méter-etalont (ami egyébként rövid volt), a hőtágulás probléma. Állandóbb mennyiséghez akarták kötni → bizonyos atomi átmenethez tartozó hullámhosszal (Kr-86), ma pedig (1983 óta)   
most a fénysebességgel definiálják (a fény által vákuumban 1/c másodperc alatt megtett út hossza), c [ = 299792458 m/s ] ≈ 3·108 m/s .

Tömeg: **kg**: 1 dm3 4 °C-os víz tömege → etalon (Pt-Ir henger); most a Planck állandó alapján.

Gyakorlati szempontból maradnak az etalonok. Mérés: Kibble mérleggel (áramjárta tekercs által kifejtett erőhatást vet össze mg-vel), ill. Avogadro projekt alapján is lehet.

[Planck állandó: h = 6,62607015∙10–34 kg∙m2/s]

Anyagmennyiség: **mól:** annyi részecske,ahány atom van 12 g C12-ben;   
 ez az Avogadro-szám, NA [ = 6,02214076∙1023 1/mol ] ≈ 6⋅1023

(Mivel a mol tulajdonképpen egy szám, sokan nem tartják mértékegységnek.)

Elektromos áram: **A:** áramjárta vezetők közötti erőhatás alapján; most az elemi töltés alapján.

[ e = 1,602176634∙10–19 C ]

Hőmérséklet: **K:** a víz hármaspontjának 1/273,16-od része; most a Boltzmann állandó alapján.

[ k = 1,380649∙10–23 J/K ]

Fényerősség: **cd** (spektrális fényhasznosítás)

A mechanikához elég lesz 3 mennyiség: s, m, kg.

**Származtatott mennyiségek**: minden visszavezethető a fenti alapmennyiségekre.

Pl. sebesség: [m/s]; gyorsulás: [m/s2]; szögsebesség: [1/s]; szöggyorsulás: [1/s2]; impulzus, lendület: [kg∙m/s], stb.

Bizonyos mennyiségeknek külön elnevezésük is van, pl.

erő: Newton: [N] = [kg·m/s2] (F = ma alapján);

nyomás: Pascal: [Pa] = [kg/(m∙s2)] (p = F/A alapján);

munka, energia, hő: Joule: [J] = [kg⋅m2/s2] (W=F⋅s=m⋅a⋅s alapján);

de: a forgatónyomaték mértékegysége szintén [kg⋅m2/s2], mégse hívjuk J-nak;

teljesítmény: Watt: [W] = [kg⋅m2/s3] (P = W/t alapján);

frekvencia: Herz: [Hz] = [s–1];

de: a szögsebesség mértékegysége szintén [s–1], mégse hívjuk Hz-nek.

A rugóállandót kétféleképpen is használjuk: [N/m] = [kg/s2] (F = –kx alapján).

A mértékegységek alkalmasak arra is, hogy ellenőrizzük a képleteinket (csak olyan lehet helyes, ahol a mennyiségek megegyeznek; a levezetés végeredménye olyan mértékegységű-e, amit ki akartunk hozni). Dimenzióanalízis: a konstansoktól eltekintve ki lehet találni képleteket, ha tudjuk, hogy miből mit akarunk összehozni.

**Származtatott mennyiségek** még az SI rendszerben:

|  |  |
| --- | --- |
| Szög: **radián** (rad): 1 radián az a középponti szög, amely alatt a sugárral megegyező nagyságú ívhossz a középpontból látszik;  *ϕ* = *i* / *r* *i*: ívhossz; *r*: sugár  (a teljes kör 2π; 1 rad ≈ 57,3°) | Térszög: **szteradián** (sr): 1 szteradián az a középponti szög, amely a gömbsugár négyzetével egyenlő területű gömbfelületrészhez tartozik;  *Φ* = *A* / *r*2 *A*: felület; *r*: sugár (a teljes gömb 4π) |
| ϕ  r  i | Φ  r  A |

Tegyük fel, hogy egy B bolygó sugara fele akkora, mint a Földé, pályasugara pedig a Föld pályasugarának másfélszerese. Tegyük fel azt is, hogy mind a Föld, mind a B bolygó közelítőleg ugyanabban a síkban körpályán kering a Nap körül. Számítsuk ki, milyen legkisebb és legnagyobb látószög (sík- illetve térszög) alatt látszik a Földről a B bolygó! (Milyen közelmúltbeli nevezetes csillagászati jelenség van kapcsolatban e feladattal?)

MO.

Föld sugara *R*F ≈ 6400 km, pályasugara *d*F ≈ 150 000 000 km = 1,5⋅108 km

B bolygó sugara *R*B ≈ 3200 km, pályasugara *d*B = 1,5 *d*F ≈ 2,25⋅108 km

*d*min = *d*B – *d*F ≈ 7,5⋅107 km *d*max = 2*d*F + *d*B ≈ 3,75⋅108 km

B sík-látószöge *ϕ* = 2*R*B/*d* = 2⋅3200/*d* ≈ 6400/d, azaz *ϕ*max ≈ 8,53⋅10-5, *ϕ*min ≈ 1,71⋅10-5 (5-szörös).

B tér-látószöge *Φ* = *R*B2π/*d*2 = 32002⋅π/*d*2 ≈ 3,217⋅107/*d*2,

azaz *Φ*max ≈ 5,72⋅10-9, *Φ*min ≈ 2,29⋅10-10 (25-szörös).

(2003. augusztusának végén a Mars mindössze 55,8 millió km távolságra volt a Földtől, szabad szemmel is látható volt a délkeleti horizonton. A Mars utoljára 60 ezer évvel ezelőtt volt ilyen közel a Földhöz, legközelebb pedig kb. 280 év múlva lehet majd újra így látni a Marsot.)

A Hold vagy a Nap látószöge nagyobb?

MO.

A Hold sugara *R*H = 3474 km,

távolsága a Földtől *d*HF = (363– 406)⋅103 km között változik (átlagos távolsága 384 ezer km, ≈ 60 *R*F)

→ a Hold síklátószöge *ϕ*Hold, min = 2⋅3,474/406 ≈ 0,01711 rad, *ϕ*Hold, max = 2⋅3,474/363 ≈ 0,01914 rad.

A Nap sugara *R*N = 1,4⋅106 km,

távolsága *d*NF = (147–152)⋅106 km között változik (átlagos távolsága 150 millió km)

→ a Nap síklátószöge *ϕ*Nap, min = 2⋅1,4/152 ≈ 0,01842 rad, *ϕ*Nap, max = 2⋅1,4/147 ≈ 0,01905 rad.

Lehet *ϕ*Hold > *ϕ*Nap → teljes napfogyatkozás, vagy *ϕ*Hold < *ϕ*Nap → gyűrűs napfogyatkozás.

Mekkora az a körlap, ami kinyújtott kézzel tartva pont eltakarja a Napot?

MO.

A körlap látószöge ~0,019 rad kell legyen (ld. az előző feladatot).

Ha a karunk kb. 70 cm hosszú, akkor *d* = 0,019·70 = 1,3 cm kell legyen a körlap átmérője.

Prefixumok: (a kg-nál a g-hoz kell tenni!)



Ha a számolásoknál minden mennyiséget alapegységre váltva írjunk be a képletekbe, akkor az eredményt is abban kapjuk, nem kell végig írni közben is az egységeket.

**MECHANIKA**

Felosztása: kinematika – dinamika – sztatika.

Először

**KINEMATIKA** – avagy a mozgás **leírása** (hely, sebesség, gyorsulás)

**EGYENES VONALÚ MOZGÁS**

Tutajos feladat:

Egy motorcsónak a folyón felfelé halad, és szembetalálkozik egy tutajjal. A találkozás után egy órával a motor elromlik. A javítás fél órát vesz igénybe, és utána a motorcsónak a folyón – bekapcsolt motorral – lefelé megy. Az első találkozás helyétől 7,5 km-re éri utol a tutajt. Mennyi a folyó sebessége? (Tételezzük fel, hogy a motorcsónak a folyóhoz képest állandó sebességgel halad, a tutaj pedig a folyóval együtt mozog.)

MO.

**(1)** Oldjuk meg először a parthoz rögzített koordinátarendszerben felírva a mozgást.

A koordinátarendszerünk *x* tengelyét helyezzük el a parttal párhuzamosan; origója legyen ott, ahol a motorcsónak és a tutaj először találkoznak; az *x* tengely pozitív értékei legyenek azok, amerre a víz (és a tutaj) mozognak. A motorcsónak és a tutaj helyének x koordinátáját írjuk fel a második találkozásig:

motorcsónak: –1⋅( *v*cs – *v*f ) + 0,5 ⋅ *v*f + *t* ⋅ (*v*cs + *v*f ) = 7,5 [km]

ahol *v*f [km/h] a folyó sebessége a parthoz képest,

*v*cs [km/h] a motorcsónak sebességének nagysága a vízhez képest,

*t* [h] az az ismeretlen idő, amíg a csónak a folyón lefelé halad bekapcsolt motorral.

tutaj: (1 + 0,5 + *t*) ⋅ *v*f = 7,5 [km]

A 3 ismeretlenre csak 2 egyenletünk van. Átrendezve őket

(1 + 0,5 + *t*) ⋅ *v*f + (*t* – 1) ⋅ *v*cs = 7,5 + (*t* – 1) ⋅ *v*cs = 7,5

→ *t* = 1 h, *v*f = 3 km/h, a csónak sebessége pedig tetszőleges lehet.

**(2)** Oldjuk meg most a tutajhoz rögzített koordinátarendszerben felírva a mozgást.

A koordinátarendszerünk origója legyen a tutajra rögzítve, az *X* tengely pozitív iránya mutasson arra, amerre az első órában távolodik a csónak a tutajtól. Ekkor a tutaj *X* koordinátája természetesen végig zérus, és a motorcsónak *X* koordinátáját írjuk fel a második találkozásig:

1 ⋅ *v*cs – *t* ⋅ *v*cs = 0

Ebből azonnal látható, hogy egyrészt mivel a csónak először 1 órát távolodik a tutajtól *v*cs sebességgel és utána ugyancsak *v*cs sebességgel közeledik hozzá, a közeledés ideje is 1 óra, másrészt hogy a csónak sebessége tetszőleges.

Az (1) ill. (2) megoldásban más **vonatkoztatási rendszer**t (definíciót ld. később) vettünk fel ugyanahhoz a feladathoz: a parthoz rögzítve, ill. a tutajjal együtt mozgó vonatkoztatási rendszert.

Az (1) típusú egyenletfelírásnál gondolkozni kellett az előjeleken. De ezentúl nem gondolkozni fogunk, hanem először **felvesszük az *x* tengelyt, ezzel meghatározzuk, hogy melyik a pozitív irány, és az azzal megegyező irányú sebességek pozitívak, az ellentétesek negatívak.**

Rajzoljuk meg konkrét csónaksebességekkel (pl. 4 km/h; 4,5 km/h; 5 km/h) az *x* – *t* diagramot:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 4 km/h | 4,5 km/h | 5 km/h |
| 1. óra után | – 1 km-nél | – 1,5 km-nél | – 2 km-nél |
| javítás alatt | + 1,5 km | + 1,5 km | + 1,5 km |
| javítás után | + 0,5 km-nél | 0 km-nél | – 0,5 km-nél |
| utolsó óra alatt | + 7 km | + 7,5 km | + 8 km |
| végül | + 7,5 km-nél | + 7,5 km-nél | + 7,5 km-nél |

*t* [h]

*x* [km]

Hogyan tudjuk az *x* – *t* diagram alapján (a feladatot elfelejtve) megrajzolni a *v* – *t* diagramot?

Hogyan kell sebességet számolni?

Mivel itt most szakaszonként egyenletes mozgásról van szó: *v* = *s*/*t*, de az egyes szakaszokon az utat és az időt is a kezdő- és végpontból számoljuk → *v* = Δ*x* / Δ*t*.

**A továbbiakban az ’*s*’ út helyett az ’*x*’ helykoordinátát fogjuk használni, ami a test helyét adja meg, és a helykoordináta változásából tudunk utat számolni.** (Az út nem mindig egyszerűen a különbségeként számolható, síkbeli-térbeli mozgásnál majd visszatérünk rá.)

**Δ: mindig a végpontból vonjuk ki a kezdőpontot!**

A sebességnek előjele van a koordinátatengely irányítottságának megfelelően.

Ha nem egyenletes (állandó sebességű) a mozgás, akkor Δ*x*/Δ*t* nem a pillanatnyi sebességet adja meg, hanem az adott intervallumra vonatkozó **átlagsebesség**et, tehát

*v*átl = Δ*x* / Δ*t*.

Átlagsebesség (és általánosan valamilyen időben változó mennyiség átlagos értéke): mekkora az a konstans érték, ami az adott időintervallum alatt ugyanakkora változást hoz létre, mint az időben változó mennyiség? (Grafikusan: tetszőleges alakú terület → téglalap.)

Hogyan számolható a pillanatnyi sebesség?

Mi van, ha nincsenek egyenletes szakaszaink?

Pl. ha a test helyét a *x*(*t*) = 2,1*t*2+2,8 függvény írja le, és a *t*0 = 3 s-nál keressük a sebességet?

*t*0 = 3 s-nál a test a *x*0 = 2,1*t*2+2,8 = 2,1·32+2,8 = 21,7 m pontban van.

Ki tudjuk számolni x értékét egy tetszőleges *t*vég = *t*0 + Δ*t* időpontra az *x*(*t*) függvénybe való behelyettesítéssel, abból kivonással Δ*x*-et, és ezekből az átlagsebességet:

*v*átl = Δ*x* / Δ*t* = [ *x*(3+Δ*t*) – *x*(3) ] / Δ*t*

Egyre rövidebb Δ*t* intervallumra számolunk:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *t*vég = 3+Δ*t* [s] | *x*(*t*vég) = 2,1*t*vég2+2,8 [m] | Δ*x* = *x*(*t*vég) – *x*0 [m] | Δ*t* [s] | *v*átl [m/s] |
| 4 | 36,4 | 14,7 | 1 | 14,7 |
| 3,5 | 28,525 | 6,825 | 0,5 | 13,65 |
| 3,25 | 24,98125 | 3,28125 | 0,25 | 13,125 |
| 3,125 | 23,30781 | 1,607813 | 0,125 | 12,8625 |
| 3,1 | 22,981 | 1,281 | 0,1 | 12,81 |
| 3,05 | 22,33525 | 0,63525 | 0,05 | 12,705 |

Δ*t* → 0 esetén *v*átl tart egy határértékhez, a **pillanatnyi sebesség**hez:

(Zérushoz tartó mennyiségeket osztunk egymással, de nem azt kell nézni, hogy a számláló vagy a nevező zérushoz tart, hanem a hányadost.)

RAJZ: húr → érintő

Itt most

*v*pill(3) = lim [(2,1⋅(3+Δ*t*)2+2,8) – (2,1⋅32+2,8)] / Δ*t* =

= lim 2,1⋅(32 + 2⋅3⋅Δ*t* + Δ*t*2 – 32) / Δ*t* = lim 2,1⋅(2⋅3 + Δ*t*)

Δt → 0 esetén lim 2,1⋅(2⋅3 + Δ*t*) = 2,1⋅2⋅3 = 12,6 ; tehát *v*pill(3) = 12,6 m/s.

Tetszőleges időpontra igaz, hogy

*v*pill(*t*) = lim [(2,1⋅(*t*+Δ*t*)2+2,8) – (2,1⋅*t*2+2,8)] / Δ*t* = lim 2,1⋅(2*t*⋅Δ*t* + Δ*t*2 )/Δ*t* = lim 2,1⋅(2*t* + Δ*t*)

Δt → 0 esetén lim 2,1⋅(2⋅*t* + Δ*t*) = 4,2⋅*t* ; tehát *v*pill(*t*) = 4,2⋅*t* [m/s].

Ezzel megkaptuk a *v*pill(*t*) pillanatnyi sebesség függvényt. (Ebbe belehelyettesítve pl. a *t* = 3 s-t megkapjuk *v*pill(3) értékét.)

Tehát a

*v*pill **pillanatnyi sebesség**, azaz röviden *v* sebesség egyenes vonalú mozgás esetén:

az *x*(*t*) függvény idő szerinti **derivált**ja.

Mechanikában a gyakran használatos *t* idő szerinti derivált jelölését sokszor rövidítjük a függvény fölé rakott ponttal. Röviden tehát: .

Deriválás: függvényhez függvényt rendel (pl. az *x*(*t*) helykoordinátához a *v*(*t*) sebességet); jelentése: a derivált függvény azt mutatja, hogy az eredeti függvény éppen mennyire változik. (Növekedés → derivált pozitív; csökkenés → derivált negatív; állandó → derivált zérus.)

RAJZ: az eredeti függvényhez húzott érintő meredeksége lesz a derivált függvény értéke minden pillanatban. [érintő meredeksége „tgα”, de szó sincs arról, hogy kíváncsiak lennénk α-ra!]

Deriváláskor nem kell a határértékes számítást mindig végigvinni, hanem tudjuk, hogy egyes függvényeknek mi a derivált függvénye. Fizikához most az alábbiakat fontos tudnunk:

hatvány: d (*t*n) / d*t* = n·*t*n–1

d (sin(*t*)) / d*t* = cos(*t*) és d (cos(*t*)) / d*t* = –sin(*t*) (grafikus trükk!)

d (e*t*) / d*t* = e*t*

(a független változó nem *x*-szel van jelölve, hanem *t*-vel, mivel esetünkben a legtöbb mennyiség az idő függvénye)

Fontos tudni még a deriválási szabályokat:

függvény konstansszorosa:

két függvény összege:

két függvény szorzata:

két függvény hányadosa:

összetett függvény: (láncszabály)

Pl: *y* = 3*t*3 – 2*t*2 + 5*t* – 8 = 6*t*2 – 4*t* + 5

*z* = sin2(8*t*) = [sin(8*t*)]2 = 2⋅sin(8*t*)⋅cos(8*t*)⋅8

(Vannak olyan számítógépes programok is, amikkel nem csak numerikusan lehet deriválni, hanem kiírja a függvényt is.)

**Átlagsebesség** egyenes vonalú mozgás esetén:

*v*átl = Δ*x* / Δ*t* , ahol Δ*x* = *x*vég – *x*kezdő

Pozitív, ha a végpont *x* koordinátája nagyobb a kezdőpont *x* koordinátájánál, vagyis növekvő *x* értékek irányába mozdult el a test; ill. negatív, ha csökkenő *x* értékek irányába mozdul el. Ha a mozgás végpontjaként a test visszaérkezik a kiindulópontba, akkor *v*ált = 0.

Használatos a **sebesség nagyságának átlaga**:

|*v*|átl = *s* / *t* (azaz az összes megtett út osztva az összes eltelt idővel)

Ez a köznyelvben használatos átlagsebesség. Ez mindig pozitív, mert minden elmozdulásnak a nagyságát összegezzük (mivel az út a pálya hossza).

A pillanatnyi sebesség általában nem számolható egyszerűen a pillanatnyi sebességek átlagaként!

Pl. ha *t*1 ideig *v*1 sebességgel haladva *s*1 utat, majd *t*2 ideig *v*2 sebességgel haladva *s*2 utat tett meg a test, akkor általánosan az átlagsebesség .

Speciálisan ha *t*1 = *t*2 = *t*, akkor ,

de ha *s*1 = *s*2 = *s*, akkor (harmonikus közép).

Két helyiség közötti autóbuszjáraton a kocsik átlagsebessége egyik irányban 40 km/h, a másik irányban 60 km/h. Mekkora az átlagsebesség egy teljes fordulót figyelembe véve? (DRS 1.6.)

MO.

Az út *s* km; odafelé *t*1 = *s* / *v*1 = *s*/40 óra; visszafelé *t*2 = *s* / *v*2 = *s*/60 óra alatt teszi meg.

Az összes út *s*+*s* = 2*s*; az összes idő *t*1 + *t*2 = *s*/40 + *s*/60 óra, *v*átl = 2*s* / (*s*/40 + *s*/60) = … = 48 km/h.

A és B város vízparton helyezkednek el egymástól *d* távolságra. Egy motorcsónakkal, ami a vízhez képest vcs sebességgel tud menni, elmegyünk A-ból B-be, majd vissza B-ből A-ba. Megegyezik-e az oda-vissza út ideje, ha a víz folyó, ill. tó?

MO.

Ha a víz egy folyó és A-tól B felé folyik vf sebességgel, akkor A-ból B-be *t*AB = *d* / (*v*cs + *v*f) idő alatt, B-ből A-ba *t*BA = *d* / (*v*cs – *v*f) idő alatt ér a csónak, tehát az összes idő   
*t*folyó = *d*/(*v*cs + *v*f) + *d*/(*v*cs – *v*f).

Ha a víz egy tó, akkor oda- ill. visszaút ideje is *t* = *d* / *v*cs , tehát *t*tó = 2*d* / *v*cs.

Hogyhogy? mert a folyó kevesebb *ideig* segíti a csónakot, mint akadályozza.

Egy repülőgép megtesz 1000 km/h-val 3500 km-t, majd 800 km/h-val 1200 km-t, mekkora az átlagsebessége? (940 km/h)

Vizsgáljuk most a *v*(*t*) (pillanatnyi) sebesség változását!

Δ*v* / Δ*t* = *a*átl a test **átlagos gyorsulás**a a Δ*t* időintervallumra.

A test (pillanatnyi) gyorsulását a pillanatnyi sebességhez hasonlóan vezethetjük be:

A **gyorsulás** a *v*(*t*) függvény idő szerinti deriváltja: röviden (egyenes vonalú mozgás esetén).

Mivel , a gyorsulás kifejezhető az *x*(*t*) függvény második deriváltjaként: .

Magasabb rendű deriváltak: mi az ? van olyan?!? – magyarázat a dinamikában.

Példák: infláció, árfolyam, árvíz, Csernobil/Fukushima, a népesség növekedése/csökkenése,…

Minden **egyenes vonalú mozgást**  összefoglalnak ezek a képletek:

*x*(*t*) – *v*(*t*) = – *a*(*t*) =

Figyelni az előjelekre!

Hogy van kötve egymáshoz *x*, *v* és *a* előjele?!? Példák! (fakultatív zh-k)

Visszafelé: tudjuk a sebességet, abból szeretnénk meghatározni a helyet, ill. tudjuk a gyorsulást, abból szeretnénk meghatározni a sebességet, azaz: ismerjük a deriváltat, abból szeretnénk meghatározni az eredeti függvényt.

Ha a lim -et kivesszük a

egyenletből, akkor , azaz , ill.

egyenletből, akkor , azaz ,

vagyis Δv-t ill. Δx-et tudunk számolni valamekkora intervallumra. RAJZ: látható, hogy ezzel az a(t) ill. a v(t) függvényen téglalapok területét számoljuk. De melyik a ill. v értékkel számoljunk, ha az a ill. v változik? Ez csak közelítő számolás → nézzük a határértéket, ahogy Δt→0, akkor látható, hogy a pontos érték a függvény alatti terület. Ez az **integrálás**: a mennyiség értékét határozzuk meg abból a függvényből kiindulva, ami a változását írja le.

Jelölés: , azaz A(t) az integrálja a(t)-nek, ha .

Grafikusan az integrál a függvénygörbe alatti terület (a terület előjeles: az abszcissza tengely alatti területek negatív területként értelmezendők). De hogy számoljuk ki? Integrálni nehéz! sőt, nem is mindig létezik zárt alakban felírható integrálfüggvény (ld. pl. Gauss-eloszlás).

Próbáljuk meg a *v*pill(*t*) = 4,2⋅*t* függvényből visszaszámolni, hogy hol lesz a test a *t1* = 4 s-ban, vagyis az *x*(*t*1) koordinátát. Hatványfüggvényt integrálni könnyű: . De nem innen indultunk, hová lett a +2,8 ? Integrálással csak megváltozást számolunk ki, de a függvény felírásához szükség van plusz információként arra, hogy honnan indult a test (ill. valamikor hol volt), azaz integrációs állandóra, kezdeti feltételre!!! Esetünkben az *x*(*t*) függvény helyettesítési értéke *t* = 0-ban *x*(0) = *x*0 =2,8 volt. Ha tehát a *v*(*t*) függvényből akarjuk meghatározni az *x*(*t*) függvényt, akkor *x*0 értékére is szükségünk van:

,

ezzel már lehet számolni *x*(4)-et.

Deriváláskor az érintő meredeksége egyértelmű, de a függőleges tengely mentén eltolt függvényeknek ugyanaz a deriváltja.

Nézzük meg, milyen képletek voltak középiskolában, és azok hogy jönnek ki egymásból, felhasználva, hogy , (ill. visszafelé , , ahol a konstansokat *v*0 és *x*0értéke alapján tudjuk meghatározni).

RAJZOK!!!

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *x*(*t*) | *v*(*t*) | *a*(*t*) |
| egyenes vonalú  egyenletes mozgás | *x* =*v*·*t* + *x*0 | *v* = konst. | *a* = 0 |
| egyenes vonalú  egyenletesen változó mozgás | *x* = + *v*0·*t* + *x*0 | *v* = *a*·*t* + *v*0 | *a* = konst. |
| harmonikus rezgőmozgás | *x* = *A* cos(*ωt*+*ϕ*0) | *v* = –*Aω* sin(*ωt*+*ϕ*0) | *a* = –*Aω*2 cos(*ωt*+*ϕ*0) |

**ELŐJELEK!!!**

Mikor igaz, hogy „*s* = *v*⋅*t*”? Csak akkor, ha *v* = konst., vagyis egyenletes mozgás esetén!

Minden más esetben a *v*(*t*) függvényt kell integrálni (ami grafikusan a *v* – *t* diagramon a görbe alatti terület, ami negatív is lehet). Képletet?

Egy autó 1,2 m/s2 gyorsulással indul. Mekkora sebességet ér el, és milyen messzire jut 2,5 s alatt?

MO. (DRS 1.4.)

*v*0 = 0, *v* = *at* = 3 m/s, *s* = ½ *at*2 = 3,75 m

RAJZ: *a*(*t*), *v*(*t*), *x*(*t*)

2 m/s2 gyorsulással induló gépkocsi elérve a 6 m/s sebességet, egyenletesen mozog tovább. Milyen messzire jut az indulástól számított 8 s alatt?

MO. (DRS 1.10.)

A gyorsulás *t*1 = Δ*v* / *a* = 3 s -ig tartott, utána *t*2 = 8–3 = 5 s -on keresztül ment állandó sebességgel.

*s* = *s*1 + *s*2 = ½ a· *t*12 + *v*· *t*2 = 39 m.

RAJZ: *a*(*t*), *v*(*t*), *x*(*t*)

Egy személyautóval három különböző gyorsaságpróbát végeztek. Mennyi volt az átlagos gyorsulás egy-egy kísérletben?

a) Az autó álló helyzetből indulva 19,3 s alatt érte el a 80 km/h sebességet.

b) Álló helyzetből indulva 24,5 s alatt tett meg 400 m távolságot.

c) 15 s alatt növelte sebességét 60 km/h-ról 90 km/h-ra.

MO. (DRS 1.20.)

a) *a* = Δ*v*/Δ*t* = (80/3,6)/19,3 ≈ 1,15 m/s2.

c) *a* = Δ*v*/Δ*t* = ((90-60)/3,6)/15 ≈ 0,56 m/s2.

b) *a* = 2*s*/*t*2 = 2⋅400/24,52 ≈ 1,33 m/s2.

Mennyi ideig esik le egy tárgy 10 cm magasról, és mekkora lesz a végsebessége?

MO. (DRS 1.5.)

*s* = ½*gt*2 → *t* ≈ 0,14 s → *v* = *gt* ≈ 1,4 m/s.

(DRS 1.11.) Mekkora távolságot tesz meg a nyugalmi helyzetből induló, és szabadon eső test a   
t1 = 6 s és t2 = 8 s közötti időközben?

MO. s = ½gt22 – ½gt12 = 320 – 180 = 140 m

Egy gépkocsi sebességét 54 km/h-ról 90 km/h-ra növelte állandó 1,6 m/s2 gyorsulással. Mennyi ideig tartott ez, és mekkora utat tett meg a gépkocsi ezalatt?

MO. (DRS 1.9.)

*a* = Δ*v*/Δ*t* → *t* = Δ*t* = Δ*v*/*a* = 6,25 s (54 km/h = 15 m/s, 90 km/h = 25 m/s)

*s* = *v*0*t* + ½*at*2 = (54/3,6)⋅6,25 + ½⋅1,6⋅6,252 = 125 m vagy: *s* = *v*átl⋅*t* = 20⋅6,25

RAJZ: *a*(*t*), *v*(*t*), *x*(*t*)

Egy 54 m/s sebességgel mozgó versenyautó 1,8 másodpercig fékez. Mekkora a sebessége a fékezés után, és mekkora utat tett meg a fékezés alatt, ha a fékezés közben –6 m/s2 a gyorsulása?

MO. (DRS 1.2.)

*v* = *v*0 + *at* = 43,2 m/s; *s* = … = 87,5 m

RAJZ: *a*(*t*), *v*(*t*), *x*(*t*)

**Harmonikus rezgőmozgás**: ilyenkor a gyorsulás nem állandó!

RAJZ

A kitérés

*x*(*t*) = *A* cos(*ωt*+*ϕ*0), ahol

*A*: amplitúdó, a kitérés maximális értéke [m];

*ωt*+*ϕ*0 = *ϕ*(*t*): fázis [rad], azaz dimenziómentes;

*ω*: körfrekvencia [*s*–1], *ω* = 2π·*f* = 2π/*T*

*T*: periódusidő [s]

*f*: frekvencia [Hz], *f* = 1/*T* (jelölése sokszor *f* helyett *ν*)

*ϕ*0: kezdőfázis, fázisállandó [rad]; ez a fázis értéke a *t*=0 pillanatban.

(Megjegyzés: a kitérés felírható *x*(*t*) = *A* sin(*ωt*+*ϕ*0’) alakban is, mivel a sin és cos függvények π/2 fázistolással egymásba alakíthatóak.)

Egy periódus, azaz *T* idő alatt a *ϕ* fázis 2π-vel nő: *ϕ*(*t*+*T*) – *ϕ*(*t*) = ( ∙(*t*+*T*)+*ϕ*0) – (∙*t*+*ϕ*0) = 2π.

Azonos fázis: nem csak *x* értéke egyezik meg, hanem *v* értéke is! (Adott kitérésnél közeledik-e az egyensúlyi helyzethez vagy távolodik tőle.)

A sebesség

*v*(*t*) = = –*Aω* sin(*ωt*+*ϕ*0);

a sebesség maximális értéke *v*max= *Aω*, amit a test *x* = 0 esetén vesz fel.

A gyorsulás

*a*(*t*) = = –*Aω*2 cos(*ωt*+*ϕ*0);

a gyorsulás maximális értéke *a*max = *Aω*2.

Láthatjuk, hogy *a*(*t*) = –*ω*2 *x*(*t*), a kitérés és a gyorsulás ellentétes fázisban vannak, ez jellemzi a harmonikus rezgőmozgást.

A harmonikus rezgőmozgás az egyenletes körmozgás vetülete.

Rezgőmozgást végző test maximális kitérése 0,2 m, periódusideje 0,05 s,

*t* = 0 s-ban a kitérés *x*0 = 0,1 m, és a test az egyensúlyi helyzettől távolodik.

a) Írjuk fel az *x*(*t*) függvényt!

b) Mennyi a sebesség átlaga egy periódusra?

c) Mennyi a sebesség abszolút értékének átlaga egy periódusra?

d) Mennyi a maximális sebesség?

MO.

a) *x*(*t*) = *A* cos(40π *t* + *ϕ*0) [m]

Tudjuk, hogy *A* = 0,2 m, és *ω* = 2π/*T* = 2π/0,05 = 40π s–1.

*ϕ*0 = ? Ezt a kezdőfeltételek segítségével tudjuk kiszámolni.

Az *x*(*t*) függvénybe *t* = 0 -t helyettesítve *x*0 -at kell kapjunk:

*x*(0) = 0,2 cos(*ϕ*0) = 0,1 m → *ϕ*0 = ±π/3 , de melyik?

Ehhez kell a másik kezdőfeltétel is: *v*(*t*) = –8π sin(40*ωt*+*ϕ*0) [m/s],

ennek értéke *t* = 0 esetén v(0) = –8π sin(*ϕ*0).

Mivel „az egyensúlyi helyzettől távolodik” pozitív *x*0 értéknél, ebből tudjuk, hogy *v*(0) pozitív,

tehát *v*(0) = –8π sin(*ϕ*0) > 0 → sin(*ϕ*0) < 0, *ϕ*0 = –π/3.

Behelyettesítve *x*(*t*) = 0,2 · cos(40π *t* – π/3) [m].

Mi is a kezdőfázist?!? RAJZ

b) *v*átl = Δ*x* / Δ*t* = 0, mert egy periódus alatt visszaér a kiindulási helyére, vagyis Δ*x* = 0.

c) |*v*|átl = |Δ*x*| / Δ*t* = 4*A* / *T* = 16 m/s.

d) *v*max = *A*·*ω* = 0,2·40π ≈ 25,13 m/s

**KÖRMOZGÁS felírása szögváltozóval**

Ugyanúgy kezelhető, mint az *x* tengely menti haladó mozgás, csak

*ϕ*(*t*) **szögváltozó**val adjuk meg a test helyét [–](az *x*(*t*) helyett),

aminek deriváltja az

*ω* **szögsebesség**: [s–1] (a *v* sebesség megfelelője),

és annak deriváltja a

*β* **szöggyorsulás**: *β* = [s–2] (az *a* gyorsulás megfelelője).

Egyenletes körmozgás: *β* = 0, *ω* = konst., *ϕ* = *ω*⋅*t* + *ϕ*0 .

Egyenletesen változó körmozgás: *β* = konst., *ω* = *β*⋅*t* + *ω*0, *ϕ* = ½ *β*⋅*t*2 + *ω*0⋅*t* + *ϕ*0 .

*R* sugarú körön *i* = *R*⋅*ϕ*, *v* = *R*⋅*ω*, *a*t = *R*⋅*β* (a gyorsulásra a dinamikánál visszatérünk!).

könnyebb feladatot!

Körpályán egyenletesen lassuló mozgással mozgó anyagi pont egy félkör megtétele közben elveszti sebessége felét. Hol áll meg?

MO.

*β*= = = konst. → *ω* = *ω*0 – *βt*, *ϕ* = *ω*0 *t* – ½ *β t*2

Először *t*1 idő alatt a sebessége a felére csökken: *ω*(*t*1) = *ω*0 – *βt*1 = *ω*0/2 (1)

és megtesz egy félkört, azaz *ϕ*(*t*1) = *ω*0*t*1 – ½ *β*⋅*t*12 = π (2)

majd *t*2 idő alatt a sebessége *ω*0/2-ről nullára csökken: *ω*(*t*2) = *ω*0/2 – *βt*2 = 0 (3)

és megtesz még valamennyit: azaz *ϕ*(*t*2) = (*ω*0/2)⋅*t*2 – ½ *β*⋅*t*22 = ? (4)

Vigyázat, ennél a szakasznál a kezdősebesség *ω*0/2!

(1)-ből *t*1 = *ω*0/(2*β*), (3)-ból *t*2 = *t*1, (2)-ből *β* = 3/(8π)⋅*ω*02, amivel *ϕ*(*t*2) = *ω*0/2⋅*t*2 – *β*/2⋅*t*22 = π/3, azaz még egy hatod kört tesz meg.

[Megoldható úgy is, hogy *t*2 helyett (*t*1+*t*2)-re írjuk fel az egyenletet.]

Eddig csak egy tengely menti mozgást néztünk, de ki kell lépnünk a térbe → vektorok!

**VEKTOROK, MŰVELETEK VEKTOROKKAL**

(Először általánosan definiáljuk, nem koordinátarendszerhez kötve.)

A vektorok olyan mennyiségek, melyeknek nagyságuk és irányuk is van.

Vektor jelölése: a vagy vagy **a**; az abszolút értéke .

* összeg: **a** + **b**, RAJZ
* szorzás skalárral: λ⋅**a**, λ > 0 ill. < 0 és > 1 ill. < 1 esetek

→ kivonás: **a** – **b** = **a** + (–1)·**b**

→ lineáris kombináció: λ1⋅ **a**  + λ2⋅ **b** kifejezés a λ1, λ2 összes lehetséges értékével előállítja az **a** és **b** vektorok által kifeszített síkot → a sík összes vektora felbontható **a**  és **b**  irányú komponensekre λ1 és λ2 megfelelő értékének meghatározásával

* skaláris szorzat: **a⋅b :** 2 vektorhoz egy skalárt rendel:  **a⋅b** = a⋅b⋅cosϕ
* → merőleges vektoroknál zérus

→ önmagával vett skalárszorzat → abszolút érték:

→ **ea** = **a** / egységvektor

→ vektorok által bezárt szög számítása: cosϕ = **a⋅b /** (a⋅b)

→ vetület  **a⋅b** = a⋅(b⋅cosϕ) = b⋅(a⋅cosϕ)

→ vektor felbontása másik vektorral párhuzamos és merőleges komponensekre

**a**-nak **b** irányú komponense:

nagysága a**‖** = **a⋅eb** = **a**⋅**b**/b, iránya **eb**, tehát vektorként **a‖** = (**a**⋅**b** /b2) ⋅**b**

**a**-nak **b**-re merőleges komponense: **a**⊥ = **a** – **a‖**

→ pl. munka!

* vektoriális szorzat: : 2 vektorhoz egy vektort rendel, melynek

nagysága , irányát a jobbkéz-szabállyal határozzuk meg.

→ párhuzamos vektoroknál zérus

→ síkra merőleges két irány közötti választás

→ antikommutatív, azaz

→ pl. forgatónyomaték

**KOORDINÁTARENDSZEREK**

Egységvektorok, koordinátavonalak.

2D Descartes

a pont helyét két koordinátával adjuk meg: x és y;

a hozzájuk tartozó egységvektorok: **i** és **j**;

az **i** az x növekedésének irányába mutat, a **j** az y növekedésének irányába (vagyis az egységvektorok az adott koordináta növekedésének irányába mutatnak);

**i** és **j** lineáris kombinációja feszíti ki a síkot;

a koordináták vetületek az egységvektorokra;

koordinátavonalak: x = konst. ill. y = konst. vonalak;

**a** = ax**i**  + ay**j**, **b** = bx**i** + by**j**

Műveletek:

**a**+**b** = (ax+bx)**i** + (ay+by)**j**

szorzás skalárral: λ·**a** =λ· ax**i**  + λ·ay**j**

skaláris szorzat: **a⋅b** = (ax**i** + ay**j**)⋅ (bx**i** + by**j**) = axbx**i⋅i** + axby**i⋅j** + aybx**i⋅j** + ayby**j⋅j**= axbx + ayby ,

mivel **i**⋅**i** = 1, **j**⋅**j** = 1,  **i**⋅**j**= 0

**a⋅a** = ax2 + ay2 → → **ea** = **a** /

Pl. **a** = 2**i** + **j**, **b** = 3**i** – 4**j**

**a**+**b** = 5**i** – 3**j**, **a**–**b** = –**i** + 5**j**

3·**a** = 6**i** + 3**j**

a = , b = 5, **ea** = 2/**i** + 1/**j**, **eb** = 3/5**i** – 4/5**j**

**a**⋅**b** = (2**i** + **j**) ⋅(3**i** – 4**j**) = … = 2⋅3-4 = 2,

az általuk bezárt szög cosϕ = **a**⋅**b** /(a⋅b) = 2/(⋅5) ≈ 0,179, ϕ ≈ 79,7°

**a** vetülete **b** irányára **a‖** = **a**⋅**b** /b2 ⋅**b** = 2/52(3**i** – 4**j**) = 0,24**i** – 0,32**j**,

**a**-nak **b**-re merőleges komponense: **a**⊥ = 1,76**i** + 1,32**j**

3D Descartes:

koordináták: x, y, z

egységvektorok **i**, **j**, **k**

jobbsodrású: **i** × **j** = **k**

(és **j** × **k** = **i**, **k** × **i** = **j**,ciklikus permutáció **j** × **i** = –**k**, **k** × **j** = –**i**, **i** × **k** = –**j**)

2D polár:

a pont helyét az origótól vett távolsággal és egy szöggel adjuk meg: r és ϕ a két koordináta;

de mik az egységvektorok? RAJZoljuk meg először a koordinátavonalakat:

az r = konst. koordinátavonalak körök

→ az **e**r az r növekedésének irányába mutat, sugár irányban kifelé

a ϕ = konst. koordinátavonalak origóból induló félegyenesek

→ az **e**ϕ a ϕ növekedésének irányába mutat,   
 azaz merőleges az **e**r egységvektorra pozitív forgásirányban

Az egységvektorok együtt fordulnak a mozgó ponttal!

Átszámolás:

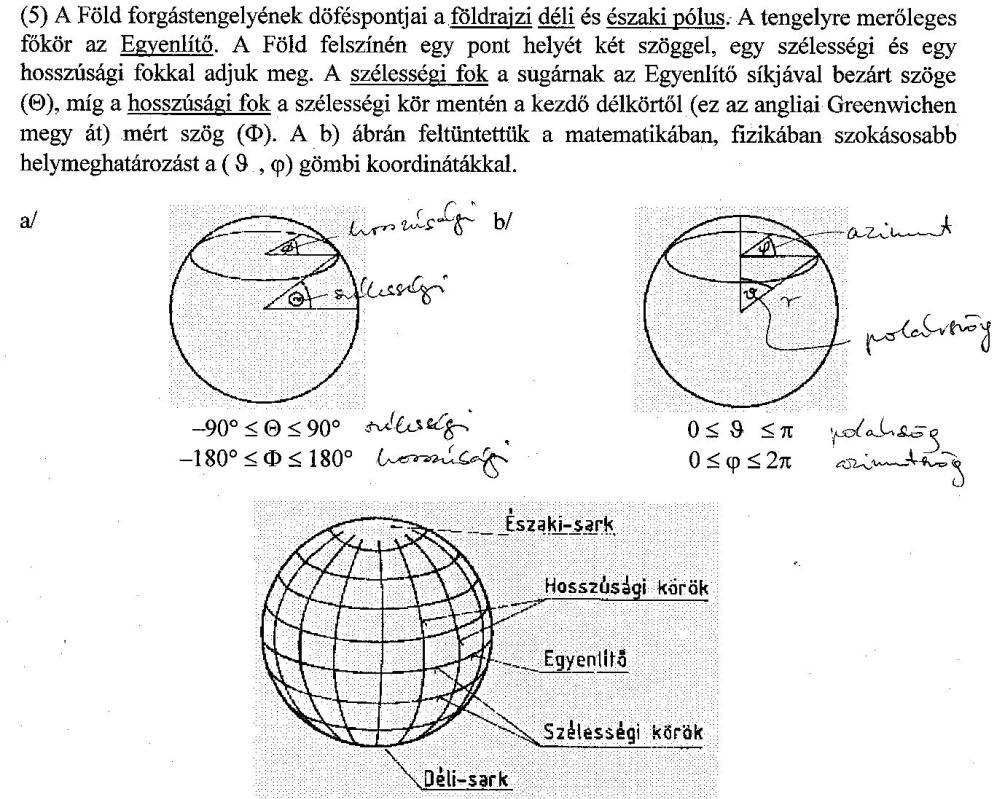
polár → 2D Descartes: x = R cosϕ y = R sinϕ

2D Descartes → polár: R = ϕ = arc tg (y/x)

Henger: 2D polár + z tengely (azaz **k** vektor)

Gömbi, 3D polár:

r, ϕ azimutszög 0 és 2π között, υ polárszög 0 és π között (z tengellyel bezárt szög).



Föld: azimut helyett a Greenwich-i délkörtől mérve –180° és +180° között hosszúsági fokok, polárszög helyett az Egyenlítőtől mérve –90° és +90° között szélességi fokok.

Pl. Egy repülőgép délben indul Budapestről, nyugati irányban megy, megtesz 8000 km-t. Mennyit mutat a repülőtéri óra az érkezéskor?

A repülőgép sebességét vegyük v = 800 km/h -nak, így a repülés ideje tr = d/v = 10 h.

Nyugati irányba repül a gép, emiatt más időzónában fog leszállni, az időeltérést a hosszúsági fokok különbsége szabja meg.

Budapest szélességi foka ~45°, itt a forgástengelyre merőleges körpálya sugara

r = RF sin 45° ≈ 4500 km, kerülete k = 2rπ ≈ 28300 km,

az időeltolódás: tf = 8000/283000 ⋅ 24 h = 6,8 h ≈ 7 h, vagyis a helyi idő ≈15 h.

**KINEMATIKA 3D-BEN (síkbeli és térbeli mozgások)**

Vonatkoztatási rendszer

KITÉRŐ: **TESTMODELLEK**

kiterjedt test

pontrendszer

folytonos test

merev test

deformálható test

tömegpont

**Tömegpont**: tömege van, de kiterjedése (és belső szerkezete) nincs. Tömegpont közelítés alkalmazható akkor, ha a test kiterjedése elhanyagolható az elmozdulásához képest; nem végez forgómozgást, csak haladó mozgást (rotáció nincs, csak transzláció); mindig érvényes a test tömegközéppontjára.

**Merev test**: bármely két pontja között a távolság állandó (azaz alaktartó, nem deformálható).

**Vonatkoztatási rendszer**: egy merev test, amihez képest a test helyét megadjuk.

Pl. szoba, úttest, autó, épület, lift, körhinta, Föld, rakéta, Nap, …

Egy vonatkoztatási rendszeren belül végtelen sokféleképpen vehetünk fel koordináta-rendszereket (pl. milyen típusú, merre mutatnak az egységvektorai, hogyan vannak skálázva…)

**Helyvektor**, ***r*** : az O vonatkoztatási pontból az adott pontba mutató vektor.

A test mozgásával a helyvektor időben változik: ***r***(*t*) (vektor-skalár függvény)

**Pálya**: a helyvektor végpontja által érintett pontok (paraméteres térgörbe).

**Út (*s*)**: a pálya hossza.

**Elmozdulásvektor**: Δ***r*** = ***r*1** – ***r*2** = ***r***(*t*2) – ***r***(*t*1) (a helyvektor megváltozása)

mindig a későbbiből vonjuk ki a korábbit!

**Átlagsebesség-vektor**: ,

iránya megegyezik a Δ***r*** elmozdulásvektor irányával,

nagysága az elmozdulás nagysága (Δ***r*** abszolút értéke) osztva az eltelt idővel.

r1

Δr

r2

r(t)

O

vátl

A **(pillanatnyi) sebesség vektor** az átlagsebesség-vektor határértéke:

.

Vektor, melynek

iránya: a pálya érintőjének iránya,

nagysága: az út idő szerinti deriváltja: , *v*pill = .

r1

Δr2

r2

r(t)

vátl

r4

Δr4

r3

Δr3

Δr5

r5

RAJZ:

A *t*1 – *t*2 intervallumhoz tartozó átlagsebesség **Δ*r*2** irányú.

Tekintsünk olyan időintervallumokat, amiknek a kezdete *t*1, de a vége közelebb van *t*1-hez, mint *t*2: ezek *t*3, *t*4, *t*5, … , az ezekhez tartozó átlagsebesség **Δ*r*3** , **Δ*r*4 , Δ*r*5** irányú, vagyis mindig a pálya két pontján (***r*1** és ***r*2**, ill. ***r*1** és ***r*3**, ill. ***r*1** és ***r*4**, ill. ***r*1** és ***r*5**, …) átmenő szelő irányába mutat.

Δ*t* → 0 esetén a végpont is a *t*1 időhöz tartozó ***r*1** , így a pillanatnyi sebesség iránya a pálya ***r*1**-beli érintőjének iránya lesz.

Az átlagsebesség nagysága *v*átl = |Δ***r***|/Δ*t*. |Δ***r***|, azaz az elmozdulásvektor nagysága legfeljebb a két pont közötti út hossza: |Δ***r***| ≤ *s*, de Δ***r*** → 0 esetén a két mennyiség megegyezik, ezért lesz a pillanatnyi sebesség nagysága az út deriváltja.

[Láncszabállyal: , ahol az érintő irányú egységvektor (, és tart 1-hez, ahogy…)]

A *d****r*** -t „elemi elmozdulásvektor”-nak nevezzük. (*Δ****r*** differencia → *d****r*** differenciál)

[Angol szóhasználat: speed ill. velocity, megkülönböztetik, hogy vektor vagy sem.]

Hasonlóan bevezethető az

**átlagos gyorsulás**: és a

**(pillanatnyi) gyorsulás**:

Tehát röviden az egész kinematika: és .

Milyen lehet a gyorsulásvektor iránya a sebességvektorhoz képest?

Bármilyen. Mi mit jelent? ***a***-t felbontjuk ***v***-vel párhuzamos és arra merőleges komponensekre. A gyorsulásnak a sebességgel párhuzamos komponense a sebesség nagyságát változtatja (növeli, ha egyirányúak, ill. csökkenti, ha ellentétes irányúak); a gyorsulás sebességre merőleges komponense pedig a sebesség irányát változtatja meg (a sebesség nagyságát nem befolyásolja). Ahhoz is kell tehát gyorsulás, hogy a test állandó nagyságú sebességgel irányt változtasson!

Írjuk fel a sebességet ilyen alakban: **v** = v **ev** (azaz **ev** a pálya érintője irányába mutat)

→ **en** normálvektor pedig a simulókör középpontja felé mutat

**a** = **ev** + v = **ev** + v **en** ,

azaz a gyorsulás két komponense:

at =  = : a sebesség nagyságának változását okozza; ha at = 0, akkor egyenletes a mozgás;

acp = v= vω = v2/r = rω2: a sebesség irányának változását okozza; ha acp = 0, akkor egyenes vonalú. Ha r → ∞, azaz egyre kevésbé kanyarodik a pálya, vagyis egyeneshez tart, akkor v2/r → 0.

[centripetal: central seeking]

Simulókör: érintő egyenes úgy keletkezik, hogy a görbe 2 pontján át szelőt húzunk és a 2 pontot közelítjük; simulókörnél a 3 görbe pontjára kört rajzolunk és a 3 pontot közelítjük.

Hogyan lehet konkrét koordinátarendszerekben számolni?

**Descartes**-féle koordinátarendszerben:

A helyvektor: ***r***(*t*) *= x*(*t*)***i*** *+ y*(*t*)***j*** *+ z*(*t*)***k***

A sebességvektort a helyvektor deriválásával kapjuk meg:

Formálisan a deriváláskor megjelennek az ***i, j, k*** vektorok deriváltjai is, de mivel az ***i, j, k*** egységvektorok konstansok, a deriváltjuk zérus.

A sebességvektor tehát

azaz koordinátánként deriválunk: .

A gyorsulásvektort a sebességvektor deriválásával kapjuk meg: ,

a gyorsulásvektor tehát

azaz , , .

A gyorsulásvektort kifejezhetjük a helyvektor második deriváltjaként is:

azaz , ,.

(A vektorok nagysága a komponenseiből Pitagorasz-tétellel számítható.)

**2D polár**koordináta-rendszerben:

A helyvektor: .

A sebességvektort a helyvektor deriválásával kapjuk meg:

, ez az alak azonban még nem az ***e*r** és ***e*ϕ** egységvektorok szerinti felbontás, az **er** deriváltját ki kell fejezni az ***e*r** és ***e*ϕ** egységvektorokkal.

Mivel az egységvektorokat mindig úgy vesszük fel, hogy kövessék a mozgó pontot, nem lesz a deriváltjuk zérus. Hanem?

RAJZ [ mivel → , ezért ]

ezt beírva a sebességvektor tehát:

Kancsal gólya: A gólya *d* távolságra van a fészkétől. Szeretne oda repülni, de *α* szöggel kancsalít, ezért a(z origóban lévő) fészke irányához képest mindig *α* szöggel eltérő irányba repül. Mi lesz vele?

Bontsuk fel a sebességvektort az ***e*r** és ***e*ϕ** egységvektorok irányába: az ***e*r** irányú komponens *v*·cos*α* (és az ***e*ϕ** irányú komponens *v*·sin*α*). RAJZ. A fenti képletből látjuk, hogy ***e*r** előtt áll (*r* az origótól való távolságot jelenti). Jelen esetben a gólya sebességének ***e*r** irányú komponense állandó: = *v*⋅cos*α* = konst. → *r* = *d* – (*v*⋅cos*α*)⋅t → *t*d = *d* / (*v*⋅cos*α*) idő alatt *r* = 0, vagyis véges idő alatt a fészekbe ér! Az ***e*ϕ** komponensből viszont azt lehet levezetni, hogy véges idő alatt véges úton végtelen sok fordulatot tesz meg. (Logaritmikus spirális – csigák keresztmetszete; hogyan tud ilyen szépet csinálni? csak egy állandó szöget kell tartani az építkezéskor.)

A gyorsulásvektort a sebességvektor deriválásával kapjuk meg:

***a*** = =

Az átalakításhoz szükségünk van a másik egységvektor deriváltjára is: **,**

ezt beírva a gyorsulásvektor tehát:

***a*** =

Mikor hasznos a polárkoordináta-rendszer?

KÖRMOZGÁS felírása 2D Descartes-koordinátarendszerben:

*x*(*t*) *= R* cos(*ωt*+*ϕ*0)

*y*(*t*) *= R* sin(*ωt*+*ϕ*0)

azaz ***r***(*t*) *= R cos*(*ωt*+*ϕ*0)***i*** *+ R* sin(*ωt*+*ϕ*0)***j***

Egyenletes körmozgás(*ω* = konst., *ϕ* =*ωt*+*ϕ*0) esetén deriválással

a sebesség

***v***(*t*) = –*Rω* sin(*ωt*+*ϕ*0)***i*** + *Rω* cos(*ωt*+*ϕ*0)***j***

aminek nagysága *Rω*,

és megmutathatjuk a ***v·r*** skalárszorzattal, hogy merőleges **r**-re;

ill. a gyorsulás

***a***(*t*) = –*Rω*2 cos(*ωt*+*ϕ*0)***i***– *Rω*2 sin(*ωt*+*ϕ*0)***j***

aminek nagysága *Rω*2,

és látható, hogy iránya ellentétes ***r*** irányával.

Ha *ω* ≠ konst., akkor a deriváltakban megjelennek az *ω*(*t*) függvény deriváltjai is, áttekinthetetlen lesz → jobb a polárkoordináta-rendszer.

**KÖRMOZGÁS felírása polárkoordináta-rendszerben**

Az egységvektorok:

az ***e*r** vektor sugár irányban kifelé mutat: radiális (azaz sugár irányú) egységvektor;

az ***e*ϕ** vektor érintő irányú (pozitív forgásirányba mutat): tangenciális (azaz érintő irányú) egységvektor.

Mivel körmozgás esetén az *r* (a távolság az origótól) állandó, ezért , a fenti általános képletek egyszerűsödnek:

→ a sebességből marad

a sebesség érintő irányú (mivel ***e*ϕ** irányú)

nagysága , ahol a szögsebesség, tehát *v* = *rω* („kerületi sebesség”);

→ a gyorsulásból marad

az ***e*ϕ** érintő irányú komponens

nagysága , ahol a szöggyorsulás, tehát ;

neve **tangenciális** gyorsulás,

ez a sebesség nagyságának változását okozza;

(ilyet láttunk az egyenes vonalú mozgásnál is, de a gyorsulásnak körmozgás esetén van egy másik komponense is)

az ***er*** sugár irányú komponens

sugár irányban befelé mutat (mivel negatív előjelű),

a neve **centripetális** gyorsulás,

nagysága , ami *v* = *rω* felhasználásával átírható alakba is;

ez a sebességvektor irányának változását okozza

(egyenletes körmozgásnál is fellép!)

Tehát polárkoordináta-rendszerben felírva a körmozgást *R* sugarú kör esetén

***r*** = *R* ***e*r**

***v*** = *Rω* ***e*ϕ**

***a*** = –*Rω2****e*r** + *Rβ* ***e*ϕ**

Egyenletes körmozgás esetén *β* = 0, *ω* = konst., *ϕ* = *ϕ*0 + *ωt*;

egyenletesen változó körmozgás esetén *β* = konst., *ω* = *ω*0 + *βt*, *ϕ* = *ϕ*0 + *ω*0*t* + ½*βt*2;

általánosan *ω*(*t*) tetszőleges lehet.

**A harmonikus rezgőmozgás mint az egyenletes körmozgás vetülete**

körmozgás rezgőmozgás

*R* sugár → *A* amplitúdó

*T* periódusidő → rezgésidő

1/*T* = *n* fordulatszám → *f* (vagy *ν*) frekvencia [Hz]

*ω* = 2π/*T* szögsebesség → körfrekvencia [s–1]

*ϕ* szög → fázis

*ϕ*0 a kiindulási szög → kezdőfázis, fázisállandó

Kinematika (azaz: hogyan mozog a test? mi az összefüggés a test helye, sebessége és gyorsulása között?) vége →

**DINAMIKA** (azaz: minek a hatására mozog a test)

PERIPATETIKUS DINAMIKA, STB, STB – VISSZAMÁSOLNI A TÖRTÉNETET!

**NEWTON AXIÓMÁK**

**I. axióma**: tehetetlenség törvénye.

Magára hagyott test (azaz amire más test nem hat, azaz: ***F*** = 0) nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez (azaz: ***v*** = konst.), ha a test mozgását olyan vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk, ami inerciarendszer.

Magára hagyott: nincs kölcsönhatásban más testtel; ha megfelelően távol van más testektől.

Mi az inerciarendszer? olyan vonatkoztatási rendszer, amiben érvényes Newton I. axiómája. Vagyis körbeért a definíció. Feloldás: az állítás az, hogy létezik inerciarendszer. Meg kell vizsgálni, hogy egy bizonyos vonatkoztatási rendszerben a magukra hagyott testek ***v*** = konst. mozgást végeznek-e. (Nem elég egyetlen testet vizsgálni, mert bármely testhez rögzíthetünk vonatkoztatási rendszert, és abban a vonatkoztatási rendszerben persze az a test nyugalomban van; de három független mozgást végző test már elég.) Ha igen, akkor ez a vonatkoztatási rendszer egy inerciarendszer, és ebben a vonatkoztatási rendszerben az összes testre igaz lesz Newton I. axiómája.

A Földet inerciarendszernek tekintjük olyan mozgások vizsgálatánál, amelyeknél a megtett távolságok elhanyagolhatóak a Föld méretéhez képest – de nagyobb távolságot átfogó mozgásoknál már nem tekinthetünk el a Föld forgásától, keringésétől, és így nem tekinthető inerciarendszernek.

Vagy: állócsillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszer alkalmas inerciarendszernek.

Ha van egy olyan vonatkoztatási rendszer, ami inerciarendszer, akkor az ahhoz képest álló, ill. állandó sebességgel mozgó (azaz egyenes vonalú egyenletes mozgást végző) vonatkoztatási rendszerek is inerciarendszerek (Galilei-féle relativitási elv) → végtelen sok inerciarendszer van.

**II. axióma**: (((a nem-magárahagyott testre vonatkozik))).

A test gyorsulása arányos a rá ható erővel, ***a*** ~ ***F***, az arányossági tényező a test tömege: ***F*** = *m****a*** .

Newton II. eredeti megfogalmazásban: „a mozgás megváltozása arányos a hatóerővel, és azon egyenes mentén történik, amely irányában az erő hat”.

Ez mai jelöléssel Δ(m**v**) = („erőlökés”).

impulzus-tétel: akkor is érvényes, ha m változik, pl. rakéta, vagy relativitáselmélet: a tömeg változik nagy sebességeknél ( m = m0 / ).

Új fizikai mennyiség az ***F*** és az *m*:

az *m* **tömeg** a **tehetetlenség mértéke** [kg],

az ***F*** **erő** a **kölcsönhatás mértéke** [N],

ezeket az alábbi mérési utasításokkal definiáljuk:

Dinamikai és sztatikai erő- és tömegmérés:

Sztatikai tömeg- ill. erőmérés: Az ismeretlen tömeg ill. erő mellett szükségünk van ismert, változtatható nagyságú tömegre ill. erőre, és egy „nulldetektor”-ra. Az ismeretlen tömeget / erőt összehasonlítjuk az ismert tömeggel / erővel, aminek nagyságát tudjuk változtatni. A nulldetektor mutatja, hogy mikor egyenlőek. Pl. tömegmérés kétkarú mérleggel; erők összehasonlítása hasonlóan (ismert erő lehet pl. rugós erőmérő).

Dinamikai mérés:

Dinamikai erőmérésnél egy testet (aminek a tömegét nem ismerjük) gyorsítunk egy ismert nagyságú *F*1 erővel → a test *a*1 gyorsulással mozog, ill. az ismeretlen *F*2 erővel → a test *a*2 gyorsulással mozog. Mivel a tömeg állandó, ezért *F*2/*a*2 = *F*1/*a*1 , amiből *F*2-t ki tudjuk számolni. (Ismert nagyságú erőt rugóval vagy tömeggel hozunk létre.) A gyorsulásokat a gyorsított test mozgásából (idő- és helymérés alapján) tudjuk kiszámolni.

Dinamikai tömegmérésnél azonos (de nem ismert) nagyságú erővel gyorsítjuk az ismert *m*1, ill. ismeretlen *m*2 tömegű testet, meghatározzuk a gyorsulásukat, és mivel *F* állandó, *m*1*a*1 = *m*2*a*2 alapján számoljuk ki az ismeretlen tömeget.

**III. axióma**: kölcsönhatás törvénye.

Jelölje ***F*AB** az A test által a B testre kifejtett erőt, és ***F*BA** a B test által az A testre kifejtett erőt; a két erő egyenlő nagyságú, megegyező hatásvonalú és ellentétes irányú, azaz ***F*BA** = –***F*AB** , azaz   
***F*AB** + ***F*BA** = **0**.

Az erő-ellenerő (akció-reakció) megnevezés azt sugallja, hogy az egyik váltja ki a másikat, időben késleltetés van közöttük, de ez nem igaz, egyszerre, egy időben lépnek fel.

**IV. axióma**: szuperpozíció törvénye (az erők összegzése).

Ha egy testre egyszerre több erő is hat, akkor a test gyorsulását az erők vektori eredője határozza meg: ***F*eredő** = Σ***F*i** , az ***F*** = *m****a*** egyenletbe az erők vektori eredőjét kell írni: Σ***F*i** = *m****a***.

Ez azt is jelenti, hogy az egyszerre fellépő erők nem befolyásolják egymást (vagyis a kölcsönhatások egymástól függetlenek).

Vigyázat: hogy is tudunk eltolni egy szekrényt? A III. axióma szerint Σ***F*** = 0 , a IV. axióma szerint   
Σ***F*** = *m****a*** , akkor ezek szerint mindig ***a*** = 0?!? Nem, a kérdés az, hogy mikor mire összegzünk: a III. axióma egy kölcsönhatásra, a IV. axióma pedig egy testre vonatkozik!

**MOZGÁSEGYENLET**

Az *m****a*** = Σ***F*i** egyenletbe

egyrészt behelyettesítjük az egyes kölcsönhatásoknak megfelelő erőtörvényeket (ld. később), amelyek általánosan ***F***(***r***,***v***,*t*) alakban írhatók fel;

másrészt tudjuk kinematikából, hogy ; ezeket behelyettesítve

: ez a test **mozgásegyenlet**e ,

(matematikailag ez egy másodrendű differenciálegyenlet)

ennek megoldásaként kapjuk az ***r***(*t*) függvényt, ami a mozgást leírja. A megoldáshoz szükség van 2 integrációs állandóra, azaz a kezdeti helyvektorra és a kezdősebességre is (vagy hely és sebesség vektorára bármely időpontban).

Determinisztikus, azaz a mozgásegyenlet és a kezdeti feltételek ismeretében a jövőbeli viselkedés meghatározható.

[De: létezik determinisztikus káosz is! ilyenkor a rendszer nagyon érzékeny a kezdeti feltételekre, a közeli állapotok kis eltérése exponenciálisan növekedhet, és mivel a valóságban kis eltérésekre mindig számítani kell, a viselkedés megjósolhatatlan lesz.

Pl. <https://www.youtube.com/watch?v=N6cwXkHxLsU> ]

**ERŐTÖRVÉNYEK**

avagy: mitől, hogyan függ az egyes kölcsönhatásokban fellépő erő? milyen alakú az ***F***(…) függvény?

Általánosan az erő függhet a test helyétől, sebességétől, és függhet az időtől is: ***F***(***r***,***v***,*t*)

Akkor van úgy-ahogy könnyű dolgunk, ha ***v***-től nem függ.

Ha nem függ helytől: HOMOGÉN

Ha nem függ időtől: STACIONÁRIUS

Ezeket az erőtörvények fogjuk tanulni:

1) Általános tömegvonzási (gravitációs) erő:

2) Földi nehézségi (gravitációs) erő:

3) Kényszererők: felület, kötél, rúd

4) Súrlódási erők (csúszási és gördülési súrlódás, tapadási súrlódás)

5) Közegellenállási erő

6) Lineáris rugalmas erő, rugóerő

Erőnek hívjuk, de nem erőtörvények:

– a centripetális „erő”: mint látni fogjuk, ez nem a Σ***F***-ben jelenik meg, hanem az *m****a*** tartalmaz   
*macp*= „*Fcp*” -t, ha a mozgás görbe vonalú (az erők eredőjének a sebességre merőleges komponense). Nem köthető egy bizonyos kölcsönhatáshoz (többféle kölcsönhatásból is származhat *acp*);

– a tehetetlenségi erők (transzlációs, centrifugális, Coriolis, Euler erő).

Nézzük sorra az erőtörvényeket, és hogy mi következik belőlük:

**1) Általános tömegvonzási (gravitációs) erő**

Bármely két test között fellép.

Nagysága: *F*grav = *γ m*1*m*2/*d*2 , ahol

*m*1 ill. *m*2 a testek tömege [kg],

*γ* univerzális állandó (*γ* = 6,67·10–11 m3s2/kg ),

*d* a két tömegpont közötti távolság [m];

iránya: vonzó a két testet összekötő egyenes mentén;

vektorként: , ahol ***r*** az egyikből a másikba mutató vektor.

Az tömegvonzási erő a távolság növekedésével csökken, de sehol nem zérus.

Alkalmazás:

Bolygómozgás: ha nézünk két bolygót (mindkettő mozog), az még megoldható („kéttest probléma”), de három bolygó (mind mozog) már nagyon nehéz! hát még több…

Hány bolygó van a Naprendszerben? 9 → 10 → 8 (Plútó…).

Kéttest probléma: ***r*1**  ill. ***r*2** helyvektorú bolygókra felírjuk az erőket és felhasználjuk, hogy a két erő összege zérus → az jön ki, hogy a tömegközéppontjuk nem gyorsul, tehát felírhatjuk a mozgásukat a tömegközéppontot tekintve origónak, így megoldható a mozgásegyenlet. Háromtest: nem megoldható!

Mivel a Naprendszer bolygóira felírt mozgásegyenleteknek nincs analitikus megoldása (és a numerikus se könnyű), ezért jönnek jól

**Kepler törvényei**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. A bolygók ellipszis alakú pályán mozognak, a pálya egyik fókuszpontjában a Nap van. | Nap  bolygó  nagytengely  kistengely  x  x  fókuszpontok |
| vezérsugár  A1  A2  Nap | 1. A Naptól a bolygókhoz húzott vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol (azaz a területi sebesség állandó)   [ez azt jelenti, hogy Napközelben nagyobb a bolygó sebessége]. |
| 1. *T*2 / *a*3 = konst. minden bolygóra,   ahol *T* a bolygó keringési ideje,  *a* a pálya nagytengelyének fele. |  |

Pálya excentricitása: (a középpont és gyújtópont távolsága) / (nagytengely fele)

0: kör; 0–1: ellipszis; 1: parabola; 1– : hiperbola

pl. Föld: nagytengely fele 149597887,5 km, kistengely fele 149576999,8 km, excentricitás 0,0167

A bolygók pályájának excentricitása kicsi, az ellipszisek jó közelítéssel körnek tekinthetők, a pálya nagytengelyének fele (*a*) helyett használható az *R* pályasugár.

A III. Kepler törvény képletének értelmezésére a körmozgásnál visszatérünk.

A Neptunusz keringési ideje ≈165 (földi) év. Milyen távolságban kering a Neptunusz a Nap körül?

(A Nap felszínéről a Földre 8,3 perc alatt ér a fény; a Nap-Föld távolság 150 millió km.)

MO.

A III. Kepler-törvényt alkalmazva

, azaz , amiből ≈ 30,

és behelyettesítve a Nap-Föld távolságot *a*Neptun = 30 *a*Föld = 30·150·106 km = 4500·106 km (30 CSE).

Pontos adat: 4495·106 km.

**2) Földi nehézségi (gravitációs) erő**

A Föld által bármely testre kifejtett vonzóerő.

Nagysága: *F*g = *mg*, ahol  
*g* a gravitációs gyorsulás, aminek értéke kis mértékben függ attól, hogy a Föld mely pontján van a test (ld. később), Magyarországon *g* ≈ 9,81 m/s2;

iránya: függőlegesen lefelé;

vektorként: ***g***-t vektorként értelmezve ***F*g** = *m****g*** ,

vagy függőlegesen felfelé mutató *z*-tengellyel felírva ***F*g** = –*mg* ***k*** .

a továbbiakban az m**g**-t kicserélni Fg-re?

A földi nehézségi erő az általános tömegvonzási erőből származik, ahol a két egymást vonzó test közül az egyik a Föld. Az általános képlet tömegpontokra vonatkozik, de a Föld nagy kiterjedésű a felszínén levő testhez képest – hogyan használható a képlet? úgy, hogy (térfogati integrálból következik az, hogy) a Föld teljes tömege a Föld középpontjába képzelendő, a távolság pedig a Föld sugara. [Ha a Föld „belsejében” van egy test, akkor csak az a része számít a Földnek, ami „beljebb” van, mert a vonzóerő szempontjából a külső gömbhéj eredője zérus. Ha átfúrnánk a Földet és beleejtenénk egy követ, az harmonikus rezgőmozgásba kezdene.]

Tehát a Föld felszínén , és ezt használjuk röviden *F*g = *mg* alakban

→ a gravitációs gyorsulás értéke a Föld felszínén *g*0 = .

A *γ* = 6,67430⋅10–11 m3s2/kg, *M*Föld = 5,972⋅1024 kg, *R*Föld = 6371 km értékek behelyettesítésével kapjuk meg *g*0 értékét, ld. lejjebb.

*g* értéke függ a földrajzi szélességtől

egyrészt, mert a Föld nem gömb alakú

a sugara az Egyenlítőnél nagyobb (*R*Föld,E = 6378,2 km, a saroknál *R*Föld,s = 6356,8 km)

mivel *g* ~ 1/(*R*Föld)2 → *g* értéke kisebb az Egyenlítőnél;

másrészt, mert a Föld forog

a centrifugális erő (ld. később a neminercia-rendszereknél!) a tengelyre merőlegesen kifelé mutat, nagysága a forgástengelytől mért távolsággal arányos

RAJZ

*acp* = 0 a sarkokon, *acp* maximális az Egyenlítőnél → *g* értéke kisebb az Egyenlítőnél.

Számoljunk:

a Föld szögsebessége *ω* = 2π / *T*= 2π / 86164 = 7,292·10–5 s–1,

*a*cf  = *rω*2 , ahol *r* az Egyenlítő síkjával párhuzamos körpálya sugara;

az Egyenlítőn *a*cf,E = *R*Föld,E ∙ *ω*2 = 0,033916 m/s2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *R*Föld  (km) | *g*számolt,1 (m/s2) | *a*cf (m/s2) | *g*számolt,2 (m/s2) | *g*mért (m/s2) |
| Egyenlítő | 6378,2 | 9,798 | 0,034 | 9,764 | 9,780 |
| sarok | 6356,8 | 9,864 | 0 | 9,864 | 9,832 |

A centrifugális gyorsulás miatt a *g* iránya nem pontosan a Föld középpontja felé mutat! (Ez az irány jelöli ki a függőleges irányt az adott helyen, de a függőleges nem mindig a Föld középpontja felé mutat.)

(A Föld a centrifugális erő miatt nem gömb alakú – ld. később a neminercia-rendszereknél.)

*g* értéke függ a tengerszint feletti magasságtól:

a tengerszinten ,

*h* magasságban , amiből *g*h = ,

azaz ,

a Föld középpontjától távolodva *g* értéke csökken (a Mount Everesten ez kb. 0,3 %-os csökkenés).

Eddig homogénnek tételeztük fel a Földet, de *g* értéke függ még a helyi kőzettömegektől is.

Kérdés: A Föld és egy ember közötti kölcsönhatásban melyikre hat nagyobb ható tömegvonzási erő?

Alkalmazás:

**Hajítás**

A test szabadon mozog, a testre ható egyetlen erő a nehézségi erő, ami adott testre egy konstans erő, mert hajítás esetén eltekinthetünk *g* helyfüggésétől.

Tetszőleges **konstans erő** esetén: ***F*** = konst.

→ a test gyorsulása ***a*** = ***F***/*m* = = konst.

→ a test sebessége, ha *t* = 0-ban ***v*** = ***v*0**: ***v*** = ***v*0** + ***a***⋅*t*

→ a test helyvektora, ha *t* = 0-ban ***r*** = ***r*0:** ***r*** = ***r*0** + ***v*0**⋅*t* + ½***a*⋅***t*2

Hajítás esetén ***F*** = *m****g***, tehát

→ a test gyorsulása ***a*** = ***g*** = konst.; = ***g***

→ a test sebessége, ha *t* = 0-ban ***v*** = ***v*0**: ***v*** = ***v*0** + ***g***⋅*t*

→ a test helyvektora, ha *t* = 0-ban ***r*** = ***r*0:** ***r*** = ***r*0** + ***v*0**⋅*t* + ½***g*⋅***t*2

: ez koordinátarendszertől független megoldás.

3D Descartes koordináta-rendszerben: igazítsuk úgy a koordinátarendszert, hogy nekünk a lehető legkényelmesebb legyen, azaz

1) ***g***-nek csak egy komponense legyen: a *z*-tengely a ***g***-vel ellentétes irányba, „felfelé” mutasson  
→ ***g*** = –*g* ***k***;

2) ***v*0**-nak a vízszintes síkban csak egy komponense legyen, az *x*-tengelyt forgassuk a ***v*0** vízszintes vetületének irányába (azaz legyen *v*0y = 0)  
→ ***v*0** =*v*0 cos*α* ***i*** + *v*0 sin*α* ***k***,azaz *v*0x = *v*0 cos*α* ; *v*0z = *v*0 sin*α* .

Így a sebességvektor

***v***(*t*) = *v*0x ***i*** + (*v*0z – *gt*) ***k*** ,

a helyvektor

***r***(*t*) = (*x*0 + *v*0x *t* ***i*** + *y*0 ***j*** + (*z*0 + *v*0z *t* – ½ *gt*2) ***k*** .

3) Ha lehet, az origót toljuk az **r0** = x0 **i** + y0 **j** + z0 **k** pontba, így

**r**(t) = v0x t **i** + (v0z t – ½ gt2) **k** .

Kiírva külön csak a koordinátafüggvényeket:

*a*x = 0 *a*y = 0 *a*z = –*g*

*v*x = *v*0x *v*y = 0 *v*z(*t*) = *v*0z – *gt*

*x*(*t*) = *v*0x *t* (+ *x*0) *y* = 0 (*y*0) *z*(*t*) = *v*0z *t* – ½ *gt*2 (+*z*0)

illetve a kezdősebesség nagyságát és a vízszintes síkkal bezárt *α* szögét felhasználva:

*a*x = 0 *a*y = 0 *a*z = –*g*

*v*x = *v*0 cos*α* *v*y = 0 *v*z(*t*) = *v*0 sin*α* – *gt*

*x*(*t*) = *v*0 *t* cos*α* (+ *x*0) *y* = 0 (*y*0) *z*(*t*) = *v*0 *t* sin*α* – ½ *gt*2 (+*z*0)

RAJZOK:   
koordinátarendszertől függetlenül, a pálya egyes pontjainak sebessége és a *g* viszonya;

*v*x, *v*z(*t*), *x*(*t*), *z*(*t*)

Mit jelent, ha negatív *v*z , *x*, *z*…?

A felfelé és lefelé mozgás szakaszát nem kell kettévágni! (előjelek)

A hajítás pályája:

A fenti függvények minden mennyiséget az idő függvényében írnak le. A pálya megadásához az összetartozó *z*(*x*) értékeket kell kifejeznünk, ehhez az időt kiküszöböljük a kifejezésekből (a pálya alakjánál nem lényeges, hogy mikor van az adott ponton a test).

Fejezzük ki *x*(*t*)-ből *t*-t: *t* = *x*/(*v*0cos*α*), és írjuk át *z*(*t*)-be:

z(*x*) = *v*0 ⋅ *x*/(*v*0cos*α*) ⋅ sin*α* – ½ *g⋅*[*x*/(*v*0cos*α*)]2 = tg*α*⋅ *x* – ½ [*g*/(*v*02cos2*α*)]⋅ *x*2 : ez egy parabola RAJZ

Hajítás magassága:

azaz: a kiindulási pont magasságához képest mennyivel magasabban van a pálya legfelső pontja?

Ez a *z*(*t*) = *v*0 *t* sin*α* – ½ *gt*2  értéke akkor, amikor a legmagasabban van,   
azaz amikor *v*z(*t*) = *v*0 sin*α* – *gt* (a függőleges sebesség) zérus.

Tehát *v*0 sin*α* – *gt*e = 0 → *t*e = *v*0 sin*α* /*g* → *h* = … = *v*02 sin2*α* / (2*g*) .

Hajítás távolsága:

azaz: milyen távol van a kiindulási ponttól, amikor visszaérkezik a kiindulási pont magasságára?

Ez az *x*(*t*) = *v*0 *t* cos*α* értéke akkor, amikor a földre (sík terepen, azaz az elhajítás magasságára) érkezik, azaz amikor *z*(*t*) = *v*0 *t* sin*α* – ½ *gt*2 értéke zérus.

Tehát *v*0 *t*d sin*α* – ½ *gt*d2 = 0 → *t*d = 2 *v*0 sin*α* / *g* , vagyis *t*d = 2*t*e , (persze, mert a felfelé és a lefelé rész szimmetrikus) → *d* = *v*02 sin(2*α*) / *g* .

Kifejezhetjük a pályából is: *x*⋅ (tg*α* – *g*/(2*v*02cos2*α*)⋅*x*) = 0 → *x*1 = *x*0 = 0 és *x*2 = *d* = …

Nem sík terepen a kiindulási és a földre érkezési pont közötti távolság nem ezzel a képlettel számolható, hanem az *x*(*t*), *z*(*t*) függvényekkel!

Maximális távolság: 45°, ha síkon vagyunk; különben levezethető, hogy ctg2α = 1 + 2gh / v02.

Mekkora kezdősebességgel dobtunk fel egy testet függőlegesen, ha a feldobás után 2 s-mal a sebessége 4 m/s

a) felfelé,

b) lefelé?

Mennyi az emelkedés ideje, milyen maximális magasságot ér el?

MO.

vz(t) = vz0 – gt → vz0 = vz(t) + gt = vz(2) + 10⋅2

a) vz(2) = +4 m/s → vz0 = 24 m/s

b) vz(2) = –4 m/s → vz0 = 16 m/s

emelkedés ideje: vz(te) = 0 → te = vz0/g a) te = 2,4 s b) te = 1,6 s

maximális magasság: h = vz02 / (2g) a) h = 28,8 m b) h = 12,8 m

Ferde hajítás, v0 = 6,0 m/s, α = 30°. Számoljunk ki mindenfélét:

vz0 = v0 sinα = 3 m/s, vx = v0 cosα = 5,196 m/s

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| t (s) | x (m) | z (m) | vx (m/s) | vz (m/s) | v (m/s) |  |
| 0,1 | 0,520 | 0,25 | 5,196 | 2,000 | 5,568 |  |
| 0,2 | 1,039 | 0,40 | 5,196 | 1,000 | 5,292 |  |
| 0,3 | 1,559 | 0,45 | 5,196 | 0,000 | 5,196 | h |
| 0,4 | 2,078 | 0,40 | 5,196 | -1,000 | 5,292 |  |
| 0,5 | 2,598 | 0,25 | 5,196 | -2,000 | 5,568 |  |
| 0,6 | 3,118 | 0,00 | 5,196 | -3,000 | 6,000 | d |
| 0,7 | 3,637 | -0,35 | 5,196 | -4,000 | 6,557 |  |
| 0,8 | 4,157 | -0,80 | 5,196 | -5,000 | 7,211 |  |
| 0,9 | 4,677 | -1,35 | 5,196 | -6,000 | 7,937 |  |
| 1,0 | 5,196 | -2,00 | 5,196 | -7,000 | 8,718 |  |
| 1,1 | 5,716 | -2,75 | 5,196 | -8,000 | 9,539 |  |
| 1,2 | 6,235 | -3,60 | 5,196 | -9,000 | 10,392 |  |
| 1,3 | 6,755 | -4,55 | 5,196 | -10,000 | 11,269 |  |

legmagasabban: vz = 0: te = v0 sinα / g = 0,30 s; h = z(te) = … = 0,45 m

azonos magasságban: th = 2te = 0,60 s; d = x(td) = … = 3,12 m

az indulás magasságánál 2 m-rel lejjebb: z(t1) = 3t1 – 5t12 = –2 → t1 = 1,0 s (–0,4 s hamis gyök)

x(t1) = 5,196t1 = 5,196 m; a távolság = … = 5,568 m;

a sebessége ekkor vz = 3 – 10t1 = –7 m/s; a nagysága v = … = 8,718 m/s.

Milyen szög alatt kell vízszintes terepen elhajítani egy testet, hogy a hajítási magasság megegyezzen a hajítási távolsággal?

MO.

h = d: v02 sin2 α / (2g) = v02 sin 2α/g ⇒ 2 sin 2α = sin2 α ⇒ tg α = 4 ⇒ α ≈ 76°

Földi → általános gravitációs erő:

Mi történik, ha a Föld felszínéről egyre nagyobb kezdősebességgel „dobunk” fel valamit?

Amíg *mg*-vel számolhatunk (azaz nem kell figyelembe vennünk, hogy a távolság növekedése miatt a gravitációs erő csökken): a pálya parabola.

Ha magasabbra „dobjuk” / lőjük, akkor már nem számolhatunk konstans *g*-vel, hanem az általános tömegvonzási erővel kell számolni.

Lesz egy speciális sebesség, amikor pont „körbeesi” a Földet: *v*1 ≈ 7,9 km/s (ennek levezetését ld. később a körmozgás dinamikájánál); ez az első kozmikus sebesség, amivel Föld körüli körpályára lehet állítani valamit.

Ha *v* < *v*1 ill. *v* > *v*1, akkor ellipszis alakú a pálya, csak az a különbség, hogy *v* < *v*1 esetén a Föld középpontja az ellipszispálya eldobástól távolabbi fókuszpontjában van, *v* > *v*1 esetén pedig a közelebbiben. RAJZ

Második kozmikus (azaz szökési) sebesség: *v*2 ≈ 11,2 km/s (ennek levezetését ld. később az energia-megmaradásnál); ez az a legkisebb sebesség, amely esetén már nem jön vissza a Földre, hanem parabolapályán távolodik a Földtől. Ha ennél is nagyobb a kezdősebesség, hiperbola pályán távolodik a Földtől.

**3) Kényszererők: felület, kötél, rúd**

A testek mozgását felület, kötél, rúd korlátozza, ezt a geometriai kényszert a test és a felület, kötél, rúd között ható erővel írjuk le.

Csak az irányukat tudjuk (a geometriai kényszer miatt), a nagyságukat nem, az mindig az adott problémából adódik!

A testre a felület által kifejtett ***F*ny** nyomóerő:

iránya: a felületre merőleges (ha görbült a felület, akkor a pontbeli érintősíkra merőleges); csak nyomni tud;

nagysága akkora, hogy a test a felületen maradjon.

Példák, rajzok: vízszintes sík, lejtő, körpálya; külső erő hatása (van-e általános képlet?)

A testre a kötél által kifejtett ***F*kötél** kötélerő:

iránya: csak húzni tudja a testet, kötélirányban;

nagysága: a test a kötél hosszánál távolabbra nem kerülhet a kötél rögzítési pontjától.

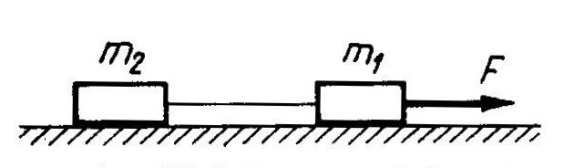
Példák, rajzok: függőleges helyzet; inga szélső pontja, alsó pontja, általános helyzete.

A testre rúd által kifejtett ***F*rúd** rúderő:

iránya: húzni és nyomni is tudja a testet, rúdirányban;

nagysága abból adódik, hogy a rúd hossza nem változhat.

Vízszintes irányú, *F* = 10 N nagyságú erővel hatunk az *m*1 = 2 kg tömegű testre, amely egy fonállal az *m*2 = 3 kg tömegű testhez van kötve az ábrán látható elrendezésben. Mekkora erő feszíti a fonalat, ha a fonál tömegétől és a súrlódástól eltekintünk?



MO. (DRS 3.2.)

A testek mozgásegyenlete vektori alakban:

m1**a**1 = **F** + m1**g** + **Fny,1** + **Fkötél,jobb** ; m2**a2** = m2**g** + **Fny,2** + **Fkötél,bal**

**Fkötél,jobb** = **Fkötél,bal** , mert a kötél tömege elhanyagolható;

**a1** = **a2** , mert a kötél nyújthatatlan;

ezeket felhasználva:

m1**a** = **F** + m1**g** + **Fny,1** + **Fkötél** ; m2**a** = m2**g** + **Fny,2** + **Fkötél**

A függőleges erők eredője zérus, mert a testek a felületen mozognak:

m1**g** + **Fny,1** = 0 → Fny,1 = m1g ; m2**g** + **Fny,2** = 0 → Fny,2 = m2g

A vízszintes komponensek:

m1a = F – Fkötél ; m2a = Fkötél

amiből a = F / (m1+m2) = 2,0 m/s2; Fk = 6,0 N.

Megjegyzés:

m1-et F – Fkötél gyorsítja, a1 = (F – Fkötél)/m1 , m2-t pedig Fkötél gyorsítja: a2 = Fkötél/m2 ,   
ezek hatására lesz a1 = a2.

A számértékekkel: a1 = (F – Fkötél)/m1 = (10–6)/2 = 2 m/s2; a2 = Fkötél/m2 = 6/3 = 2 m/s2.

**4) Súrlódási erők**

**Csúszási** súrlódási erő

Szilárd felület és a hozzá képest mozgásban levő test között lép fel (a felületek között ható kémiai erők és a felületek érdessége miatt).

Nagysága: *F*s = *μ* *F*ny , ahol

*F*ny a testre ható nyomóerő,

*μ* a csúszási súrlódási együttható;

iránya: a sebességgel ellentétes irányú;

vektorként: ***F*s** = –*μ F*ny ⋅ ***v***/*v* .

(Figyelem: ***F*s** = – *μ* ***F*ny** nem jó felírás, mert ***F*s** és ***F*ny** merőlegesek egymásra!)

**Tapadási** súrlódás

Szilárd felület és a hozzá képest nyugalomban levő test között lép fel, ha valamilyen külső erő el akarja mozdítani őket egymáshoz képest.

Nagysága: akkora, amekkora ahhoz szükséges, hogy a test nyugalomban maradjon, de nem lehet nagyobb, mint *F*t,max = *μ*t *F*ny , ahol

*F*ny a testre ható nyomóerő,  
*μ*t a tapadási súrlódási együttható;

(ha ennél nagyobb erőre lenne szükség, akkor a test elkezd mozogni a felülethez képest);

iránya: a felülettel párhuzamos; azzal ellentétes irányú, amerre a külső (eredő) erő el akarja mozdítani a testet.

Gördülési ellenállás: *F*gördülési = *μ*gördülési *F*ny

Azonos felületek között *μ*gördülési < *μ*csúszási < *μ*tapadási .

Pl. ABS, induláskor kipörgő kerék, szög kihúzása.

Egy látványos bizonyíték arra, hogy a súrlódási erő nagysága attól függ, hogy mennyire vannak összenyomódva a felületek: <https://www.videoman.gr/106419>

Fenti feladat kiegészítve μ = 0,1 súrlódással:

m1**a** = **F** + m1**g** + **Fny,1** + **Fkötél** + **Fs,1**; m2**a** = m2**g** + **Fny,2** + **Fkötél** + **Fs,2**

A vízszintes komponensek:

m1a = F – Fk – Fs,1; m2a = Fk – Fs,2

Fs,1 = μ Fny,1 = μ m1g; Fs,2 = μ Fny,2 = μ m2g

azaz

m1a = F – Fkötél – μ m1g; m2a = Fkötél – μ m2g

Ebből a = (F – μ m1g – μ m2g) / (m1+m2) = F / (m1+m2) – μg

μm1g = 2,0 N; μm2g = 3,0 N; a = 1,0 m/s2; Fkötél = 6,0 N.

Vegyük észre, hogy most a1 = (F – Fkötél – Fs,1)/m1 , a2 = (Fkötél – Fs,2)/m2 .

Mekkora súrlódási erő lép fel, ha egy m = 100 kg tömegű testet szeretnénk eltolni

a) Fa = 150 N nagyságú, b) Fb = 250 N nagyságú erővel?

A tapadási súrlódási együttható μt = 0,2; a csúszási súrlódási együttható μ = 0,1.

Megoldás: Ft,max = μt·mg = 0,2·100·10 = 200 N

a) esetben Fa < Ft,max → Ft = Fa = 150 N nagyságú tapadási súrlódási erő lép fel.

b) esetben Fb > Ft,max → a test elkezd csúszni, Fs = μ·mg = 0,1·100·10 = 100 N nagyságú csúszási súrlódási erő lép fel.

RAJZ: Fsúrlódási az Fkülső függvényében

Az eddigi erőtörvények alkalmazása:

**Lejtő** (a vízszintessel *α* szöget bezáró sík felület)

Csúszás a lejtőn:

Ha nincs egyéb külső erő, a mozgásegyenlet vektori alakban: *m****a*** = *m****g*** + ***F*ny** + ***F*s**

Lejtővel párhuzamos és arra merőleges komponensekre bontjuk:

* lejtőre merőlegesen: *ma*⊥ = *F*ny – *mg*⋅cos*α*  
  mivel a test a felületen mozog, ezért *a*⊥ = 0 kell legyen, innen tudjuk *F*ny nagyságát:   
  ha nincs egyéb erő, akkor *F*ny = *mg*⋅cos*α*,   
  de ha van még a lejtővel nem párhuzamos erő (pl. valaki tolja-húzza), akkor annak a lejtőre merőleges komponensét is figyelembe kell venni;
* lejtővel párhuzamosan: *ma* = ± *mg*⋅sin*α* – *μF*ny

a sebesség irányát szokás pozitív iránynak venni, vagyis a pozitív irány választható felfelé vagy lefelé is, ezért a mindig lefelé mutató *mg*⋅sin*α* előjele lehet pozitív (ha lefelé mozog a test) ill. negatív is (ha felfelé mozog a test); de a súrlódási erő előjele mindig negatív, mert az a sebességgel mindig ellentétes irányú!

Tehát ha nincs egyéb erő, akkor *ma* = ± *mg*⋅sin*α* – *μ*⋅*mg*⋅cos*α* ,  
vagyis a testnek a lejtőn állandó nagyságú gyorsulása lesz:

lefelé *a*le = (sin*α* – *μ*·cos*α*)⋅*g*, felfelé *a*fel = –(sin*α* + *μ*·cos*α*)⋅*g*.

Az állandó nagyságú *a*le vagy *afel* gyorsulást felhasználva *v* = *v*0 + at, ill. *s* = *v*0t + ½at2.

Ha lefelé csúszik a test, és a lejtő hajlásszögére teljesül, hogy *μ* = tg*α*, akkor *a* = 0, azaz a sebesség nagysága állandó lesz.

Tapadás a lejtőn:

Ha nincs egyéb külső erő, a mozgásegyenlet vektori alakban: *m****a*** = *m****g*** + ***F*ny** + ***F*t**

* lejtőre merőlegesen: *ma*⊥ = *F*ny – *mg*⋅cos*α* = 0 → *F*ny = *mg*⋅cos*α* ;
* lejtővel párhuzamosan: *ma* = *mg*⋅sin*α* – *F*t .

A test nyugalomban van, azaz *a* = 0, ha *F*t = *mg*⋅sin*α* .

Tudjuk azonban, hogy *F*t maximális értéke *F*t,max = *μ*t⋅*F*ny. Addig tudja a tapadási súrlódási erő mozdulatlanul tartani a testet, amíg *F*t,max ≥ *mg*⋅sin*α*, vagyis *μ*t⋅*mg*⋅cos*α* ≥ *mg*⋅sin*α* , vagyis

tg*α*  ≤ *μ*t.

Ennél meredekebb lejtőn a test csúszni kezd.

Ha nem lenne közegellenállás:

<https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs>

**5) Közegellenállási erő**

Fluidum (folyadék, gáz) és a hozzá képest mozgásban levő test között lép fel.

Iránya: a sebességgel ellentétes irányú;

nagysága: valahogy függ a sebesség nagyságától; kísérletek alapján   
kis sebességeknél (lamináris áramlás esetén) jó közelítés a lineáris: *F*k = –*c*1 *v*

nagyobb sebességeknél négyzetes közelítés a jó: *F*k = –*c*2 *v*2 (turbulens áramlás esetében)

vektorként: ***F*k** = –*c*1 ***v*** ill. ***F*k** = –*c*2 *v****v***.

Hol a határ? ez függ a közeg viszkozitásától, sűrűségétől is (Reynolds szám).

(Autónál pl. már négyzetessel kell számolni.)

Reynolds szám Re = ρlv/η ρ: sűrűség, l: karakterisztikus hossz, v: sebesség, η: viszkozitás;

szemléletesen: Re = Fgyorsító / Fsúrlódási = Ekin / Wsúrl

Re < 1 esetén Stokes törvény (a fluidum belső súrlódása miatt lép fel):

Fe = –6πηr v η: a közeg viszkozitása .

A.) Ha súrlódásmentes vízszintes síkon mozog a test:

A.1) Lineáris: m⋅ = –cvx .

A megoldás:

vx = vx0·e–(c/m)t , x = (m/c)·vx0·(1 – e–(c/m)t) ; ezekből v = v0 – (c/m)·x → xmax = v0⋅m/c.

A test végtelen ideig mozog, de nem jut el bárhová, a megtett út véges.

A.2) Négyzetes: m⋅ = –c’vx2 .

A megoldás:

vx = vx0 / (1 + (c’vx0/m)·t ) , x = (m/c’)·ln(1 + (c’vx0/m)·t); ezekből vx = vx0·e–(c’/m)x .

A test végtelen ideig mozog, és végtelen utat tesz meg. (Persze ahogy csökken a sebessége, áttérünk a négyzetesről a lineáris közelítésre.)

B.) Függőleges mozgás esetén:

Függőlegesen lefelé zuhanó testre ható erők: *m****a*** = *m****g*** + ***F*k** , azaz

lefelé *mg* nagyságú,

felfelé a sebességétől függő (*F*k = *c*1 *v*, ill. *F*k = *c*2 *v*2) nagyságú erő hat.

Ha *mg* > *F*k, akkor a két erő eredője lefelé hat → a test sebessége nő → *F*k is nő, mindaddig, amíg be nem áll az a sebesség, amire teljesül az, hogy *mg* = *F*k.

Ha *mg* < *F*k, akkor a két erő eredője felfelé hat → a test sebessége csökken → *F*k is csökken, mindaddig, amíg be nem áll az a sebesség, amire teljesül az, hogy *mg* = *F*k.

Azt a sebességet, amivel teljesül *mg* = *F*k , **stacionárius** sebességnek nevezzük.

A stacionárius sebesség arányos a *mg* -vel (azaz a ható erővel) és fordítottan arányos a közegellenállási együtthatóval. Ez olyan, mint amit az arisztotelészi világképben megfogalmaztak: azaz hogy a test sebességének fenntartásához erő szükséges, és a kialakuló sebesség arányos a ható erővel és fordítottan arányos az „ellenállással”. Azaz a megfigyeléseink (el nem hanyagolható közegellenállás esetén) tényleg azt mutatják, hogy az erő a (stacionárius!) sebességgel arányos.

B.1) Lineáris: m⋅= –cvz –mg.

A megoldás:

vz = (mg/c + vz0)· e–(c/m)t – mg/c , z = (m/c)·(mg/c + v0)·(1 – e–(c/m)t ) – (mg/c)·t

Ha felfelé mutat a kezdősebesség, gyorsabban veszíti el, mint közegellenállás nélkül.

Lefelé zuhanva kellő hosszú úton beáll a stacionárius sebesség: vz,stac = – mg/c .

B.2) Négyzetes: ekkor felfelé ill. lefelé máshogy kell felírni a mozgásegyenletet:

felfelé m⋅ = –c’vz2 – mg,

lefelé m⋅ = –c’vz2 + mg.

Az egyenlet megoldható, a v(t), z(t) függvények felírhatók, de nagyon csúnyák.

A stacionárius sebesség kifejezhető a második egyenletből: vz,stac = .

Pl. néhány stacionárius sebesség, és hogy mekkora úton áll be:

puskagolyó: 145 m/s (522 km/h), 2500 m

ejtőernyős szabadon: 60 m/s (216 km/h), 430 m

ejtőernyős ernyővel: 5 m/s (18 km/h), 3 m (pl. Felix Baumgartner, Redbull Stratos)

esőcsepp (3 mm átmérőjű): 7 m/s (25 km/h), 6 m

C.) Ferde hajítás közegellenállással:

C.1) Lineáris: m**a** = –mg**k** + **Fk** = –mg**k** – c (vx **i** + vz **k**) → m⋅ = – c vx , m⋅= – mg – c vz

A két differenciálegyenlet egymástól függetlenül megoldható (ld. A.1 ill. B1.), a megfelelő fenti megoldások eredője lesz a mozgás.

C.2) Négyzetes: a ra és a -ra felírt differenciálegyenletek csatoltak lesznek:

m**a** = –mg**k** + **Fk** = –mg**k** – c’ (vx **i** + vz **k**)

→ m⋅= – c’ ⋅vx , m⋅= – mg – c’ ⋅*vz*

Ez a két egyenlet nem oldható meg egymástól függetlenül, csak numerikus megoldás állítható elő!

(Dinamikai felhajtóerő)

**6) Lineáris rugalmas erő, rugóerő** (mit jelent a rugalmas és a lineáris?!?)

Rugalmas test alakváltozása esetén a rugalmas test végéhez rögzített testre kifejtett erő.

Nagysága: *F*r = *k*⋅Δ*ℓ*, ahol

*k* a rugóállandó [N/m] = [kg/s2],

Δ*ℓ*= *ℓ*–*ℓ*0 a rugó megnyúlása (*ℓ* a rugó aktuális hossza, *ℓ*0 a nyugalmi hossza);

iránya: mindig a rugó nyugalmi hosszának megfelelő irányba mutat.

Hooke-törvény.

RAJZ

Vegyük fel az *x* tengelyt úgy, hogy *x*=0 az *ℓ*0 nyugalmi hossznál legyen, és *x* pozitív iránya mutasson a megnyújtott állapot irányába, vagyis *x*>0, ha megnyújtottuk, *x*<0, ha összenyomtuk.

*F* iránya mindig ellentétes *x*-ével: vektorként: ***F*r** = –*kx****i*** , skalárként *F*r = –*kx*.

Alkalmazás:

**Rezgőmozgás**

Rugó vízszintes, súrlódásmentes felületen: *m****a*** = ***F*r** + *m****g*** + ***F*ny**

A függőleges erők eredője zérus, Fny = mg.

Vízszintes síkban a rugóerő hat a testre; az *x* koordinátára, azaz a rugó megnyúlására felírható egyenlet:

*m* = –*kx* *k*: rugóállandó [N/m] = [kg/s2]

Ez a test mozgásegyenlete – milyen *x*(*t*) függvény ennek a differenciálegyenletnek a megoldása? Matekból nem tudunk hozzá eleget, hogy megoldjuk, viszont tudjuk, hogy a rugó végéhez rögzített test harmonikus rezgőmozgást fog végezni:

*x*(*t*) = *A* cos(*ωt*+*ϕ*0)

Kérdés, hogy a létrejövő rezgőmozgás *A* amplitúdója, *ω* körfrekvenciája és *ϕ*0 fázisállandója mitől és hogyan függ.

Kinematikánál láttuk, hogy

*v*(*t*) = = –*Aω* sin(*ωt*+*ϕ*0)

*a*(*t*) = = –*Aω*2 cos(*ωt*+*ϕ*0) , azaz:  = – *ω*2 *x* .

A mozgásegyenletünk pont ilyen alakú, ha *m*-mel osztunk: = –(*k*/*m*) *x* ,

vagyis látható, hogy a mozgásegyenlet megoldása tényleg *x*(*t*) = *A* cos(*ωt*+*ϕ*0) alakú lesz,

és a rezgés körfrekvenciáját, periódusidejét a két egyenlet összevetéséből határozhatjuk meg.

*ω*2 = *k*/*m* → *ω* = → *T* = 2π/*ω* = 2π .

És mitől függ *A* és *ϕ*0? az *x*0 kezdeti kitéréstől és a *v*0 kezdeti sebességtől:

*x*(0) = *x*0 = *A* cos*ϕ*0

*v*(0) = *v*0 = –*Aω* sin*ϕ*0

Elosztva őket

tg*ϕ*0 = – *v*0 / (*ωx*0) ,

és a sin2*x* + cos2*x* = 1 azonosságot használva

.

Ha a mozgást úgy indítjuk el, hogy egy adott *x*0 kitérésnél kezdősebesség nélkül elengedjük, azaz *v*0 = 0 esetén *A* = *x*0 és *ϕ*0 = 0 (ezért előnyös a cos(…) alakú felírás).

Hogyan lehet kísérletileg létrehozni különböző amplitúdójú és kezdőfázisú rezgéseket?!?

|  |  |
| --- | --- |
| Vízszintes, súrlódásmentes asztalon a rugó végéhez rögzített *m* = 100 g tömegű golyó 10 cm-rel való kihúzásához 1 N erőre van szükség.  a) A golyót elengedve mekkora lesz a rezgésidő?  b) Mekkora a golyó sebessége a nyugalmi helyzeten való áthaladáskor?  c) Az elengedés után 2 s múlva hol lesz a golyó? | l0  0  x |

MO.

a) k = F/x = 1 / 0,1 = 10 N/m = 10 kg/s2 .

.

b) vmax = Aω : A = 0,1 m , , vmax = 1 m/s .

c) x = A cos(ωt+ϕ0) = 0,1 cos (10t)

(ϕ0 = 0, mert kezdősebesség nélkül indul a test a maximális kitérésről)

x(2) = 0,1 cos (10·2) ≈ 0,0408 m = 4,08 cm .

Rugó függőlegesen: *m****a*** = ***F*r** + *m****g***

RAJZ

Vegyük fel az *x* tengelyt függőlegesen lefelé, *x*=0 legyen most is a rugó nyugalmi hosszánál (*ℓ*0):

*m* = –*kx* + *mg*

Az *mg* tag miatt most nem teljesül, hogy  = –konst. ⋅ *x* , ahogy azt egy *x*(*t*) = *A* cos(*ωt*+*ϕ*0) alakú megoldásnál láttuk. Mi lesz ennek a mozgásegyenletnek a megoldása? Be fogjuk látni, hogy ez is harmonikus rezgőmozgás lesz. Kérdés, hogy miben tér el a vízszintes helyzetű rugóval létrejövő rezgőmozgástól? pl. a rezgésidő ugyanannyi lesz-e, mint vízszintes helyzetben?

A mozgásegyenletből látjuk, hogy lesz egy egyensúlyi megnyúlás, ahol *a* = = 0 :

–*k x*es + *mg* = 0 → *x*es = *mg* / *k* .

Vezessünk be egy új változót, az egyensúlyi megnyúlástól való eltérést: *y* = *x* – *x*es = *x* – *mg*/*k*.

Ennek deriváltjai megegyeznek *x* deriváltjaival, mivel csak egy konstans köztük a különbség: és = .

Fejezzük ki az új változóval az eredeti változót:

*x* = *y* + *mg*/*k*,

és helyettesítsük be ezt az alakot a mozgásegyenletbe, majd alakítsuk át:

m = *m* = –*kx* + *mg* = –*k*(*y* + *mg*/*k*) + *mg* = –*ky* – *k⋅mg*/*k* + *mg* = –*ky* .

Látjuk, hogy

*m* = –*ky* ,

tehát az egyensúlyi megnyúlástól (de nem a nyugalmi hossztól!) mért eltérésre ugyanolyan egyenletet kaptunk, mint vízszintes helyzetű rugó esetén, vagyis ugyanolyan periódusidejű lesz a rezgőmozgás, csak nem a rugó nyugalmi hossza, hanem a (ráakasztott tömegtől függő) új egyensúlyi megnyúlás körül:

*y*(*t*) = *A* cos(*ωt*+*ϕ*0), ill. *x*(*t*) = *A* cos(*ωt*+*ϕ*0) + *x*es = *A* cos(*ωt*+*ϕ*0) + *mg* /*k* .

Az *A* amplitúdó és a *ϕ*0 fázisállandó meghatározásánál a kiinduló koordináta alapján az *y*0 kezdeti kitérést kell meghatározni, amit az egyensúlyi helyzettől kell mérni.

Függőleges helyzetben tehát a rezgőmozgás az egyensúlyi megnyúlásra lesz szimmetrikus, az lesz a rezgés egyensúlyi helyzete. Az egyensúlyi helyzetben a test gyorsulása zérus, mivel a rugóerő és a nehézségi erő eredője zérus, *F*r = *mg*. Az egyensúlyi helyzet alatt, azaz az egyensúlyinál nagyobb megnyúlások esetén *F*r > *mg* → az eredő erő felfelé mutat. Az egyensúlyi helyzet fölött az eredő erő lefelé mutat. Ez többféleképpen jöhet létre: Ha a rugó meg van nyúlva, akkor *F*r felfelé mutat (*mg*-vel ellentétes irányba), de *F*r < *mg*. Lehetséges az is, hogy a rezgés amplitúdója olyan nagy, hogy a rugó hossza éppen megegyezik a nyugalmi hosszával: ilyenkor *F*r = 0, és az eredő erő abban a pontban *mg*-vel egyenlő. Ha a rezgés amplitúdója olyan nagy, hogy a rezgés közben a rugó összenyomódik, akkor ott a rugóerő lefelé mutat, *mg*-vel egy irányba. A két erő vektori eredője az alsó és felső szélső helyzetben egyenlő nagyságú (a szimmetria miatt).

Vízszintes és függőleges helyzetű rugóval létrejövő harmonikus rezgőmozgás összehasonlítása:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | vízszintes helyzetű rugóval | függőleges helyzetű rugóval |
| mozgásegyenlet | | *m* = –*kx* | *m* = –*kx* + *mg* ill. *m* = –*ky* |
| egyensúlyi helyzet | helye | az *ℓ*0 nyugalmi hossznál  *x* = 0 | az egyensúlyi megnyúlásnál  *x*es = *mg* / *k* ill. *y* = 0 |
|  | rugóerő | Fr = 0 | Fr = k⋅xes = mg |
|  | eredő erő | ΣF = Fr = 0 | ΣF = Fr – mg = 0 |
|  | gyorsulás | 0 | 0 |
|  | sebesség | max | max |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Van egy *ℓ*0 = 32,0 cm hosszú, *k* = 6,40 N/m rugóállandójú rugónk. Ezt a rugót függőlegesen fellógatjuk, és a végére akasztunk egy m tömegű testet, majd meghúzzuk lefelé, hogy a hossza 60,0 cm legyen, elengedjük, és megmérjük 10 rezgés idejét: *t*10 = 8,60 s.

a)Mekkora a rugó végére akasztott test tömege?

b) Mekkora a rezgés amplitúdója?

c) Rajzoljuk meg a testre ható erőket a rezgőmozgás alsó és felső pontjában!

MO.

a) A rezgésidőből → = 0,120 kg

b) Függőleges helyzetben a rezgőmozgás egyensúlyi helyzete nem a rugó nyugalmi hossza lesz, mert az m tömegű testet ráakasztva a rugó a nyugalmi hosszához képest megnyúlik annyit, hogy a testre ható erők eredője zérus legyen: *k*·*x*es = *mg* → *x*es = *mg*/*k* = 0,120·10,0/6,40 = 0,1875 m.

A rugó az egyensúlyi helyzetben *ℓ*es = *ℓ*0 + *x*es = 0,320 + 0,1875 = 0,5075 m hosszú.

Az amplitúdó ennek és az elengedéskori hossznak a különbsége:

*A* = 0,600 – 0,5075 = 0,0925 m = 9,25 cm.

A rezgéskor tehát a rugó hossza *ℓ*max = *ℓ*es + *A* = 0,5075 + 0,0925 = 0,600 m és

*ℓ*min = *ℓ*es – *A* = 0,5075 – 0,0925 = 0,415 m között változik.

c) A testre ható erők:

a nehézségi erő *mg* = 0,120·10 = 1,20 N lefelé, és   
a rugóerő (*F*r = *k*·Δ*ℓ* ) a rugó nyugalmi hosszának megfelelő pont felé.   
Az alsó helyzetben a rugó megnyúlása *ℓ*max – *ℓ*0 = 0,600 – 0,320 = 0,280 m,   
a rugóerő *F*r,alsó = 6,40·0,280 = 1,792 N felfelé, az eredő 1,792–1,20 = 0,592 N felfelé;

a felső helyzetben a rugó megnyúlása *ℓ*min – *ℓ*0 = 0,415 – 0,320 = 0,095 m,   
a rugóerő *F*r,felső = 640·0,095 = 0,608 N felfelé, az eredő 1,20–0,608 = 0,592 N lefelé.

RAJZ!!

Csillapított rezgőmozgás (vízszintesen): *m****a*** = ***F*r** + ***F*c** + *m****g*** + ***F*ny**

A csillapítás a pillanatnyi sebesség nagyságával arányosan fékez:

*m* = – *kx* – *c v* = – *kx* – *c* , *c*: [kg/s]

= – (*k*/*m*) *x* – (*c*/*m*) *v*

Szokás bevezetni, hogy *k*/*m* = *ω*02 ahol *f*0 = *ω*0/(2π) a csillapítatlan, gerjesztetlen rendszer frekvenciája, azaz az ún. sajátfrekvencia,

és *c*/*m* = 2*β* , *β*: csillapítási tényező (itt nem szöggyorsulást jelöl!) [1/s]

Kis csillapítás esetén (ahol *β* < *ω*0) a megoldás

*x*(*t*) = ( *A*0·e–*βt* ) cos(*ωt*+*ϕ*0) , azaz

az amplitúdó exponenciálisan csökken ( *A*1/*A*2 = *A*2/*A*3 = … )

és a körfrekvencia kissé változik, méghozzá , a periódusidő nő.

Ez már szigorúan véve nem periodikus, de a zérushelyek periodikusan követik egymást.

Nagy csillapítás esetén (ahol *β* > *ω*0) a megoldás egy perióduson belül zérushoz tart (RAJZ!).

Aperiodikus határeset (ahol *β* = *ω*0): ekkor tart a leggyorsabban zérushoz (így kell tervezni a mérlegeket, hogy minél kevesebb idő alatt beálljanak).

Gerjesztett rezgőmozgás (vízszintesen): *m****a*** = ***F*r** + ***F*c** + ***F*g** + *m****g*** + ***F*ny**

Milyen erővel lehet megakadályozni a csillapodást? periodikussal: *F*g = *F*g0 cos(*ω*g*t*)

*m* = – *kx* – *c v* + *F*g0 cos(*ω*g*t*)

Ha *β* nagy → az amplitúdó monoton csökken.

Ha *β* kicsi: egy átmeneti, tranziens szakasz után periodikus lesz, méghozzá *ω*g körfrekvenciával (de a rezgő rendszer Δ*ϕ* fáziskéséssel követi a gerjesztő rendszert):

*x*(*t*) = *A* cos(*ω*g*t*–Δ*ϕ*).

A rezgés amplitúdója attól függ, mennyire tér el az *ω*g gerjesztő körfrekvencia és a rendszer *ω*0 saját körfrekvenciája. Ha *ω*g = *ω*0, akkor az amplitúdó maximális, ilyenkor azt mondjuk, hogy **rezonancia** lép fel.

RAJZ: rezonanciagörbe!!! *A* – *ω*g diagram

A maximális amplitúdó nagysága függ a csillapítástól is (ha nincs csillapítás, végtelen nagy lenne).

<https://www.youtube.com/watch?v=iyw4AcZuj5k>

TACOMA híd: <https://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs>

**Rugók toldása**

Sorosan: az erő megegyezik az összes rugón (egymást húzzák), a megnyúlásuk összeadódik:

Δ*ℓ* = Δ*ℓ*1 + Δ*ℓ*2 , azaz→

*k*s kisebb lesz, vagyis a rugó gyengébb lesz

Párhuzamosan: a megnyúlás megegyezik az összes rugón, és az erők összeadódnak:

*F* = *F*1 + *F*2 , azaz *k*p Δ*ℓ* = *k*1 Δ*ℓ* + *k*2 Δ*ℓ* → *k*p = *k*1 + *k*2

*k*p nagyobb lesz, vagyis a rugó erősebb lesz.

**Körmozgás kinematikája – ismétlés, összefoglalás:**

**2D polár**koordináta-rendszerben a helyvektor  alakú, ami azt jelenti, hogy felvesszük az origóból a test felé mutató ***r*** helyvektort, és azt elosztva a hosszával megkapjuk az ***er*** egységvektort

→ az ***er*** vektor sugár irányban kifelé mutat: radiális (azaz sugár irányú) egységvektor.

A másik egységvektort, ***eϕ***-t úgy kapjuk meg, hogy az ***er*** vektort pozitív irányban elforgatjuk 90°-kal → az ***eϕ*** vektor érintő irányú (pozitív forgásirányba mutat): tangenciális (azaz érintő irányú) egységvektor.

Körmozgás esetén a helyvektor hossza állandó (ez a kör sugara), de mivel a helyvektor követi a test mozgását, ezért az iránya, és így az egységvektorok iránya is időben változik.

A sebesség

iránya:tisztán ***eϕ*** irányú, tehát érintő irányú

nagysága: , ahol a szögsebesség;

a v = rω neve kerületi sebesség

A gyorsulás

az ***eϕ*** érintő irányú komponens

neve tangenciális gyorsulás,

nagysága , ahol a szöggyorsulás;

;

ez a sebesség nagyságának változását okozza

(ilyet láttunk az egyenes vonalú mozgásnál is);

az ***er*** sugár irányú komponens

(mivel negatív előjelű) sugár irányban befelé mutat,

a neve centripetális gyorsulás,

nagysága , ami v = rω felhasználásával átírható alakba is,

a sebességvektor irányának változását okozza

(egyenletes körmozgásnál is fellép!);

vagyis , ahol , .

**Körmozgás dinamikája**

azaz: milyen erők hatására végezhet a test körmozgást?

A testre ható erőket a körpálya síkjában sugár- és érintő irányú komponensekre bontjuk:

, és emellett lehetnek a körpálya síkjára merőleges komponensek is.

Mindig kell legyen sugár irányban befelé mutató erő (különben a test sebességének iránya nem változna a körpálya érintőjét követve, hanem érintő irányban elhagyná a körpályát!), ennek nagysága:

Ha van érintő irányú komponens, akkor változik a test sebességének a nagysága is:

Megjegyzés: mit jelent a „centripetális erő”? Nincs ilyen erőtörvény, ez nem egy bizonyos kölcsönhatáshoz köthető erő! Nem a Σ***F***-ben jelenik meg, hanem az *m****a*** tartalmaz *ma*cp = „*F*cp” -t, ha a mozgás görbe vonalú. Ez az *a*cp többféle kölcsönhatásból is származhat.

**Körmozgás vízszintes síkban**

**1.A)** Vízszintes kötél végéhez rögzített test vízszintes felületen: *m****a*** = *m****g*** + ***F*ny** + ***F*k**

a körpálya síkjára merőleges (azaz függőleges) komponensek: *ma*z = –*mg* + *F*ny = 0 → *F*ny = *mg*

a sugár irányú komponens: *mac*p = *F*k → a kötélerő nagysága *F*k = *mv*2/*r* a test sebességétől függ.

**1.B)** Ha van súrlódás is: *m****a*** = *m****g*** + ***F*ny** + ***F*k** + ***F*s**

a körpálya síkjára merőleges (azaz függőleges) komponensek: –*mg* + *F*ny = 0 → *F*ny = *mg*

a sugár irányú komponens: *ma*cp = *F*k → *F*k = *mv*2/*r*;

az érintő irányú komponens: *ma*t = –*F*s = –*μF*ny = –*μmg* → *a*t = –*μg* → *v* = *v*0 –*μg·t*,

a test sebessége csökken, így a kötélerő nagysága is csökken.

Asztalon *m* = 0,5 kg-os golyót *ℓ* = 0,5 m-es fonálon *v*0 = 5 m/s kezdősebességgel meglökünk úgy, hogy a kezdősebesség merőleges a fonálra. A test és az asztal közötti csúszási súrlódási együttható *μ* = 0,2.

Mekkora lesz a golyó sebessége és a fonálerő a) 2 s múlva; b) 4 s múlva?

MO.

a körpálya síkjára merőleges komponensek: –*mg* + *F*ny = 0 → *F*ny = *mg*

a sugár irányú komponens: *ma*cp = *F*k → *F*k = *mv*2/*r*;

az érintő irányú komponens: *ma*t = –*F*s = –*μF*ny = –*μmg* → *a*t = –*μg* → *v* = *v*0 –*μg·t*; behelyettesítve

a) *v*(2) = 5 – 0,2·10·2 = 1 m/s ; a fonálerő *F*k(2) = 0,5·12/0,5 = 1 N;

b) *v*(4) = 5 – 0,2·10·4 = –3 m/s jönne ki, de ennek nincs értelme! A *v*(*t*) = *v*0 – *μg·t* függvény csak   
*v*=0 -ig érvényes, onnantól a csúszási súrlódási erő már nem hat a testre.

**2.)** Kanyarodó járműveknél a talaj és a kerék között ható tapadási súrlódási erő tartja köríven a járművet: *m****a*** = *m****g*** + ***F*ny** + ***F*t**

a körpálya síkjára merőleges (függőleges) komponensek: –*mg* + *F*ny = 0 → *F*ny = *mg*

a sugár irányú komponens: *ma*cp = *F*t (a tapadási súrlódási erő a kör közepe felé mutat).

Ebből kiszámítható az adott körívhez tartozó maximális sebesség, amivel még nem csúszik meg:

a fenti egyenletből *F*t = *mv*2/*r* , és tudjuk, hogy *F*t ≤ *μ*t *F*ny ,

ezekből *mv*2/*r* ≤ *μ*t *F*ny = *μ*t *mg* → *v*2 ≤ *μ*t *rg* .

Pl. kereszteződésben az ideális ív *r* = 25 m sugarú; *m* = 1000 kg tömegű autó kanyarodik.

Súrlódási együtthatók: gumi aszfalton:

csúszási szárazon *μ* = 0,5–0,8; nedvesen *μ* = 0,25–0,75; a tapadási ennél valamivel nagyobb.

Számoláshoz legyen szárazon *μ*t = 0,9; nedvesen *μ*t = 0,8.

Megcsúszik?

*F*t,max = *μ*t *mg* (*g* = 9,81 m/s2), szárazon *F*t, max, száraz = 8829 N, nedvesen *F*t, max, nedves = 6867 N.

*v* = 50 km/h: *ma*cp = *mv*2/*r* = 7716 N < *F*t, max, száraz = 8829 N, nem csúszik meg.

Ha gyorsabban megy: *v* = 55 km/h: *ma*cp = 9336 N > *F*t, max, száraz = 8829 N, megcsúszik!

Ha nedves az aszfalt: *v* = 50 km/h: *ma*cp = 7716 N > *F*t, max, nedves = 6867 N, megcsúszik!

Ha levágja a kanyart, *r*’ = 22 m: *ma*cp = *mv*2/*r*’ = 9645 N > *F*t, max, száraz = 8829 N, megcsúszik!

**3.)** Ferde, a körpálya közepe felé megdöntött sík felület, súrlódás nélkül: *m****a*** = *m****g*** + ***F*ny**

A felület a vízszintessel α szöget zár be, az ***F*ny** nyomóerő erre merőleges. RAJZ!

Lejtőn lecsúszó test esetén a két erő eredője a lejtő síkjába mutat (abba az irányba gyorsul a test). Most viszont a test nem „csúszik” lejjebb. A két erő eredője most vízszintes kell legyen, ez az eredő adja a test centripetális gyorsulását. A komponensek

a körpálya síkjára merőlegesen (függőlegesen): –*mg* + *F*ny·cos*α* = 0 → *F*ny = *mg*/cos*α*

a sugár irányú komponens: *ma*cp = *F*ny·sin*α*.

Ezekből Fny kiküszöbölésével *ma*cp = *mg*·tg*α* (ez kiolvasható a vektorháromszögből is).

Kiszámítható az a sebesség, amivel adott szögben megdöntött felület esetén nem csúszik meg a jármű: *mv*2/*r* = *mg*·tg*α* → *v*2 = *r*·*g*·tg*α* (Pontosan ekkora sebességgel kell menni, ha nincs tapadási súrlódás!)

Pl. a fenti kanyart (*r* = 25 m, *v* = 50 km/h) mennyivel kellene megdönteni, ha nincs súrlódás:

tg*α* = *v*2 / (*r∙g*) = 0,7865, *α* = 38,2º ! (de persze van tapadási súrlódás)

**4.)** Kúpinga: kötélre felfüggesztett test alátámasztás nélkül: *m****a*** = *m****g*** + ***F*k**

A kötél a függőlegessel állandó α szöget zár be. RAJZ!

A két erő eredője vízszintes kell legyen, ez az eredő adja a test centripetális gyorsulását. A komponensek

a körpálya síkjára merőlegesen (függőlegesen): –*mg* + *F*k·cos*α* = 0 → *F*k = *mg*/cos*α*

a sugár irányú komponens: *ma*cp = *F*k·sin*α*.

Ezekből *F*k kiküszöbölésével *ma*cp = *mg*·tg*α* (ez kiolvasható a vektorháromszögből is).

*a*cp = *rω*2 behelyettesítésével kiszámítható a körmozgás periódusideje:

A körpálya sugara most *r* = *ℓ*·sin*α*. *ω* = 2π/*T*.

→ *mg*·tg*α* = *mg*·(sin*α*/cos*α*) = *ma*cp = *mrω*2 = *m*·(*ℓ*·sin*α*)·(2π/*T*)2 → *g*/cos*α* = *ℓ*·(2π/*T*)2

→ .

Ha a kötél helyzete tart a vízszinteshez, azaz *α* → 90°, akkor *T* → 0 ! Ez azt jelenti, hogy a test sebessége végtelenhez tart ( ); ezzel együtt a kötélerő (*F*k = *mg*/cos*α*) is végtelenhez tart (RAJZ).

**Körmozgás függőleges síkban**

A nehézségi erőt felbontjuk a körpálya egyes pontjain sugár- és érintő irányú komponensekre,

az érintő irányú komponens miatt változik a test sebességének nagysága;

a sugár irányú komponens és a kényszererő eredője (nem nulla!) adja a test centripetális gyorsulását, aminek nagysága a test pillanatnyi sebességétől függ (és a kör közepe felé mutat).

**1.)** Félgömbről lecsúszó test (súrlódás nélkül): *m****a*** = *m****g*** + ***F*ny**

*α* a függőleges helyzettől számított szög, induláskor *α* = 0.

Az érintő irányú komponens: *ma*t = *mg*·sin*α*

→ *Rβ* = *R* = *g*·sin*α* (a megoldása *α*(*t*) lenne, de nem tudjuk megoldani)

A sugár irányú komponens: *ma*cp = *mg*·cos*α* – *F*ny

→ *F*ny = *mg*·cos*α* – *ma*cp = *mg*·cos*α* – *mv*2/*R*

ahogy *α* nő, egyrészt cos*α* csökken, másrészt *v* is nő → *F*ny csökken.   
Ott, ahol *F*ny = 0, a test érintő irányban elhagyja a félgömb felületét.

A *v*(*α*) összefüggést megkaphatjuk az energia-megmaradás (ld. később) felírásával:

a golyó *R* magasságban zérus sebességgel indul, és *R*cos*α* magasságban *v* sebessége van:

*mg R* = *mg* *R*cos*α* + ½ *mv*2 → *v*2 = 2*g* *R* (1–cos*α*)

ezt behelyettesítve a nyomóerő képletébe

*F*ny = *mg* cos*α* − *m* · 2*g* (1−cos*α*) = *mg* (3 cos*α* − 2).

A golyó akkor hagyja el a gömböt, amikor *F*ny = 0, azaz cos*α*0 = 2/3 → *α*0 ≈ 48,2°.

**1.b)** Félgömbről lecsúszó test súrlódással: *m****a*** = *m****g*** + ***F*ny** + ***F*s**

az érintő irányú komponens: *ma*t = *m R*  = *mg*·sin*α* – *μ F*ny

a sugár irányú komponens: *ma*cp = *m R ω*2 = *mg*·cos*α* – *F*ny

Ezt az egyenletrendszert nem lehet megoldani!

**2.)** Függőleges körpálya kötéllel, rúddal, ill. teljes kört alkotó felülettel.

RAJZok az erőkről a pálya egyes pontjain!

*mg*-t felbontani érintő- és sugár irányú komponensekre.

→ az érintő irányú komponens adja az *a*t gyorsulást → *v* nagysága változik;

→ a sugár irányú komponens és a kötél- ill. rúderő eredője adja *a*cp-t.

*a*cp tartalmazza az adott ponthoz tartozó *v*-t, amit megkaphatnánk az érintő irányú egyenlet megoldásával, de súrlódásmentes esetben egyszerűbb energia-megmaradást alkalmazni.

A felső ponton van egy minimális sebesség! Belátható, hogy .

|  |  |
| --- | --- |
| Pl. **DRS 6.7.** 1000 kg tömegű gépkocsi dombvidéken halad, egyenletes, 72 km/h sebességgel.  Az A és a B pontokban az út 100 m, illetve 50 m sugarú körív, a C pontban vízszintes. |  |

**a)** Határozzuk meg e három pontban az út által a gépkocsira kifejtett nyomóerő irányát és nagyságát!

**b)** Mennyi lehet a gépkocsi maximális sebessége az A pontban?

Megoldás:

**a)** A pont: *ma*cp = *mv*2/*R* = *mg* – *F*ny → *F*ny = 6 kN

B pont: *ma*cp = *mv*2/*R* = *F*ny – *mg* → *F*ny = 18 kN

C pont: *ma*cp = 0 = *mg* – *F*ny → *F*ny = 10 kN

**b)** *F*ny = 0, *mv*max2/*R* = *mg* → *v*max = 31,6 m/s = 113,8 km/h

|  |  |
| --- | --- |
| Pl. Ferde lejtő csatlakozik érintő irányban függőleges körpályához.  **a)** A lejtőn legalább milyen *h* magasságból kell a testet elengedni, ha azt akarjuk, hogy végigmenjen a körpályán (a legfelső pontnál se váljon el)? A súrlódás elhanyagolható.  **b)** Mekkora nyomóerő hat a testre a körpálya legalsó pontján? |  |

**a)** A körpálya legfelső pontján a pálya által a testre kifejtett nyomóerő függőlegesen lefelé mutat, így

*ma*cp = *mg* + *F*ny → *F*ny = *ma*cp – *mg* = *mv*fent2/*R* – *mg*.

A nyomóerő nem lehet negatív: *F*ny ≥ 0: *mv*fent2/*R* – *mg* ≥ 0 → *v*fent2 ≥ *gR* .

A felső pontban a sebesség energia-megmaradásból (ld. később) kifejezve:

*mg·h* = *mg*·2*R* + ½ *m v*fent2 → *v*fent2 = 2*g*·(*h*–2*R*) ,

ezt beírva a *v*fent2 ≥ *gR* feltételbe 2*g*(*h*–2*R*) ≥ *gR* → ***h* ≥ 5/2 *R*** .

**b)** A körpálya legalsó pontján a pálya által a testre kifejtett nyomóerő függőlegesen felfelé mutat, így

*ma*cp = *F*ny – *mg* → *F*ny = *ma*cp + *mg* = *m v*lent2 / *R* + *mg*.

A sebesség energia-megmaradásból kifejezve:

*mg·h* = ½ *m v*lent2 → *v*lent2 = 2*gh* ≥ 5*gR* ,

és ezt a nyomóerőbe beírva *F*ny = *m v*lent2 / *R* + *mg* ≥ 5*mgR* + *mg* = 6 *mg*.

A nyomóerő a legalsó ponton *F*ny ≥ 6 *mg*, tehát a test gyorsulása legalább 6*g*! (Hullámvasút!)

|  |  |
| --- | --- |
| Ha nem megy végig a körpályán, csak egy köríven mozog:  **3.) Síkinga.** Ez a matematikai ingának egy speciális mozgása.  A mozgásegyenlet: *m****a*** = *m****g*** + ***F*k** | Matematikai inga: egyik végén rögzített, nyújthatatlan, elhanyagolható tömegű fonál végére felfüggesztett tömegpont.  Általános mozgása: egy gömb felületén, nehéz leírni.  Speciális:  kúpinga (ld. fent): vízszintes körmozgás, *a*t = 0, *v* = konst.  síkinga: körív függőleges síkban, *v* ≠ konst. |

A kötélnek a függőlegessel bezárt szöge *α*(*t*), időben változik.

A sugár irányú komponens: *ma*cp = *F*k – *mg*·cos*α*

→ *F*k = *ma*cp + *mg*·cos*α* (ebből *v* ill. *ω* ismeretében ki tudjuk fejezni a kötélerőt).

Az érintő irányú komponens: *ma*t = –*mg*·sin*α*, ebből tudjuk meghatározni az *α*(*t*) függvényt:

*ma*t = *m·ℓ·β* = *m·ℓ·* = –*mg*·sin*α* → *ℓ·* = –*g*·sin*α*

Ha feltesszük, hogy *α* kicsi, akkor sin*α* ≈ *α*, ezt beírva a kapott differenciálegyenlet

*ℓ*· = –*g·α* , ami matematikailag azonos alakú, mint a harmonikus rezgőmozgás egyenlete.

Ebből következik, hogy a megoldás *α*(*t*) = *α*max cos(*ωt* + *ϕ*0),

ahol *α*max és *ϕ*0 értékét a kezdeti feltételek határozzák meg,

az *ω* körfrekvencia pedig abból kapható meg, hogy

a mozgásegyenletből = –(*g*/*ℓ*)·*α* ,

az *α*(*t*) függvény második deriváltjából = –*ω*2·*α* ,

tehát *ω*2 = *g*/*ℓ* →

→ a periódusidő , ez azonban a sin*α* ≈ *α* közelítés miatt csak kis szögekre érvényes.

A közelítés 5°-nál 0,05%, 22°-nál 1%, 90°-nál 18% hibát ad. Nagyobb szöggel kitérítve a periódusidő nő.

Mekkora a kötélerő az egyes helyzetekben?

Ehhez először szükséges tudni a test sebességét az egyes helyzetekben. Energia-megmaradást (ld. később) felírva ki tudjuk fejezni a test sebességét a kötélnek a függőlegessel bezárt *α* szöge függvényében.

Vegyük fel a helyzeti energia nulla szintjét a kötél felfüggesztési pontjának magasságára.

1. A maximális kilendülésnél (*α*max) a sebesség nulla;   
a mechanikai energia *E*mech,1 = –*mg* *ℓ* cos*α*max + 0

2. A legalsó pontban (*α*=0) maximális a sebesség nagysága;   
a mechanikai energia *E*mech,2 = –*mg ℓ* + ½ *m v*max2

3. Tetszőleges közbenső állapotban   
a mechanikai energia *E*mech = –*mg ℓ* cos*α* + ½ *m v*2

A maximális sebesség kifejezhető 1.+2.-ből:

–*mg ℓ* cos*α*max + 0 = –*mg ℓ* + ½ *m v*max2 → *v*max2 = 2*g ℓ* (1 – cos*α*max)

A kötélerő a legalsó pontban (*α*=0):

*F*k = *mg*·cos*α* + *ma*cp = *mg* + *m·v*max2/*ℓ* = *mg* + *m*·2*g*(1–cos*α*max) = *mg* ( 3 – 2 cos*α*max).

Ennyi tehát a test súlya a legalsó pontban (*mg*-nél nagyobb).

Vegyük észre, hogy ha nem is leng az inga, csak lóg (*α*max=0), akkor visszakapjuk, hogy *F*k = *mg*.

Közbenső helyzetre az alsó helyzethez hasonló levezetéssel

*F*k = *mg* (3 cos*α* – 2 cos*α*max).

A test gyorsulása az egyes helyzetekben:

1. A maximális kilendülésnél *v*=0 → *a*cp = 0 → *a* = *a*t,max = – *g*·sin*α*max, érintő irányú.

2. A legalsó pontban *α*=0 → *a*t = 0 → *a* = *a*cp,max = *g* ( 3 – 2 cos*α*max), sugár irányú.

3. Tetszőleges közbenső állapotban: *a*t = –*g*·sin*α*, *a*cp = *g*·(3cos*α*–2cos*α*max), a gyorsulás a kettő vektori eredője. RAJZ

A kúpinga és a síkinga összehasonlítása

A mozgásegyenlet vektori alakban mindkét esetben *m****a*** = *m****g*** + ***F*k**

*m****g***

***F*k**

α

kúpinga

***F*k**

α

síkinga

***F*e**

*m****g***

Az erők felbontása:

Kúpinga esetén **er** és **eϕ** vízszintes síkban vannak, és szükség van a függőleges **k** egységvektorra is;   
ezekkel *m****g*** = –*mg***k** , ***F*k** = –*F*k sin*α* **er** + *F*k cos*α* **k .**

Síkinga esetén **er** és **eϕ** függőleges síkban vannak,   
ezekkel ***F*k** = –*F*k **er** , *m****g*** = *mg* cos*α* **er** + *mg* sin*α* **eϕ**.

A mozgásegyenlet komponensei:

Kúpinga

**eϕ** irányában, azaz a (vízszintes) körpálya érintője irányában nem hat a testre erő → *ma*t = 0.

**k** irányában, azaz függőlegesen: *ma*z = *F*k cos*α* – *mg*.

**er** irányában, azaz sugár irányban: *ma*cp = *F*k sin*α*.

Síkinga

**eϕ** irányában, azaz a (függőleges) körpálya érintője irányában: *ma*t = –*mg* sin*α* .

**er** irányában, azaz sugár irányban: *ma*cp = *F*k – *mg* cos*α .*

A mozgásegyenlet megoldása: a kötélerő, a sebesség és a periódusidő kifejezése:

Kúpinga

**eϕ** irányában: *ma*t = 0 → *v* = konst.

**k** irányában: a függőleges komponensek eredője zérus (mivel a körpálya vízszintes síkban van):

*F*k cos*α* – *mg* = 0 → a kötélerő nagysága *F*k = *mg* / cos*α* .

**er** irányában: *ma*cp = *F*k sin*α* = *mg* sin*α* / cos*α* = *mg* tg*α*, ebből

*a*cp = *rω*2 = (*ℓ*·sin*α*)·(2π/*T*)2 = *g*·tg*α* = *g*·(sin*α*/cos*α*) → *g*/cos*α* = *ℓ*·(2π/*T*)2 → ,

ill. , adott *α* esetén konstans, *α* növelésével végtelenhez tart.

Síkinga

**eϕ** irányában: *ma*t = *m ℓ* = –*mg* sin*α* ; feltéve, hogy *α* kicsi, így sin*α* ≈ *α* :

= –(*g/ℓ)α* → *ω*2 = *g*/*ℓ* → a periódusidő .

A test sebessége (és szögsebessége) az egyes helyzetekben energia-megmaradást felírva fejezhető ki.

**er** irányában: *ma*cp = *F*k – *mg* cos*α* → *F*k = *mg* cos*α* + *m a*cp = *mg* cos*α* + *m ℓω*2 , periodikusan változik.

A szélső helyzetekben *ω* = 0 → *a*cp = 0 → *F*k = *mg* cos*α*max .

A legalsó helyzetben *α* = 0, *F*k = *mg* + *m ℓωmax*2 = *mg* (3 – 2cos*α*max) > *mg*.

**„Kozmikus” körpálya**

A Föld felszínétől távolabb az általános gravitációs erő hatására is létrejöhet körpálya:

Első kozmikus sebesség: mekkora az a *v*1 sebesség, amivel egy test körpályán kering a Föld körül? („éppen körbeesi a Földet?”)

A test centripetális gyorsulását a gravitációs erő adja:

*m a*cp = *γ m M*Föld / (*R*Föld+*h*)2 , *a*cp = *v*12 / (*R*Föld+*h*)

→ *m v*12 / (*R*Föld+*h*) = *γ m M*Föld / (*R*Föld+*h*)2 → *v*12 = *γ M*Föld / (*R*Föld+*h*)

Ilyen pálya esetén *h* << *R*Föld, és tudjuk, hogy *g*0 = *γ M*Föld / *R*Föld2 , ezért

*v*12 ≈ *γ M*Föld / *R*Föld = *g*0 *R*Föld → *v*1 ≈ 7,9 km/s.

Ekkor a test szögsebessége *ω*1 = *v*1 / *R*Föld ≈ 1,24·10–3 s–1, keringési ideje *T*1 = 2π/*ω*1 = 5067 s = 1,4 h.

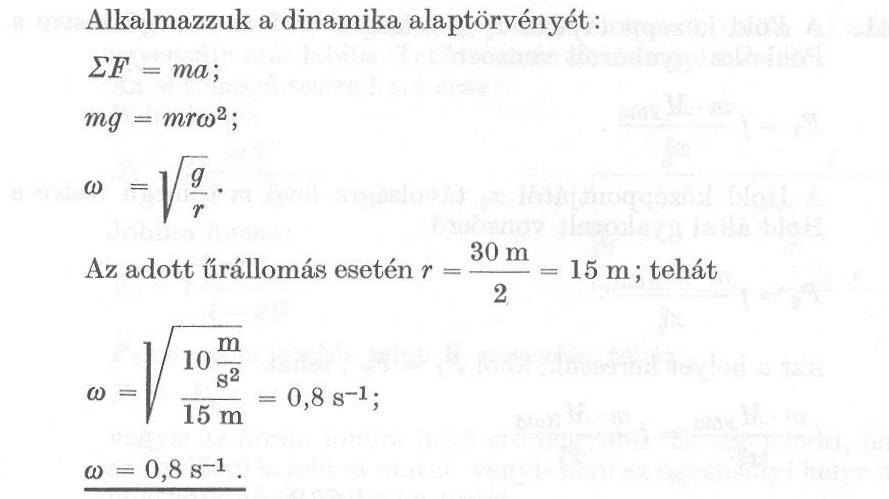
Ilyen esetben egy űrállomás belsejében a benne levő emberekre, tárgyakra nem hat nyomóerő, tehát „súlytalanok”! (Súly: ld. később!)

A „súlytalanságot megszüntethetjük”, ha forgó mozgással hozunk létre mesterségesen nyomóerőt:

**DRS 6.39.** Egy űrállomás 30 m hosszú rúddal összekötött két kisebb űrkabinból áll. Milyen szögsebességgel kell az űrállomásnak a rúd középpontján átmenő képzelt tengely körül forognia, ha azt akarjuk, hogy az űrkabin lakói a Föld felszínén megszokott „súlyú” állapotban érezzék magukat?







A Földfelszín közelében a körpálya legfelső pontján is létrejöhet súlytalanság, ill. olyan állapot, amikor a repülőben ülők úgy érzékelik, mintha az elengedett tárgyak felfelé esnének (függőlegesen lefelé mutató nyomóerő kell a pályán tartáshoz):

Függőleges síkban körpályán haladó repülőgép sebessége 1080 km/h.

**a)** Mekkora legyen a körpálya sugara, hogy a legfelső pontban a pilóta „súlytalan” legyen?

**b)** És mekkora legyen a körpálya sugara, ha azt szeretnénk elérni, hogy a legfelső ponton a pilóta ’*g*’ gyorsulást érezzen a talpa felé?

**MO.** *v* = 1080 km/h = 300 m/s

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| mg  x | mg  x  Fny | |
| **a)** Mivel a legfelső pontban súlytalan, azaz a repülőgép nem hat rá nyomóerővel, ezért a pilótára csak a nehézségi erő hat:  *m****a*** = *m****g***  A gyorsulása a körpálya középpontja felé mutató centripetális gyorsulás, tehát  *mg* = *ma*cp = *mv*2/*R* → *R* = *v*2/*g* = 9000 m. | | **b)** A legfelső pontban a repülőgép függőlegesen lefelé nyomja a pilótát (fejjel lefelé ül a gépben).  *m****a*** = *m****g*** + ***F*ny**  Mivel a nyomóerő éppen *mg* nagyságú:  *mg* + *F*ny = 2*mg* = *ma*cp = *mv*2/*R*  → *R* = *v*2/2*g* = 4500 m. | |

A **b)** esetben a pilóta azt látná, hogy amit elenged, a lába felé „esik”; ha vizet önt, akkor az a lába felé folyik, és meg is tudja inni a pohárból, ahogy ezt az alábbi videón is lehet látni: <https://www.youtube.com/watch?v=g99ho_ExApU>

Milyen magasságon keringenek az olyan testek, amelyek a Föld egy adott pontja fölött „állnak”?   
(ún. szinkron, azaz geostacionárius műholdak)

**MO.**

Ezek szögsebessége meg kell egyezzen a Föld szögsebességével: *ω*Föld = 2π / 86164 = 7,29·10–5 s–1

*m a*cp = m (*R*Föld+*h*)⋅*ω*Föld2 = *γ m M*Föld / (*R*Föld+*h*)2

→ = 36,85·103 km ≈ 5,8 RFöld

Számítsuk ki a Hold centripetális gyorsulását kétféleképpen: a

**a)** gravitációs erőtörvényt,

**b)** körmozgás adatait felhasználva.

A Hold pályájának sugara kb. 60-szorosa a Föld sugarának (RFöld ≈ 6400 km),   
a Hold keringési ideje 27 nap.

**MO.**

**a)** *m a*cp = *γ m M*Föld / *a*Hold2 = *γ m M*Föld / (60 *R*Föld)2

→ *a*cp = *γ M*Föld / (60 *R*Föld)2 = 6,67⋅10–11 m3/(kg⋅s2) ⋅ 6⋅1024 kg /(60⋅6400⋅103 m)2 = 2,7⋅10–3 m/s2

**b)** *a*cp = (60 *R*Föld)⋅*ω*Hold2 = (60 *R*Föld)⋅(2π/THold)2 = (60⋅6400⋅103 m)⋅(2π/(27⋅24⋅3600 s))2 = 2,8⋅10–3 m/s2

**NEMINERCIA-RENDSZEREK, TEHETETLENSÉGI ERŐK**

Pl. Földrengés. Fékező, gyorsító, kanyarodó jármű. Fénykép kanyarodó motorosról, körhintáról. Hogy lehet a samponos, tusfürdős, majonézes, ketchupos,… flakonból az utolsó részletet kinyerni? Nem tudunk belenyúlni és magára az anyagra kézzel közvetlenül egy erővel hatni. De elkezdhetjük rázni vagy pörgetni a flakont, és a tehetetlenségi erő fogja megmozdítani az anyagot.

ISM: inerciarendszer: olyan vonatkoztatási rendszer, melyben azt tapasztalhatjuk, hogy ha az erők eredője zérus, akkor a test nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Ha az erők eredője zérus és a test mégis gyorsul, akkor az adott vonatkoztatási rendszer nem inerciarendszer, nem érvényes benne Newton I. axiómája.

előrébb tenni a Newton-axiómák utánra?

A továbbiakban ugyanazt a mozgást különböző vonatkoztatási rendszerekből nézve fogjuk vizsgálni.

K egy inerciarendszer, K’ egy másik vonatkoztatási rendszer.

K -ban a test helyvektora ***r***, sebessége ***v***, gyorsulása ***a*** ;

K’-ben a test helyvektora ***r’***, sebessége ***v’***, gyorsulása ***a*’**.

K’ origójának helyvektora K-ban ***R***, azaz ***r*** = ***R*** + ***r*’.** (Minden időfüggő lehet, azaz ***r***(*t*) = ***R***(*t*) + ***r*’**(*t*) .)

RAJZ (átmásolni a régit?)

Mivel K inerciarendszer, ezért *m****a*** = Σ***F*i** . Az ***F*i** erők különböző kölcsönhatásokból származnak – pl. nehézségi erő, felület, rugó, súrlódás…

Ha K’ egyenes vonalú egyenletes mozgást végez K-hoz képest: ***R*** = ***v*R** *t* → ***v*** = ***v*R** + ***v*’**

(Pl. egymáshoz képest állandó sebességgel haladó autók.)

Mivel ***v*R** konstans, ezért ***a*R** = 0, tehát ***a*** = ***a*’**, azaz *m****a*’** = Σ***F*i**,

vagyis a K’ rendszerben ugyanúgy érvényes lesz Newton I. axiómája, mint a K rendszerben

→ K’ is inerciarendszer (ez a Galilei-féle relativitási elv);

→ egy inerciarendszerhez képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszer is inerciarendszer (→ végtelen sok inerciarendszer létezik).

**Neminercia-rendszerek:**

**1.** K’ egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló (transzlációs) mozgást végez K-hoz képest: ***R*** = ½ ***a*tr** *t*2

(Pl. egymáshoz képest gyorsuló autók.)

***r*** = ***R*** + ***r*’** = ½ ***a*tr** *t*2 + ***r*’** → ***v*** = ***a*tr** *t* + ***v*’** → ***a*** = ***a*tr** + ***a*’**

Most *m****a*’** = *m*(***a*** – ***a*tr** ) = *m****a*** – *m****a*tr** = Σ***F*i** – *m****a*tr**,   
vagyis *m****a*’** ≠ Σ***F*i** , nem érvényes Newton II. axiómája a K’ rendszerben nézve!

→ átalakítjuk, hogy a K’-ben felírt mozgásegyenlet formailag hasonló legyen a K-ban felírt mozgásegyenlethez: *m****a*’** = Σ***F*i** – *m****a*tr** =Σ***F*i** + ***F*tr** \*\*\*

***F*tr** = – *m****a*tr** egy fiktív erő, a **transzlációs tehetetlenségi erő**, amit a K’ vonatkoztatási rendszerben (ami ***a*tr** gyorsulással transzlációs mozgást végez a K inerciarendszerhez képest) hozzá kell adnunk a kölcsönhatásból származó erőkhöz, hogy Newton II. axiómáját alkalmazhassuk.

Pl. gyorsító busz: a busz (mint K’ rendszer) gyorsulása előrefelé mutat (az úttesthez mint K inerciarendszerhez képest), közben minket valami a busz háta felé „lök”.

Fékező busz: a busz gyorsulása hátrafelé mutat, minket valami a busz eleje felé „lök”.

Pl. felfelé gyorsító lift: a lift (mint K’ rendszer) gyorsulása felfelé mutat (az épülethez mint K inerciarendszerhez képest), ezért a lift padlója *mg*-nél nagyobb nyomóerőt fejt ki a benne levő testre.

Ezt vizsgálhatjuk

– a K rendszerben: *m****a*** = ***F*ny** + *m****g***

mivel a lifttel megegyező nagyságú gyorsulása van a benne levő testnek az épülethez képest, ezért***a*** = ***a*tr** → *matr* = *F*ny – *mg* → a nyomóerő *F*ny = *mg* + *ma*tr .

– a K’ rendszerben: *m****a*’** = ***F*ny** + m**g** + ***F*t**r , ***F*tr** = – *m****a*tr**

mivel a lifthez képest a benne levő test nyugalomban marad, ezért ***a’*** = 0

→ *F*ny – *mg* – *ma*tr = 0 → a nyomóerő *F*ny = *mg* + *ma*tr .

Lefelé gyorsító lift: a lift gyorsulása lefelé mutat, ezért a lift padlója *mg*-nél kisebb nyomóerőt fejt ki a benne levő testre.

– a K rendszerben: *ma* = *ma*tr = *mg* – *F*ny

– a K’ rendszerben: *ma*’ = 0 = *mg* – *F*ny – *ma*tr

a nyomóerő tehát *F*ny = *mg* – *ma*tr

Figyelem: a fenti példákban nem a sebességek iránya, hanem a gyorsulások iránya számít!

Az *F*ny nyomóerő a test súlya (ez az, amit leolvashatnánk egy mérlegről).

A **súly** az az erő, amivel a test az alátámasztást nyomja, ill. amivel a felfüggesztést húzza.

A test súlya tehát nem mindig *mg*. A fenti példákból látható, hogy felfelé gyorsító liftben a test súlya nagyobb, mint *mg*, lefelé gyorsító liftben a test súlya pedig kisebb, mint *mg*.

Súlytalan egy test zuhanás közben (pl. ha a lift leszakad, akkor *a*tr = *g*, ezért *F*ny = *mg* – *ma*tr = 0).

|  |  |
| --- | --- |
| Az emberi szervezet 1 mg-re van tervezve, de nagy transzlációs gyorsulású vonatkoztatási rendszerekben (vagy forgó mozgást végző vonatkoztatási rendszerekben, ld. lejjebb a centrifugális erőnél) többszörösére is nőhet a súlya, ld. pl.  <https://www.youtube.com/watch?v=-oF2q4CXwM0> |  |

\*\*\* Neminercia-rendszerben bevezetünk olyan erő-jellegű tagot, amivel formailag ott is   
„*m****a*** = Σ***F*i**” alakú lesz a mozgásegyenlet:

*m****a*’** = Σ***F*i** + ***F*teh**.

A bevezetett erő nem két test kölcsönhatásából származik, de „érezhető”. Az ilyen erőket **tehetetlenségi erő**knek hívjuk. 4 féle tehetetlenségi erő van, annak megfelelően, hogy a K’ vonatkoztatási rendszer milyen mozgást végez a K inerciarendszerhez képest: a fent tárgyalt transzlációs tehetetlenségi erő, és három forgó vonatkoztatási rendszerekben fellépő erő.

**2.** K’ állandó ω szögsebességű forgómozgást végez K-hoz képest és a test K’-ben áll.

RAJZ!

Legyen K’ forgástengelye a két koordinátarendszer origója. Az *x*’ tengelyt vegyük úgy fel, hogy azon legyen rajta a test. Ekkor

– a K (inercia)rendszerben nézve a test egyenletes körmozgást végez, tehát a testre ható (tényleges kölcsönhatásból származó) erők eredője biztosítja a centripetális gyorsulást:   
*m****a*cp** = Σ***F***;

– a K’ rendszerben viszont a test áll, a gyorsulása zérus (***a*’** = **0**), azaz a testre hatók eredőjének és a tehetetlenségi erőnek az összege zérus:   
*m****a*’** = Σ***F*** + ***F*teh** = **0**.

Ebből következik, hogy ***F*teh** = –*m****a*cp** . Ezt a tehetetlenségi erőt **centrifugális erő**nek hívjuk,

nagysága *F*cf = *m r ω*2 , ahol

*ω* a K’ rendszer szögsebessége a K rendszerhez képest, és

*r* a vizsgált test távolsága a forgástengelytől;

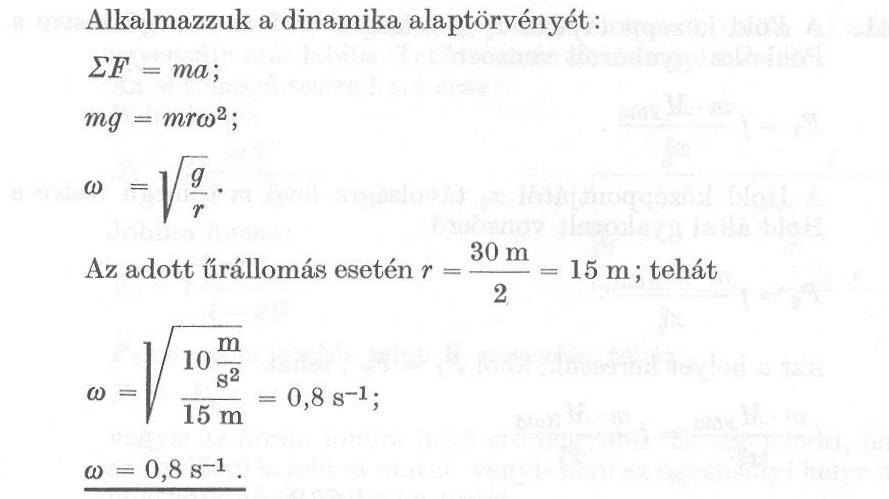
iránya a forgás síkjában a forgástengelytől kifelé mutat.

Pl. körhinta: K-ban felírva: *m****a*** = *m****g*** + ***F*k** , *a* = *a*cp

K’-ben felírva *m****a*** = *m****g*** + ***F*k** + ***F*cf** , *a* = 0

Pl. *g* létrehozása mesterségesen, ill. sok *g*-tűrés vizsgálata centrifugával:

**DRS 6.39.** Egy űrállomás 30 m hosszú rúddal összekötött két kisebb űrkabinból áll. Milyen szögsebességgel kell az űrállomásnak a rúd középpontján átmenő képzelt tengely körül forognia, ha azt akarjuk, hogy az űrkabin lakói a Föld felszínén megszokott „súlyú” állapotban érezzék magukat?



A centrifugális erő következménye, hogy a Föld alakja nem gömb

<https://fizipedia.bme.hu/index.php/Geoid_modell>

és az is, hogy a g értéke függ a szélességi körtől (ld. feljebb a nehézségi erőnél). RAJZ: a centrifugális erő a Földön a forgástengelyre merőlegesen kifelé mutat (nem sugár irányban kifelé!), az adott földrajzi helyen a centrifugális erőnek és a Föld tömegközéppontja felé mutató gravitációs erőnek az eredője határozza meg a függőleges irányt. Számértékeket ld. a gravitációs erőnél a g értékénél!

Számoljunk:

a Föld szögsebessége *ω* = 2π / *T*= 2π / 86164 = 7,292·10–5 s–1,

*a*cf  = *rω*2 , ahol *r* az Egyenlítő síkjával párhuzamos körpálya sugara;

az Egyenlítőn *a*cf,E = *R*Föld,E ∙ *ω*2 = 0,033916 m/s2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *R*Föld  (km) | *g*számolt,1 (m/s2) | *a*cf (m/s2) | *g*számolt,2 (m/s2) | *g*mért (m/s2) |
| Egyenlítő | 6378,2 | 9,798 | 0,034 | 9,764 | 9,780 |
| sarok | 6356,8 | 9,864 | 0 | 9,864 | 9,832 |

***F*cf** = –*m* ***ω***×(***ω***×***r***’)

**3.** K’ állandó *ω* szögsebességű forgómozgást végez és a test K’-ben *v*’ sebességgel mozog.

Gondolatkísérlet: ha a Földből sugárirányban kiálló nagyon magas pózna tetejéről leesik egy golyó, hol ér földet a pózna tövéhez képest? Ha nem lenne közegellenállás, akkor előrébb, mert a Föld szögsebességének megfelelő sebesség nagyobb sugáron (a pózna tetején) nagyobb sebességet jelent, és ahogy esik lefelé, megelőzi a pózna kisebb sugáron levő alsó pontját!

Kísérletek: forgózsámolyon, régi lemezjátszón, játszótéri körhintán kifelé gurított test: kívülről nézve sugár irányban kifelé mozog egyenes pályán, de a forgóban nézve oldalirányban lemarad, eltérül. A forgásban levő Földön a nagyobb távolságokat megtevő testek esetében megfigyelhető, hogy a lefelé eső testek nem függőlegesen esnek, a lövedékek oldal irányban eltérülnek. Ciklonok; örvények a mosdóban?!?; Foucault-inga.

Az állandó szögsebességgel forgó rendszerben mozgó testre ható tehetetlenségi erő a **Coriolis-erő**: ***F*Cor** = –2*m* ***ω***×***v*’** , vagyis a K’-beli ***v*’** sebesség és az ***ω*** szögsebesség vektoriális szorzata, szorozva 2*m*-mel. Mi az, hogy szögsebesség-vektor?!? A szögsebesség-vektor a forgástengely irányába mutat, úgy, hogy ha a jobb kezünkön a lazán behajlított ujjaink mutatják a forgásirányt, akkor a kinyújtott hüvelykujjunk mutat a szögsebesség-vektor irányába (vagyis ***ω*** merőleges a forgás síkjára, és az adott síkban a két lehetséges forgásirányhoz rendelhető vektorok egymás ellentettjei).

Kinematikában is láttuk ezt a tagot, amikor polárkoordináta-rendszerben deriváltunk:

Mivel ennek az erőnek a nagysága és iránya függ a test sebességének az irányától, különböző hatásait figyelhetjük meg.

A Föld ***ω*** szögsebesség-vektorának iránya a Föld forgástengelyén északi irányba mutat. Mivel a Föld forgásának periódusideje egy nap, *T* ≈ 24⋅3600 s, pontosabban *T* = 86164 s, ezzel számolva a szögsebesség-vektor nagysága *ω* = 2π / *T*= 2π / 86164 = 7,292·10–5 s–1.

A Coriolis erő

* vízszintes sebességű testeket az északi féltekén jobbra, a déli féltekén balra térít el (ezért a nyomásesés miatt ezzel ellentétes lesz a ciklonok forgásiránya);
* függőlegesen lefelé eső testet keletre, felfelé mozgó testet nyugatra térít el (É és D féltekén is);
* kelet-nyugat irányú sebesség esetén: K→NY súlynövekedést okoz, NY→K súlycsökkenést okoz (Eötvös-effektus).

Pl. ha az M1-esen 130 km/h-val megyünk NY felé:

*ω*Föld = 2π/*T* = 2π/86164 ≈ 7,292∙10–5 s–1

a mi szélességi körünkön *ω*47⁰ = *ω*Föld ∙ cos47⁰ ≈ 4,973∙10–5 s–1

*v*’ = 130 km/h ≈ 36,1 m/s

*a*Cor = 2∙ ω47⁰∙v’ ≈ 3,59∙10–3 m/s2 a Coriolis-erőből adódó függőleges gyorsulás.

*a*Cor / *g* = 3,59∙10–3 / 9,81 ≈ 3,7∙10–4 = 0,037%,

vagyis 100 kg-onként 3,7 dkg a látszólagos tömegnövekedés.

**4.** K’ állandó *β* szöggyorsulású forgómozgást végez K-hoz képest.

Pl. amikor egy centrifuga „felpörög” vagy leáll.

Euler-erő: ***F*Euler** = *m* ***r*’**×***β***

**MUNKA, ENERGIA, ENERGIAMEGMARADÁS**

**MUNKA**

Ha a test egy egyenes mentén *s* utat tesz meg, akkor az ***F*** állandó nagyságú és irányú erő által a testen végzett munka

*W* = *F*⋅*s*⋅cos*α* ,

ahol *α* az erő iránya és az elmozdulás iránya által bezárt szög.

Az ***F*** erőnek csak az elmozdulás irányába eső komponense végez munkát.

Ha *α* = 0, akkor cos*α* = 1 → *W* = *F*⋅*s*;

ha *α* hegyesszög, akkor cos*α* > 0 → *W* > 0;

ha *α* = 90°, akkor cos*α* = 0 → *W* = 0;

ha *α* tompaszög (ill. *α* = 180°), akkor cos*α* < 0 (cos*α* = –1) → *W* < 0.

Rövidebben felírhatjuk a munkát az ***F*** erővektor és a **Δ*r*** elmozdulás-vektor skalárszorzataként:

*W* = ***F***⋅**Δ*r***

Kihasználhatva a kifejezés szimmetriáját, a munkát számolhatjuk nem csak úgy, hogy az ***F*** erő vetületét vesszük a **Δ*r*** elmozdulás-vektor irányára (és ezt szorozzuk az elmozdulás-vektor nagyságával), hanem úgy is, hogy a **Δ*r*** elmozdulás-vektor vetületét vesszük az ***F*** erő irányára (és ezt szorozzuk az erővektor nagyságával).

Ha a test pályája nem egyenes és/vagy az erő iránya/nagysága nem állandó, akkor a teljes munka a „végtelenül kicsi” pályaszakaszokon vett ***F***(***r***)⋅***dr*** munkák összegeként, vagyis a következő vonalintegrállal számítható:

A munka mértékegysége Joule [ J = Nm = kg∙m2/s2 ].

Speciális esetek:

1) A **kényszererők** (felület nyomóereje, kötélerő, rúderő) **által végzett munka mindig zérus**, mivel a kényszererők mindig merőlegesek az elmozdulás irányára, ***F*** ⊥ ***dr*** , *α* = 90° → *W* = 0.

2) A **csúszási súrlódási erő és a közegellenállási erő** **által végzett munka negatív**, mivel ezek az erők ellentétes irányúak a sebességgel, azaz ***F*** és ***dr*** ellentétes irányú, *α* = 180°, cos*α* = –1 →   
*W* = – *F*⋅*s* < 0.

Kitérő:

Fejezzük ki egy test sebességét az általa megtett út függvényében!

A test mozgásegyenlete: *m****a*** = Σ***F***

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy Σ***F*** = konst.,

a test egyenes vonalú mozgást végez.

A gyorsulása *a* = Σ*F* / *m* = konst.,

a sebessége *v* = *v*0 + *a·t* ,

amiből kifejezzük az időt: *t* = (*v*–*v*0)/*a*,

és behelyettesítjük a megtett útba:

*s* = *v*0 *t* + ½ *a t*2 = *v*0 · (*v*–*v*0)/*a* + ½ *a* · (*v*–*v*0)2/*a*2 = … = ½ (*v*2 – *v*02)/*a* .

Szorozzunk át az ’*a*’ gyorsulással, és szorozzuk meg mindkét oldalt *m*-mel:

*ma* · *s* = ½ *m v*2 – ½ *m v*02 (\*)

A bal oldali kifejezés éppen a testen végzett összes munka (mivel *ma* = Σ*F*).

A jobb oldalon szereplő kifejezések egy új mennyiséget jelölnek:

*E*kin = ½ *m v*2 a test **mozgási**, más néven **kinetikus energiája** (mértékegysége: J)

A (\*) egyenlet tehát így írható fel:

*W*össz = Δ*E*kin  , ahol

*W*össz a testre ható összes erő által végzett összes munka,

*E*kin = ½ *mv*2 a test mozgási / kinetikus energiája,

Δ*E*kin annak a megváltozása, Δ*E*kin = *E*kin, vég – *E*kin, kezdeti.

Ennek a neve **MUNKATÉTEL** (más néven kinetikus energia tétele), ami mindig igaz, teljesen általános (tetszőleges erők esetén alkalmazható) tétel.

A munkatétel olyankor hasznos, amikor a sebességre nem az idő, hanem a hely függvényében van szükségünk; ilyenkor sokkal gyorsabb, mint ha az erőkből gyorsulást számolnánk, stb, stb.

[Vigyázat, Δ*E*kin ≠ ½ *m*⋅(Δ*v*)2 , mivel *v*22–*v*12 ≠ (*v*2–*v*1)2!]

Speciális eset: ha az erő merőleges a sebességre, azaz ***F*** ⊥ ***dr***, akkor *W* = 0, tehát *E*kin = konst., vagyis *v* = konst., a sebesség *nagysága* nem változik (pl.: súrlódásmentes felületen végbemenő vízszintes körmozgásnál egyik erő sem végez munkát).

Fékút számítása munkatétellel:

*v*0 sebességgel haladó autó mekkora úton áll meg a súrlódási erő hatására?

MO. Az autóra hat a nehézségi erő, a nyomóerő és a súrlódási erő.

A nehézségi erő és a nyomóerő által végzett munka zérus (mert ezek az erők merőlegesek a haladási irányra), így csak a súrlódási erő végez munkát: *W*össz = *W*súrl = –*μmg·s*

Δ*E*kin = 0 – ½ *mv*02 , mivel a *v*0 sebesség nullára csökken.

A munkatétel tehát: –*μmg·s* = 0 – ½ *mv*02 , amiből *s* = *v*02 / (2*μg*)

Pl. *μ* = 0,6 esetén ha *v*0 = 50 km/h → *s* = 16,4 m; ha *v*0 = 80 km/h → *s* = 41,9 m.

Feladat: 10 m magas, 45° hajlásszögű lejtő tetejéről 2 kg tömegű golyó csúszik le. A lejtőn való mozgás közben a súrlódás elhanyagolható. A lejtő kis görbülettel vízszintes, érdes síkba megy át, amelynek súrlódási tényezője *μ* = 0,2. A lejtő lábától milyen messzire jut el a golyó?

MO.

1. Megoldhatjuk a feladatot úgy, hogy kiszámoljuk a test gyorsulását a lejtőn, ill. a vízszintes súrlódásos felületen, majd a *v* = *v*0+*at* és *s* = *v*0*t*+½*at*2 képletekből az időt kiküszöbölve megkaphatjuk az összefüggést a sebesség és az út között:

*A lejtőn* *a*1 = *g*⋅sin*α*

→ *v* = (*g*⋅sin*α*)⋅*t* (*v*0=0, mert álló helyzetből indul)

→ *s* = ½ (*g*⋅sin*α*)⋅*t*2 , ahol *s* = *h*/sin*α*,

a lejtő aljára idő alatt ér le, és ott

a sebessége .

*A vízszintes felületen* a súrlódás miatt *a*2 = –*μg*

→ *v* = *v*1 –*μg t* (a lejtő aljára *v*1-re gyorsult, a vízszintes szakaszon ez a kezdősebessége)

→ *x* = *v*1 *t* – ½ *μg⋅t*2 , a megállásig (*v*=0) eltelt idő ,

és a megtett út, amíg megáll: .

2. Megoldhatjuk a feladatot **munkatétellel** is:

*A lejtőn* a testre ható erők közül

a nyomóerő munkája zérus (mert merőleges a sebességre),

a nehézségi erő munkája pedig *W*g = (*mg*⋅sin*α*)⋅*s* = (*mg*⋅sin*α*)⋅ *h*/sin*α* = *mgh*

*W*össz = *mgh* = ½ *m v*12 – 0 → ;

*a vízszintes síkon* való csúszásnál

a nehézségi erő és a nyomóerő munkája zérus (mert merőlegesek a sebességre),

a csúszási súrlódási erő munkája *W*s = –*μmg⋅d*

*W*össz = –*μmg⋅d* = 0 – ½ *m v*12 → *d* = *v*12/(2*μg*) = (2*gh*)/(2*μg*) = *h*/*μ* .

Behelyettesítve *d* = *h*/*μ* = 50 m.

**A földi nehézségi (gravitációs) erő által végzett munka**

Az erő állandó. Ha a pálya egyenes, alkalmazhatjuk a *W* = ***F***⋅**Δ*r*** képletet. Pl. írjuk fel, mekkora munkát végez a nehézségi erő *h* magasságú, *α* hajlásszögű lejtőn…

1.) … lefelé csúszó testen:

Vegyük az erőnek az elmozdulás irányára vett vetületét, és szorozzuk az elmozdulás nagyságával:

*m****g***-nek az elmozdulás irányába (a lejtő síkjába) eső komponense *mg*⋅sin*α*,

a megtett út *s* = *h*/sin*α*,

*W* = (*mg*⋅sin*α*) · (*h*/sin*α*) = *mg·h* .  
A skalárszorzat szimmetriáját kihasználva számolhatunk úgy is, hogy az elmozdulás-vektornak (a lejtő irányába mutató *s* hosszúságú vektornak) vesszük az erő irányába eső (azaz függőleges) vetületét, ami a lejtő *h* magassága; és ezt szorozzuk az erő nagyságával: *W* = *mg·h* .

2.)… felfelé mozgó testen:

*m****g***-nek a lejtő irányú vetülete most ellentétes irányú az elmozdulás-vektorral → *W* = –*mg·h* .

A nehézségi erő által végzett munka pozitív, ha lefelé, ill. negatív, ha felfelé mozog a test.

Látható, hogy a nehézségi erő által végzett munka nagysága független a lejtő hajlásszögétől, csak a lejtő *h* magassága számít.

Ha a pálya nem egyenes, akkor a munka integrállal számítható:

A **k**⋅***dr*** skalárszorzat azt jelenti, hogy vesszük a ***dr*** elmozdulás-vektor vetületét a **k** irányára (a függőlegesre), ami a ***dr*** függőleges komponense, azaz *dz*.

Látható, hogy a tetszőleges pályán mozgó test esetén is igaz az, hogy **a nehézségi erő által végzett munka a kezdő- és végpont *z* koordinátájának különbségétől függ**.

Lefelé mozgó testnél Δ*z* < 0 → *W* > 0, a nehézségi erő munkát végez a testen;  
felfelé mozgó testnél Δ*z* > 0 → *W* < 0, más erőnek kell munkát végeznie a nehézségi erő ellenében.

**Az általános tömegvonzási (gravitációs) erő által végzett munka**

Az erő nem állandó (függ a két test közötti távolságtól), így a munka (még egyenes pálya esetén is) vonalintegrállal számítható.

Rögzítsük az origót az *M* tömegű testhez, és ***r*** jelölje a másik, *m* tömegű test helyvektorát. Ha az   
*m* tömegű test az A pontból a B pontba mozdul el, akkor az gravitációs erő által végzett munka

*.*

Ha *r*B < *r*A , azaz az *m* tömegű test közeledik az *M* tömegű testhez, akkor *W* > 0, a gravitációs erő végez munkát; ellenkező esetben valamilyen más erő végez munkát a gravitációs erő ellenében.

Az erő és az elmozdulás skalárszorzatának számolásakor itt is belátható, hogy az *m* tömegű test tetszőleges pályán mozoghat a kezdő- és végpont között, **a gravitációs erő által végzett munka független az úttól**, csak a kiindulási és a végpont *M*-től mért távolságától függ.

**A rugóerő által végzett munka**

Mivel a rugóerő függ a rugó megnyúlásától, ezért a végéhez rögzített test mozgása közben ez az erő nem konstans, és így a rugóerő által végzett munka integrállal számolható.

A rugó által végzett munka, ha a test az *xA* koordinátájú *A* pontból az *xB* koordinátájú *B* pontba mozdul el:

.

(Grafikusan integrálva ez az *F* ­– *x* diagramon az *F* = *kx* egyenes alatti terület nagysága.)

Ha |*x*B| > |*xA*| , vagyis a rugó megnyúlása (vagy összenyomódása) nő, akkor a rugó által végzett munka negatív, vagyis más erőnek kell munkát végeznie a rugóerő ellenében; de ha |*x*B| < |*xA*| , vagyis a test a rugó végén a nyugalmi hossza felé mozdul el, akkor a rugó végez munkát.

Mivel a kifejezés *x*-ben másodfokú, ezért a végzett munka nem csak attól függ, hogy mennyi a rugó hosszának megváltozása, hanem attól is, hogy mi a kiindulási hossza.

Pl. Mekkora munkát kell végeznünk ahhoz, hogy megnyújtsunk *k* = 5 N/m rugóállandójú rugót

* nyújtatlan állapotból (*x*0 = 0) *x*1 = 1 cm-re?
* nyújtatlan állapotból *x*2 = 2 cm-re?
* *x*1 = 1 cm-ről *x*2 = 2 cm-re? ,

vagyis amikor 1 cm-ről 2 cm-re nyújtjuk meg, akkor háromszor akkora munkát kell végezni, mint amikor a nyugalmi helyzetéből nyújtjuk meg 1 cm-re. Az azonban nem számít, hogy a 2 cm-es megnyúlást egy vagy két lépésben értük el,

**a rugó által végzett munka csak a rugó kiindulási és végső hosszától függ.**

Általánosan egy erő által végzett munka pozitív, ha az erő segíti a test mozgását, de lehet negatív is, ha az erő a mozgást akadályozza – ilyenkor egyéb erők hatására mozog a test az adott pályán.

**POTENCIÁLIS / HELYZETI ENERGIA**

Látható, hogy a földi nehézségi erő, az általános tömegvonzási erő, és a rugóerő esetén **a munka nem függ attól, hogy a test milyen úton jut el a kezdőpontból a végpontba**. Ha ugyanazon két pont között a másik irányba mozdul el a test, akkor a munka előjelet vált; ebből következik, hogy tetszőleges zárt görbén körbe menve az ezen erők által végzett összes munka zérus. Az ilyen erőket **konzervatív** erőknek nevezzük.

Ilyenkor be lehet vezetni egy olyan mennyiséget, ami a tér egyes pontjait jellemzi az adott erő esetén, és az egyes pontokat jellemző mennyiségből számolható az, hogy az adott erő mekkora munkát végez, ha a test a különböző pontok között mozog; ez a mennyiség

az *E*pot **potenciális**, vagy más néven **helyzeti energia** (mértékegysége: J).

Egy adott pontban a potenciális energia azzal a munkával egyenlő, amit az adott erő végez, ha a test az adott pontból elmozdul abba a pontba, ahol a potenciális energia zérus.

Helyzeti energia tehát csak konzervatív erők esetén létezik.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***F*** | *E*pot | *E*pot = 0 hol? | ekvipotenciális felületek |
| földi nehézségi erő | –*mg* **k** | *mgz* | tetszőleges | vízszintes síkok |
| általános gravitációs erő |  |  | *r* = ∞ | gömbök |
| lineáris rugalmas erő | –*kx* **i** | ½*kx*2 | *x* = 0 | (azonos nagyságú megnyúlás ill. összenyomódás) |

RAJZOK: *E*pot függvények; szintfelületek: merre nő *E*pot, és merre mutat az erő vektora.

A földi nehézségi erőhöz tartozó helyzeti energia *E*pot = *mgz* , ennek értéke csak a test *z* koordinátájától, vagyis egy adott szinthez viszonyított magasságától függ (ez a szint tetszőlegesen választható). Azonos magassághoz azonos helyzeti energia tartozik, vagyis ha a kezdő- és végállapot azonos magasságon van, akkor a nehézségi erő által végzett munka zérus. A vízszintes síkokon az *E*pot = *mgz* értéke állandó, azaz ezek ekvipotenciális felületek. Nagyobb magassághoz, azaz nagyobb *z* értékhez nagyobb potenciális energia tartozik. A nehézségi erő viszont a csökkenő *z* értékek irányába mutat, vagyis éppen ellenkező irányba.

Az általános gravitációs erőhöz tartozó helyzeti energia *E*pot = –*γmM/r*, ennek értéke csak a két test (tömegközéppontjának) távolságától függ, ill. ha az origót rögzítjük az *M* tömegű testhez, akkor az *m* tömegű test helyétől. Az *M* tömeg körüli egy-egy gömbfelületen a potenciális energia állandó, ezek az ekvipotenciális felületek. Nagyobb sugárhoz, azaz nagyobb távolsághoz nagyobb potenciális energia tartozik, azaz a potenciális energia az *M* tömegű testtől távolodva nő. Az *m* tömegű testre ható erő viszont az *M* tömegű test felé mutat, vagyis éppen ellenkező irányba.

A rugóerőhöz tartozó helyzeti energia *E*pot = ½ *kx*2, ennek értéke a nyújtatlan állapottól mért elmozdulástól függ (nem függ attól, hogy a rugó meghúzva van-e vagy összenyomódva). Nagyobb megnyúláshoz / összenyomódáshoz nagyobb potenciális energia tartozik, azaz a nyugalmi helyzettől bármelyik irányba távolodva nő a potenciális energia. A rugóerő viszont a nyugalmi helyzet felé mutat, vagyis éppen ellenkező irányba.

Általánosan igaz, hogy a konzervatív erők mindig arra mutatnak, amerre a hozzájuk rendelhető potenciális energia csökken („energiaminimumra való törekvés”).

A most bevezetett potenciális energiák felhasználásával az erők által végzett munka (integrálás helyett egyszerű különbségképzéssel) kiszámolható:

*W* = –Δ*E*pot = – (*E*pot, vég – *E*pot,kezdő ) = *E*pot, kezdő – *E*pot, vég

Megjegyzés: A munka a tér két pontjához tartozik (ill. nem konzervatív erő esetében a két pontot összekötő görbéhez), a potenciális / helyzeti energia egyhez.

Magasabb matematikai ismeretekkel a fentieket úgy foglalhatjuk össze, hogy egy ***F***(***r***) erőtér konzervatív, ha örvénymentes, azaz ***rot F***(***r***) = **0**.

Ilyenkor be lehet vezetni egy *ϕ*(***r***) potenciálfüggvényt (ez általános, pl. elektrodinamikában is lesz), aminek gradienseként áll elő az adott erőtér:

***F*** = –***grad***(*ϕ*) = – d*ϕ*/d***r*** .

Az ***F***(***r***) erőtér vektorvonalai a *ϕ*(***r***) potenciálfüggvény szintfelületeinek ortogonális trajektóriái, lokálisan a *ϕ*(***r***) csökkenő értékeinek irányába mutatnak.

**MECHANIKAI ENERGIA, ENERGIA-MEGMARADÁS**

Konzervatív erő által végzett munka esetén *W* = –Δ*E*pot ,

a munkatétel szerint (ami általánosan igaz) *W* = Δ*E*kin .

A munkára felírt két kifejezést összevonva

Δ*E*kin = –Δ*E*pot ,

azaz *E*kin,B – *E*kin,A = *E*pot,A – *E*pot,B , azaz *E*pot,A + *E*kin,A = *E*pot,B + *E*kin,B .

Mivel Δ*E*kin + Δ*E*pot = 0 → *E*kin + *E*pot = konst.

Vezessük be a **mechanikai energiát**: *E*mech = *E*kin + *E*pot  .

Egy test mechanikai energiája a mozgási és helyzeti energiájának összege. A helyzeti energia több tagot is tartalmazhat, attól függően, hogy milyen erők hatnak a testre (gravitáció, rugó).

Ha csak konzervatív erők lépnek fel, akkor a mozgás során

a mechanikai energia megmarad *E*mech = konst.

„Zárt rendszer mechanikai energiája állandó.”

Nem konzervatív erő a súrlódás és a közegellenállás. A konzervatívok „konzerválják”, „megőrzik” a mechanikai energiát, a nem konzervatívok pedig „disszipálják”, „szétszórják”, ún. „**disszipatív erők**”. A disszipatív erők által végzett munka negatív → a mechanikai energia csökken; de energia-megmaradás tágabb értelemben van, mert a mechanikai energia pl. „hővé alakulhat”, vagyis a test belső energiáját növeli, vagy pl. rugalmatlan ütközésnél deformációs munka végzésére fordítódik (alakváltozást okoz).

Mi az energia? „munkavégző-képesség”.

**Példák a mechanikai energia megmaradásának alkalmazására**

Hogy használjuk? különböző állapotokra felírjuk *E*mech-t.

Pl. hajítás:

*E*mech = ½ *mv*2 + *mg z* = konst.

½ *mv*A2 + *mg z*A = ½ *mv*B2 + *mg z*B

A test sebessége tetszőleges magasságra számolható (de vigyázat: *v*-ben négyzetes az összefüggés! vagyis nem számolhatunk úgy, hogy Δ*x* = *x*B–*x*A -hoz számolunk Δ*v* -t és azt hozzáadjuk *v*A-hoz).

Ebből rögtön látható az is, hogy a kiindulási magasságra visszaérve ugyanakkora lesz a test sebessége. (Ez egyébként nemcsak hajításnál lesz igaz, hanem lejtőnél is, ha a súrlódás elhanyagolható, sőt nemcsak sík, hanem görbült lejtőnél is!)

A hajítás maximális magassága *z* = 0-hoz képest: *z*A = 0, *v*A = v0; *z*B = *H*, és

függőleges hajításnál *v*B = 0

½ *mv*02 + 0 = 0 + *mg H* → *H* = *v*02 / (2*g*)

ferde hajításnál *v*B = *v*0·cos*α* (a test sebességének függőleges komponense zérus)

½ *mv*02 + 0 = ½ *m*·(*v*0·cos*α*)2 + *mg H* → *H* = (*v*0·sin*α*)2 / (2*g*)

Pl. függőleges körpálya:

ahol a súrlódás elhanyagolható, ott a sebességet számolhatjuk energia-megmaradással.

Ezeket ld. a függőleges körpályás feladatoknál!

Pl. harmonikus rezgőmozgás:

Vízszintes helyzetű rugó esetén

*E*mech = ½ *kx*2 + ½ *mv*2 = konst.

*x* = 0 -nál *v* = *v*max , maximális megnyúlásnál pedig *x* = *A* és *v* = 0; tehát

½ *kx*2 + ½ *mv*2 = ½ *mvmax*2 = ½ *kA*2 .

Ebből a test sebessége tetszőleges megnyúláshoz számolható, ill. fordítva.

A maximális sebesség ebből kifejezve

½ *kA*2 = ½ *mv*max2 → *v*max = *A* = *A ω* , ahogy már levezettük.

Függőleges helyzetű rugó esetén kétféle potenciális energiával is kell számolni:

*E*mech = ½ *mv*2 + *mgz* + ½ *kz*2 = konst.

(Ilyenkor a rugó a *z* tengely mentén nyúlik meg, ezért lesz *x* helyett *z* a képletben. A *z*=0 -t a rugó nyugalmi hosszához érdemes választani.)

Pl. második kozmikus sebesség:

Általános tömegvonzási erőt figyelembe véve a test mechanikai energiája a Földtől *d* távolságban

*E*mech = –*γmM*Föld/(*R*Föld+*d*) + ½ *mv*2 = konst.

Mekkora minimális *v*2 kezdősebesség kellene ahhoz (a közegellenállást elhanyagolva), hogy a test elszabaduljon a Föld gravitációs erőteréből, ahol már nem hat rá a Föld vonzóereje? Ehhez a Földtől végtelen távolra kell jutnia, mivel *F* = *γmM*Föld/(*R*Föld+*d*)2 csak *d*→∞ esetén tart 0-hoz.

A kezdőpontban *E*pot,A = – *γmM*Föld/*R*Föld és *E*kin, 0 = ½ *mv*22.

A végtelen távoli pontban a gravitációs erő potenciális energiája *E*pot = –*γmM*Föld/(*R*Föld+*d*) → 0, azaz a végpontban *E*pot,B = 0 , és a sebessége 0 (ha a minimális *v*2 sebességet keressük), azaz *E*kin,B = 0.

Energia-megmaradást felírva

½ *mv*22 – *γmM*Föld/*R*Föld = 0 – 0 → *v*2 ≈ 11,2 km/s

Számolhatunk *g*0 = *γM*Föld/*R*Föld2 behelyettesítéssel is:

½ *mv*22 –*mg*0 *R*Föld = 0 → *v*2 = ≈11,2 km/s .

**TELJESÍTMÉNY**

Egy konstans ***F*** erő által kifejtett teljesítmény, ha az erő Δ*t* idő alatt *W* munkát végez:

A teljesítmény mértékegysége a Watt: W = J/s = N⋅m/s = kg⋅m2/s3 .

Ha az erő nem állandó, akkor a pillanatnyi teljesítmény

.

A pillanatnyi teljesítmény kifejezhető a test pillanatnyi sebességével:

.

**HATÁSFOK**

Egy rendszer szempontjából az egyes erők által végzett munka lehet hasznos (pl. emelkedést vagy sebességnövekedést okoz), ill. haszontalan, azaz veszteség (pl. melegedés súrlódás miatt):

Wössz = Whasznos + Wveszteség

A hatásfok a számunkra hasznos munka aránya az összes munkához viszonyítva:

.

**IMPULZUS**  (más néven lendület, vagy mozgásmennyiség)

A test impulzusa a tömegének és a sebességének szorzata:

***I*** = *m* ***v*** *m*: tömeg; ***v***: sebességvektor (tehát az impulzus vektormennyiség)

mértékegysége [kg⋅m/s]

Az impulzus deriváltja

Ha *m* = konst., akkor .

Mivel , és Newton II. axiómája szerint *m⋅****a*** *=* ***F*** , ezért

: ez az **impulzustétel**.

Az impulzustétel egyenértékű Newton II. axiómájával. Eredeti megfogalmazásban a II. axióma így szólt: „a mozgásmennyiség megváltozása egyenlő az erőlökéssel”, ami az impulzustétel integrált alakjának felel meg:

Δ(*m⋅****v***) =

Egy adott test esetén ( *m* = konst.)

*m*⋅Δ***v*** =

Az mennyiséget hívjuk **erőlökés**nek. Amikor egy testnek **kezdősebességet adunk** (pl. hajításkor), akkor egy így leírható erőlökéssel idézzük elő a sebesség megváltozását. Ez az erő csak rövid ideig hat a testre, nem feltétlenül állandó erő (de ha tudjuk, mennyi ideig hatott a testre, akkor ki tudjuk számolni az átlagos értékét). A továbbiakban ez az erő már nem hat a testre, így a mozgásegyenletébe nem írjuk be.

Az impulzus additív mennyiség:

2 test esetén ***I*1** + ***I*2**  = *m*1 ***v*1** + *m*2 ***v*2** ,

több test esetén Σ***I*** = Σ(*m*i ***v*i**) .

Mivel az impulzus additív, felírhatjuk az impulzus-tételt több testre:

Σ***F*** az összes testre ható összes erő összegét jelenti. Az erőket két csoportra bonthatjuk aszerint, hogy a rendszeren belül levő két test között lép fel: ezek az ún. **belső** erők; vagy egy adott test és a rendszeren kívül levő más test kölcsönhatásából származik: ezek az ún. **külső** erők (pl. tömegvonzás, kényszererő).

Σ**F** = Σ**F**külső + Σ**F**belső

Mivel a belső erők a rendszert alkotó testek kölcsönhatásakor lépnek fel, a nagyságukról nincsen információnk, de azt tudjuk, hogy a belső erők összege páronként zérus (Newton III. axiómája szerint), így

Σ**F**belső = 0

így Σ**F** = Σ**F**külső , és az impulzustétel pontrendszerre csak a külső erők eredőjét tartalmazza:

Ha a külső erők eredője zérus („zárt rendszer”), akkor a rendszer össz-impulzusa konstans:

Σ**F**külső = 0 → Σ**I** = konst. : ez az **impulzus-megmaradás** tétele

Ez lehetőséget ad a sebességek számítására olyan rendszerek esetében, ahol nem ismerjük a belső erőket, pl. ütközések számítása, egy „rendszer” kettéválása (pl. labda eldobása), rakéta.

Ütközések: tökéletesen rugalmas ill. rugalmatlan határeset.

– rugalmatlan: m1**v1** + m2**v2** = (m1+m2)**u** → **u** = …

Nincs mechanikai energiamegmaradás! Emech csökken, mert a két test maradandó alakváltozást szenved, Emech csökkenéséből számítható a deformációs munka (disszipatív erő munkája).

– rugalmas: m1**v1** + m2**v2** = m1**u1** + m2**u2**

A mechanikai energia is megmarad (mert az átmeneti rugalmas deformáció után a testek visszanyerik az alakjukat). ½m1v12 + ½m2v22 = ½m1u12 + ½m2u22 → **u1**, **u2** (vektorok!)

Pl. Rugalmas ütközés egy egyenes mentén: m tömegű testet u sebességgel nekilövünk egy álló M tömegű testnek. Határozzuk meg a két test ütközés utáni sebességét, és vizsgáljuk meg azokat a speciális eseteket, amikor a) m = M; b) m M; c) m M.

Mivel az ütközés tökéletesen rugalmas, a két testből álló rendszer össz-impulzusa és mozgási energiája állandó:

mu = mv + MV

½ mu2 = ½ mv2 + ½ MV2

Az első egyenletből kifejezve v-t v = u – (M/m)V, ennek négyzetét írjuk be a másodikba:

mu2 = m(u2–(2M/m)uV+(M2/m2)V2) + MV2 ,

amiből  és .

Nézzünk meg speciális eseteket:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| m = M (a két golyó egyforma tömegű) | v = 0, V = u | sebességet cserélnek |
| m<<M (nagy tömegű álló golyónak ütközik elhanyagolható tömegű golyó) | v ≈ -u, V ≈ 0 | a kis golyó visszapattan,  a nagy meg se mozdul |
| m>>M (elhanyagolható tömegű golyónak ütközik nagy tömegű golyó) | v ≈ u, V ≈ 2u | a nagy golyó változatlan sebességgel megy tovább, a kis golyó kétszer akkora sebességgel indul |

**Rakéta:** a tömeg változik. m0 a kiindulási tömeg, m<m0 az aktuális tömeg (dm negatív):

mv = (m+dm)(v+dv) – dm(v–c) → m dv = –c dm → v = v0 + c⋅ln(m0/m) RAJZ: v – m