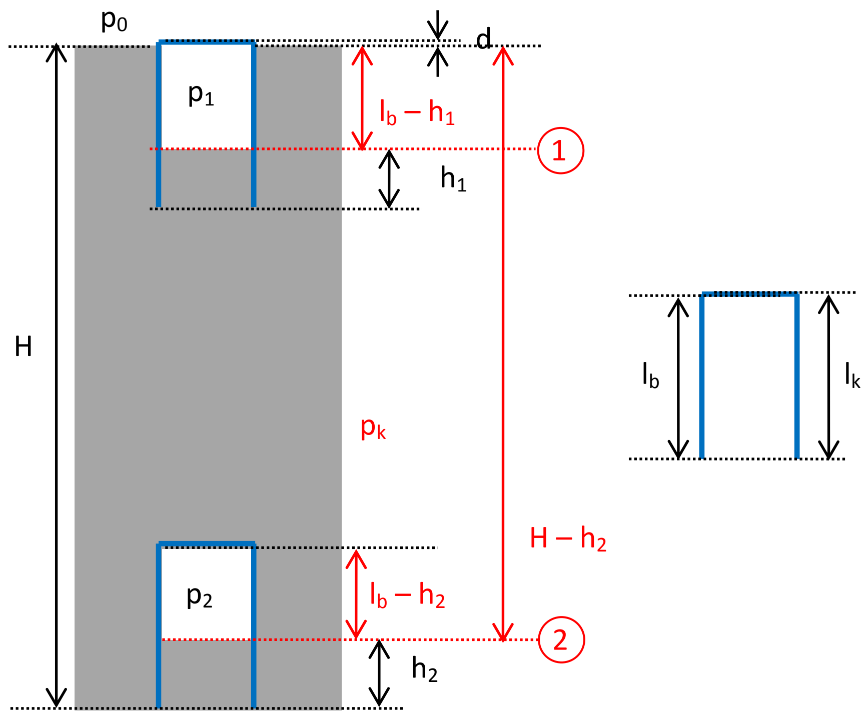
3/1. Cartesius-búvárt készítünk egy hengeres üvegcsővel, amelynek külső hossza l_k = 74 mm, belső hossza l_b = 73 mm. A búvárt tartalmazó palackban H = 17 cm magas a vízoszlop, a vízszint és a palack teteje közötti távolság d = 1 mm. A légköri nyomás $p_0 = 10^5$ Pa.
Kezdetben, a búvár felső helyzetében a csőben levő vízoszlop magassága h_1 = 22 mm. A palackot megnyomva a búvár lesüllyed, és a vízoszlop hossza az alsó helyzetben h_2 = 35 mm-re nő.
Mekkora nyomást fejtettünk ki a palackra?



Megoldás

A búvár felső helyzetében a bezárt levegő p_1 nyomása kiszámolható az 1 magasságra felírt egyensúlyból:

$$p_1 = p_0 + \rho_v\, g\, (l_b - h_1) = 10^5 \text{ Pa} + 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot (73-22)\cdot 10^{-3} \text{ m} = 100510 \text{ Pa.}$$

A bezárt levegő térfogata a felső helyzetben

$$V_1 = (l_b - h_1)\, A\,,$$

az alsó helyzetben

$$V_2 = (l_b - h_2)\, A\,.$$

Izoterm állapotváltozást feltételezve $p_1V_1 = p_2V_2$:

$$\rightarrow\ p_2 = V_1 / V_2 \cdot p_1 = (l_b - h_1) / (l_b - h_2) \cdot p_1 = (73-22) / (73-35) \cdot 100510 = 134895 \text{ Pa},$$

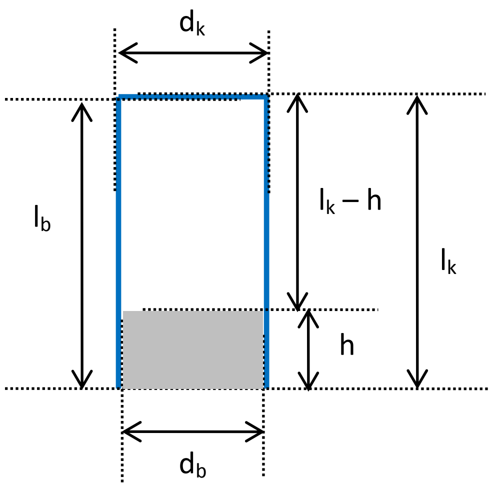
ennyi lesz a bezárt levegő nyomása az alsó helyzetben.

A 2 magasságra felírt egyensúlyból kiszámolhatjuk azt, hogy mekkora p_k nyomásra van szükség a hidrosztatikai és a légköri nyomáson felül ahhoz, hogy az alsó helyzetben p_2 nyomás jöjjön létre:

$$p_2 = p_0 + \rho_v\, g\, (H - h_2) + p_k$$

$$\rightarrow\ p_k = p_2 - p_0 - \rho_v\, g\, (H - h_2) = 134895 - 100000 - 10^3 \cdot 10 \cdot (170-35)\cdot 10^{-3} = 33545 \text{ Pa.}$$

3/2. Cartesius-búvárt készítünk egy hengeres üvegcsőből, amelynek tömege m_k = 5,59 g, külső hossza l_k = 74 mm, a külső átmérője d_k = 11,7 mm, a belső hossza l_b = 73 mm, és a belső átmérője d_b = 10 mm. Milyen magas vízoszlopot kell a csőbe tölteni, hogy a búvár átlagsűrűsége megegyezzen a víz sűrűségével (ρ_v = 1 g/cm^3)? A csőben levő levegő tömegéről se feledkezzünk meg! A levegő sűrűsége ρ_l = 0,0012 g/cm^3.



Megoldás

A búvár átlagsűrűsége

$$\rho_{átl} = \frac{m_k + m_{víz} + m_{levegő}}{V}$$

m_k = 5,59 g

$m_{víz} = \rho_{víz}\ A_b\ h_{víz} = \rho_{víz}\ (d_b/2)^2\ \pi\ h,$

behelyettesítve

$m_{víz}$ = 1 g/cm^3 · (1,0/2)^2 cm^2 π · h = 0,25 π · h ≈ 0,7854 h [g] , ahol h cm-ben értendő.

$m_{levegő} = \rho_{levegő}\ A_b\ h_{levegő} = \rho_{levegő}\ (d_b/2)^2\ \pi\ (l_b–h),$

behelyettesítve

$m_{levegő}$ = 0,0012 g/cm^3 · (1,0/2)^2 cm^2 π · (7,3–h) = 2,19·10$^{–3}$ π – 3·10$^{–4}$ π · h =
≈ 6,880 – 9,425·10$^{–4}$ h [g] (h cm-ben értendő).

V a búvár teljes térfogata, az üvegcső külső átmérőjével és hosszával számolt henger térfogata:

$V = A_k\ l_k = (d_k/2)^2\ \pi\ l_k,$

behelyettesítve

V = (1,17/2)^2 cm^2 π · 7,4 cm = 2,532465 π cm^3 ≈ 7,956 cm^3.

A búvár átlagsűrűsége megegyezik a víz sűrűségével:

$$\rho_{átl} = \rho_{víz} : \qquad \frac{m_k + m_{víz} + m_{levegő}}{V} = \rho_{víz}$$

$$\rightarrow \quad m_k + m_{víz} + m_{levegő} = \rho_{víz}\ V$$

$$m_k + \rho_{víz}\ (d_b/2)^2\ \pi\ h + \rho_{levegő}\ (d_b/2)^2\ \pi\ (l_b–h) = \rho_{víz}\ (d_k/2)^2\ \pi\ l_k$$

$$(\rho_{víz} - \rho_{levegő})\ (d_b/2)^2\ \pi\ \ h = \rho_{víz}\ (d_k/2)^2\ \pi\ l_k - m_k - \rho_{levegő}\ (d_b/2)^2\ \pi\ l_b$$

$$h = (\rho_{víz}\ (d_k/2)^2\ \pi\ l_k - m_k - \rho_{levegő}\ (d_b/2)^2\ \pi\ l_b)\ /\ ((\rho_{víz} - \rho_{levegő})\ (d_b/2)^2\ \pi)$$

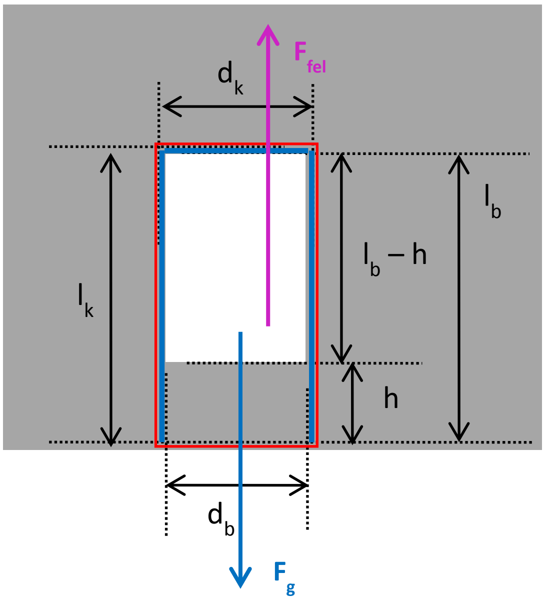
Behelyettesítve

h = (2,532465 π – 5,59 – 2,19·10$^{–3}$ π) / ((0,25 – 3·10$^{–4}$) π) ≈ 3,007 cm.

(A bezárt levegő tömege nélkül számolva 3,012 cm lenne.)

3/3. Cartesius-búvárt készítünk egy hengeres üvegcsőből, amelynek tömege m_k = 5,59 g, külső hossza l_k = 74 mm, a külső átmérője d_k = 11,7 mm, a belső hossza l_b = 73 mm, és a belső átmérője d_b = 10 mm. A palackot megnyomva megvárjuk, amíg a búvár lesüllyed a palack aljára, ekkor megszüntetjük a nyomást, aminek hatására az üvegcsőben levő vízoszlop hossza h = 2,25 cm-re csökken. A csőben levő levegő tömegét hanyagoljuk el. Milyen gyorsulással indul el a búvár fölfelé?

Megoldás



A búvárra két erő hat: az F_g nehézségi erő lefelé, és a hidrosztatikai felhajtóerő felfelé:

$$m_{búvár}\, a = F_{fel} - F_g = F_{fel} - m_{búvár}\, g \quad \rightarrow \quad \text{a búvár gyorsulása} \quad a = F_{fel} / m_{búvár} - g\ .$$

A búvár tömege:

$$m_{búvár} = m_k + m_{víz} = m_k + \rho_{víz} V_{víz} = m_k + \rho_{víz} (d_b/2)^2\, \pi\, h;$$

behelyettesítve

$$m_{búvár} = 5{,}59 \text{ g} + 1 \text{ g/cm}^3 \cdot (1{,}0 \text{ cm}/2)^2 \cdot \pi \cdot 2{,}25 \text{ cm} = 7{,}357 \text{ g} = 7{,}357 \cdot 10^{-3} \text{ kg};$$

a nehézségi erő

$$F_g = 7{,}357 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 7{,}357 \cdot 10^{-2} \text{ N}.$$

A felhajtóerő:

$$F_{fel} = \rho_{víz}\, g\, V_{búvár} = \rho_{víz}\, g\, (d_k/2)^2\, \pi\, l_b,$$

behelyettesítve

$$F_{fel} = 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot (11{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ m}/2)^2\, \pi \cdot 74 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 7{,}956 \cdot 10^{-2} \text{ N}.$$

$F_{fel} > F_g \quad \rightarrow$ a búvár felfelé kezd gyorsulni,
a gyorsulása

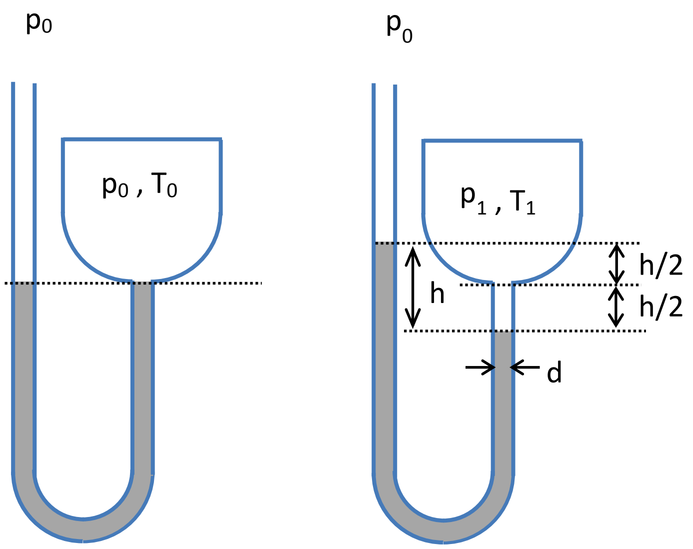
$$a = F_{fel} / m_{búvár} - g = \rho_{víz} (d_k/2)^2\, \pi\, l_b\, g / (m_k + \rho_{víz} (d_b/2)^2\, \pi\, h) - g,$$

behelyettesítve

$$a = 7{,}956 \cdot 10^{-2} \text{ N} / 7{,}357 \cdot 10^{-3} \text{ kg} - 10 \text{ m/s}^2 = 0{,}8139 \text{ m/s}^2.$$

3/4. Egy 250 ml térfogatú műanyag palack aljából U alakú csövet vezetünk ki, amelynek a másik vége nyitott a légkörre, és a csőbe annyi vizet töltünk, hogy a palackhoz csatlakozó részen a vízszint a palack aljáig ér. A cső belső átmérője 5,5 mm. A palackba bezárt levegő nyomása és hőmérséklete kezdetben megegyezik a szobában levő levegőével, $p_0 = 10^5$ Pa, $T_0 = 24$ °C. Kézzel megmelegítve a palackot azt tapasztaljuk, hogy az U alakú cső két szárában levő vízszintek közötti különbség h = 6 cm. Mennyivel lett melegebb a palackban a levegő? Vegyük figyelembe a palackból az U alakú csőbe jutó levegő térfogatát is!

Megoldás



Adatok: d = 5,5 mm = 0,55 cm = $5{,}5\cdot10^{-3}$ m; h = 6 cm = $6\cdot10^{-2}$ m;
V_0 = 250 ml = 250 cm^3 = $2{,}5\cdot10^{-4}$ m^3, $p_0 = 10^5$ Pa, T_0 = 24 °C = 297 K.

Mivel kezdetben a palackba zárt levegő nyomása megegyezett a külső légnyomással, ezért az U alakú cső két szárában a vízoszlop magassága megegyezett.

A melegítés után a bezárt levegő térfogata megnőtt annyival, amennyi levegő a csőbe jutott:

$$\Delta V = A\,(h/2) = (d/2)^2\,\pi\,(h/2) = (0{,}55/2)^2\,\pi\cdot 3 = 0{,}7127\ \text{cm}^3 = 7{,}127\cdot10^{-7}\ \text{m}^3,$$

tehát

$$V_1 = (250 + 0{,}7127)\ \text{cm}^3 = 250{,}7127\ \text{cm}^3 = 2{,}507127\cdot10^{-4}\ \text{m}^3.$$

A bezárt levegő p_1 nyomását a levegőoszlop aljára felírt egyensúlyból tudjuk kiszámolni:

$$p_1 = p_0 + \rho_{víz}\,g\,h = 10^5\ \text{Pa} + 10^3\ \text{kg/m}^3\cdot 10\ \text{m/s}^2\cdot 0{,}06\ \text{m} = 100600\ \text{Pa}.$$

Ez az állapotváltozás nem izobár, mert változott a gáz nyomása, és nem izochor, mert változott a gáz térfogata is. Írjuk fel a gáztörvényt a kiinduló és a végállapotra:

$$p_0 V_0 = nR\,T_0 \quad \text{ill.} \quad p_1 V_1 = nR\,T_1.$$

Mivel n nem változik, ezért most pV/T = konst.
A két egyenlet hányadosából kifejezhetjük a T_1 hőmérsékletet:

$$T_1 = \frac{p_1V_1}{p_0V_0}\,T_0 = \frac{100600\cdot250{,}7127}{100000\cdot250}\cdot297 = 299{,}634\ \text{K}.$$

$\Delta T = T_1 - T_0$ = 299,634 – 297 = 2,634 K = 2,634 °C-kal lett melegebb a levegő a palackban.

3/5. Egy 1 l térfogatú műanyag palackot lezárunk egy lufival, majd először betesszük a hűtőszekrénybe, ahol lehűl +4 °C-ra, utána pedig felmelegítjük 32 °C-ra. Azt látjuk, hogy a lufi ugyanannyival húzódott be a palackba a hűtőszekrényben, mint amennyire felfúvódott a melegítéskor. Izobár állapotváltozást feltételezve számoljuk ki, hogy hány fokos volt kezdetben a palackba zárt levegő!

<u>Megoldás</u>

T_0 ismeretlen;
$T_1 = 4\ °C = 277\ K$;
$T_2 = 32\ °C = 305\ K$;
$V_0 = 1\ l = 1000\ cm^3 = 10^{-3}\ m^3$.
$V_1 = V_0 - \Delta V$;
$V_2 = V_0 + \Delta V$.

Izobár állapotváltozást feltételezve $V / T =$ konst.:

$$V_0 / T_0 = V_1 / T_1 = V_2 / T_2$$

$$\rightarrow\ V_1 = \frac{T_1}{T_0} V_0 \quad \text{és} \quad V_2 = \frac{T_2}{T_0} V_0\ .$$

Adjuk össze a két egyenletet:

$$V_1 + V_2 = \frac{T_1+T_2}{T_0} V_0\ ,$$

ebből

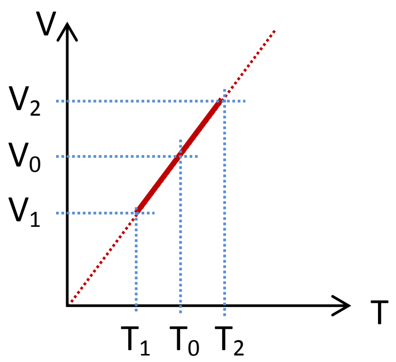
$$T_0 = \frac{V_0}{V_1+V_2}(T_1 + T_2).$$

Mivel a térfogatcsökkenés ugyanakkora volt, mint a térfogatnövekedés, ezért
$V_1 + V_2 = V_0 - \Delta V + V_0 + \Delta V = 2V_0$, ezt beírva

$$T_0 = \frac{T_1+T_2}{2}$$

azt kapjuk, hogy a kezdeti hőmérséklet a két hőmérséklet átlaga.

Ezt beláthatjuk abból is, hogy mivel a V – T diagramon az izobár folyamat egy egyenes, ezért ha a ΔV megegyezett a hűtéskor ill. a melegítéskor, akkor ΔT is meg kellett egyezzen.



Behelyettesítve

$$T_0 = (277+305)/2 = 291\ K = 18\ °C.$$