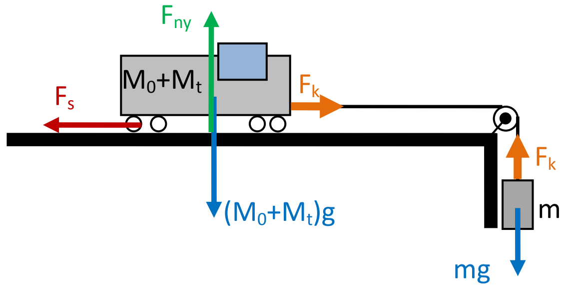
2/1. Számolja ki az előző heti anyagban bemutatott egyik kisvagonos kísérlet alapján a kisvagon átlagos gyorsulását, és abból egy súrlódási együtthatót!
Adatok:
a kisvagon tömege üresen 47,20 g;
a kisvagonba rakott terhelő tömeg 20 g;
a gyorsító tömeg 5 g;
a kisvagon 2,16 s alatt tesz meg 80 cm-t az indulásától számítva.



Megoldás

$M_0 = 47{,}20$ g = 0,04720 kg; $M_t = 20$ g = 0,020 kg;
m = 5 g = 0,005 kg;
$t_1 = 2{,}16$ s; $x(t_1) = 80$ cm = 0,80 m.

Számoljuk ki először a gyorsulást: $x_0 = 0$; $v_0 = 0$

$\rightarrow \quad x(t_1) = ½\, a\, t_1^2 \quad \rightarrow \quad a = 2 \cdot x(t_1) / t_1^2$,

behelyettesítve

$a = 2 \cdot 0{,}8/2{,}16^2 = 0{,}3429\ \mathrm{m/s^2}$.

Írjuk fel a terhelő tömeget tartalmazó kisvagon és a fonál végén lógó gyorsító tömeg mozgásegyenletét:

$(M_0 + M_t)\, a = F_k - F_s$

$m\, a = m\, g - F_k$

F_k a kötélerő nagysága (ismeretlen).
Az F_s súrlódási erő nagysága $F_s = \mu\, F_{ny}$,
és a függőleges erők egyensúlyából tudjuk, hogy $F_{ny} = (M_0+M_t)g$, tehát $F_s = \mu\, (M_0+M_t)g$.
(Pozitív iránynak azt vettük fel, amikor a gyorsító tömeg lefelé gyorsul.)

Tehát

$(M_0 + M_t)\, a = F_k - \mu\, (M_0 + M_t)\, g$

$m\, a = m\, g - F_k$,

a két egyenletet összeadva

$(M_0 + M_t + m)\, a = m\, g - \mu\, (M_0 + M_t)\, g$,

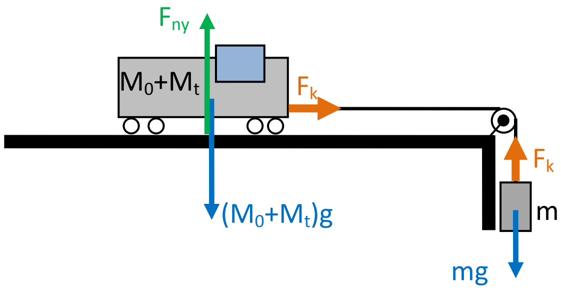
amiből

$$\mu = \frac{m\, g - (M_0 + M_t + m)\, a}{(M_0 + M_t)\, g} .$$

Behelyettesítve

$$\mu = \frac{0{,}005 \cdot 10 - (0{,}04720 + 0{,}020 + 0{,}005) \cdot 0{,}3429}{(0{,}04720 + 0{,}020) \cdot 10} = 0{,}0376 .$$

2/2. Az előző heti anyagban bemutatott kisvagonos kísérleteknél hanyagoljuk el a súrlódást. Számolja ki a kötélerőt két különböző terhelésnél, és adja meg a százalékos eltérésüket!
Adatok:
a kisvagon tömege üresen 47,20 g;
egyik eset: nincs terhelő tömeg a kisvagonban,
másik eset: a kisvagonba rakott terhelő tömeg 100 g;
a gyorsító tömeg 5 g.



Megoldás
M_0 = 47,20 g = 0,04720 kg; m = 5 g = 0,005 kg;
M_{t1} = 0; M_{t2} = 100 g = 0,100 kg.

Írjuk fel a terhelő tömeget tartalmazó kisvagon és a fonál végén lógó gyorsító tömeg mozgásegyenletét: F_k a kötélerő nagysága

$$(M_0 + M_t)\, a = F_k$$
$$m\, a = m\, g - F_k$$

(Pozitív iránynak azt vettük fel, amikor a gyorsító tömeg lefelé gyorsul.)

A két egyenletet összeadva
$$(M_0 + M_t + m)\, a = m\, g$$
kifejezhetjük a gyorsulást:
$$a = m\, g / (M_0 + M_t + m)\ ,$$
és ezt bármelyik egyenletbe visszahelyettesítve megkapjuk a kötélerőt:
$$F_k = \frac{m \cdot (M_0 + M_t)}{M_0 + M_t + m} \cdot g\ .$$

Behelyettesítve
terhelés nélkül: M_{t1} = 0

$$F_{k1} = \frac{0{,}005 \cdot 0{,}04720}{0{,}04720 + 0 + 0{,}005} \cdot 10 = 0{,}04521 \text{ N};$$

terheléssel: M_{t2} = 0,100 kg

$$F_{k2} = \frac{0{,}005 \cdot (0{,}04720 + 0{,}100)}{0{,}04720 + 0{,}100 + 0{,}005} \cdot 10 = 0{,}04836 \text{ N}.$$

A hányadosuk
$$\frac{F_{k2}}{F_{k1}} = \frac{0{,}04836}{0{,}04521} = 1{,}0696\ ,$$
tehát ha van terhelő tömeg a kisvagonban, akkor 6,96%-kal nagyobb a kötélerő.

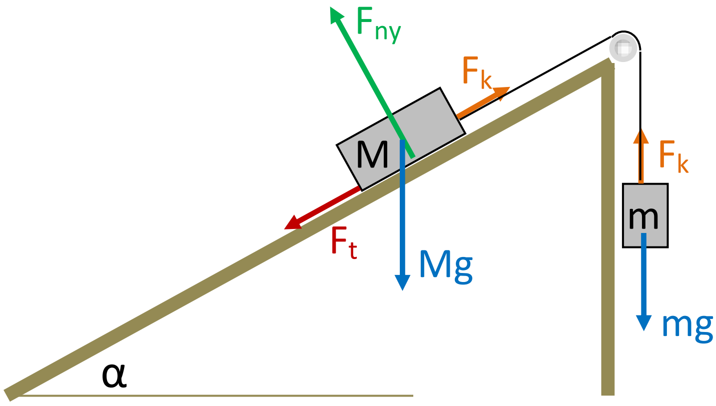
2/3. α hajlásszögű lejtőre M tömegű testet helyezünk, rákötünk egy (elhanyagolható tömegű, nyújthatatlan) fonalat, amit átvetünk a lejtő tetejére rögzített (súrlódásmentes, elhanyagolható tömegű) csigán. Adjuk meg, legalább mekkora tömegű testet kell a függőlegesen lógó fonál végére rögzítenünk, hogy az M tömegű test elkezdjen a lejtőn felfelé gyorsulni!

Adatok:

$\alpha = 32°$;

$M = 85$ g $= 0{,}085$ kg;

az M tömegű test és az asztal között a tapadási súrlódási együttható $\mu_t = 0{,}32$.



Megoldás

Pozitív iránynak vegyük fel azt az irányt, amikor az M tömegű test felfelé gyorsul, a csigán átvetett fonálon levő test pedig lefelé.

A lejtőn levő testre hat a nehézségi erő, amit felbontunk lejtővel párhuzamos és arra merőleges komponensekre: $Mg_{\parallel} = Mg\sin\alpha$ és $Mg_{\perp} = Mg\cos\alpha$.

A lejtőre merőlegesen hat még a lejtő által kifejtett nyomóerő, ami egyensúlyban van a nehézségi erő lejtőre merőleges komponensével $\rightarrow$ $F_{ny} = Mg\cos\alpha$.

A tapadási súrlódási erő nagyságát nem tudjuk, csak azt, hogy maximális értéke

$F_{t,max} = \mu_t F_{ny} = \mu_t Mg\cos\alpha$, azaz $F_t \le \mu_t Mg\cos\alpha$.

A mozgásegyenletek:

$M a = F_k - Mg\sin\alpha - F_t$,

$m a = m g - F_k$.

Mivel az M test tapad, ezért $a = 0$.

A két egyenletet összeadva F_k kiesik, és kifejezhetjük belőle a tapadási súrlódási erőt:

$F_t = m g - Mg\sin\alpha$.

Mivel $F_t \le \mu_t Mg\cos\alpha$, ezért addig marad nyugalomban az M test, amíg

$m g - Mg\sin\alpha \le \mu_t Mg\cos\alpha$

$\rightarrow \quad m \le M (\sin\alpha + \mu_t \cos\alpha)$,

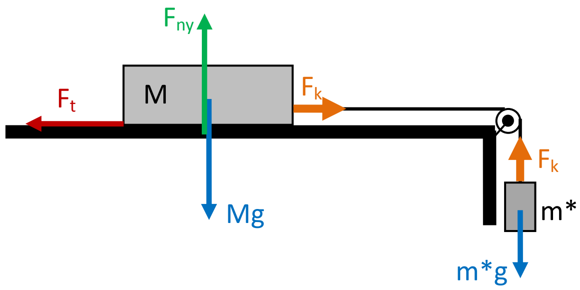
ennél nagyobb m tömeg hatására már gyorsulni kezd.

Tehát

$m_{min} = M (\sin\alpha + \mu_t \cos\alpha) = 0{,}085 \cdot (\sin 32° + 0{,}32 \cdot \cos 32°) = 0{,}06811 \text{ kg} = 68{,}11 \text{ g}$.

2/4. Vízszintes asztallapra M tömegű testet helyezünk, rákötünk egy (elhanyagolható tömegű, nyújthatatlan) fonalat, amit átvetünk az asztal szélére rögzített (súrlódásmentes, elhanyagolható tömegű) csigán. Számoljuk ki az M tömegű test és az asztal között a tapadási súrlódási együttható értékét, ha a függőlegesen lógó fonál végére legalább m* tömegű testet kell rögzítenünk, hogy a testek elkezdjenek gyorsulni!
Adatok:
M = 72 g = 0,072 kg;
m* = 25 g = 0,025 kg.

<u>Megoldás</u>



Az M tömegű test addig marad nyugalomban, amíg a rá ható tapadási súrlódási erő legalább akkora, mint a kötélerő, ami gyorsítani akarja. A tapadási súrlódási erő maximális értéke
$F_{t,max} = \mu_t F_{ny}$. Most a test vízszintes felületen van, ezért $F_{ny} = Mg$, tehát

$$F_t \leq \mu_t Mg \ .$$

Írjuk fel a testek mozgásegyenleteit!
Pozitív iránynak vegyük fel azt az irányt, amikor a csigán átvetett fonálon levő test lefelé gyorsul. F_k a kötélerő.

$$M a = F_k - F_t \ ,$$
$$m a = mg - F_k \ .$$

Mivel az M test tapad, ezért a = 0.
A két egyenletet összeadva F_k kiesik, és kifejezhetjük belőle a tapadási súrlódási erőt:

$$F_t = m g \ .$$

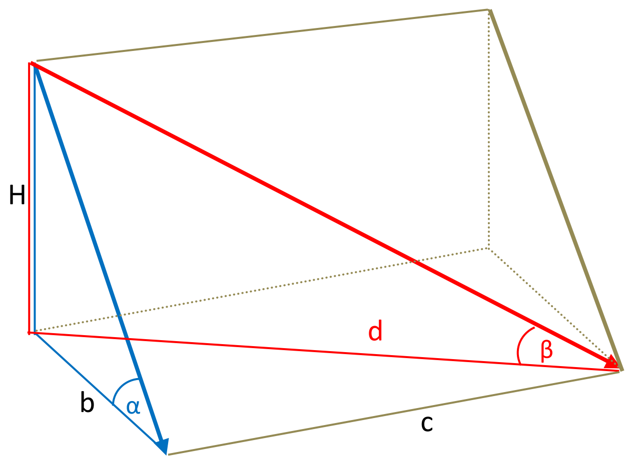
Mivel $F_t \leq \mu_t Mg$, ezért addig marad nyugalomban az M test, amíg

$$m g \leq \mu_t Mg$$
$$\rightarrow \ m / M \leq \mu_t \ .$$

Akkor kezd el csúszni az M test, amikor

$$\mu_t = m^* / M = 0{,}025 / 0{,}072 = 0{,}3472 \ .$$

2/5. A sípálya egy meredek szakaszán Lolka a legmeredekebb pályát választja esésirányban (kék nyíl), Bolka viszont átlósan megy a lejtőn (piros nyíl).
Hány százalékkal kisebb Bolka gyorsulása, mint Lolkáé?
Adatok:
H = 64 m;
b = 120 m;
c = 90 m;
mindkettőjük síléce és a hó közötti csúszási súrlódási együttható $\mu = 0{,}05$.



Megoldás

Felhasználjuk a 2A gyakorlat 1.b) feladatának képletét, miszerint a lejtőn súrlódva lecsúszó test gyorsulása

$a_{le} = g\cdot(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)$.

A két hajlásszöget a két derékszögű háromszög befogóiból tudjuk kiszámolni:

Lolka:

$\mathrm{tg}\alpha = H / b = 64 / 120 = 0{,}5333 \quad\rightarrow\quad \alpha = 28{,}07°$.

Bolka pályájának hajlásszöge abból a derékszögű háromszögből számolható, aminek a vízszintes síkon fekvő befogója $d = \sqrt{b^2+c^2} = \sqrt{120^2+90^2} = 150$ m :

$\mathrm{tg}\beta = H / d = 64 / 150 = 0{,}4267 \quad\rightarrow\quad \beta = 23{,}11°$.

Behelyettesítve a gyorsulások:

$a_{Lolka} = 10 \cdot (\sin 28{,}07° - 0{,}05 \cdot \cos 28{,}07°) = 4{,}265$ m/s^2 ,

$a_{Bolka} = 10 \cdot (\sin 23{,}11° - 0{,}05 \cdot \cos 23{,}11°) = 3{,}464$ m/s^2 .

$a_{Bolka} / a_{Lolka} = 3{,}464 / 4{,}265 = 0{,}8124$.

1 – 0,8124 = 0,1876 = 18,76% -kal kisebb Bolka gyorsulása, mint Lolkáé.