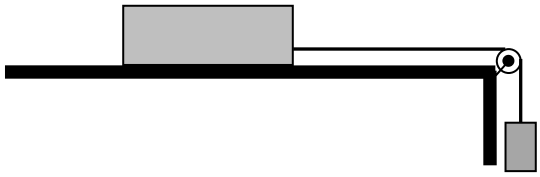
2. TÉMAKÖR: DINAMIKA

2. GYAKORLAT

1. kísérletsorozat: Tapadás vízszintes felületen



1/a) kísérlet:
Vízszintes sík felületen levő m_{gy} = 1,59 g tömegű üres gyufásdobozhoz egy fonalat kötünk, a fonalat átvetjük a felület szélén levő csigán, és a végére egy 1,26 g tömegű üres poharat kötünk.
A gyufásdoboz sima felületen ennek hatására megcsúszik.
Ha a felületre smirglit helyezünk, és ezzel megnöveljük a súrlódási együtthatót, akkor a gyufásdoboz nem csúszik meg (tapad).
Ha a gyufásdobozt megnyomjuk kézzel fentről lefelé, akkor a gyufásdoboz nem csúszik meg.
Ha a gyufásdobozba egy kis súlyt helyezünk, azaz megnöveljük a tömegét (de a lelógó pohár tömege nem változott), akkor a gyufásdoboz nem csúszik meg.

1/b) kísérlet:
Terheljük a gyufásdobozt 20 g tömeggel: M = m_{gy} + 20 g = 21,59 g.
Ezzel a terheléssel a gyufásdoboz a sima felületen tapad, ha a pohár üres.
A pohárba vizet töltünk, addig, amíg a gyufásdoboz el nem kezd csúszni. A pohár és a víz együttes tömege ekkor m = 9,03 g.*
Ebből kiszámolható a gyufásdoboz és a sima felület közötti tapadási súrlódási együttható értéke. A számoláshoz szükséges képlet a **2/4. házi feladat**ban van levezetve:

$\mu_t = m^* / M$.

Behelyettesítve $\mu_{t,\,sima} = 9{,}03 / 21{,}59 = 0{,}4182$.

1/c) kísérlet:
Megismételjük az 1/b) kísérletet a felületre P120-as smirglit helyezve.
Ekkor több vizet kell tölteni a pohárba ahhoz, hogy a 20 g tömeggel terhelt gyufásdoboz csúszni kezdjen. A tapadás megszűnésekor a pohár és a víz tömege m_2^* = 21,66 g.
Ebből kiszámolható a gyufásdoboz és a P120-as smirgli felülete közötti tapadási súrlódási együttható értéke:

$\mu_{t,\,P120} = m_2^* / M = 21{,}66 / 21{,}59 = 1{,}003$.

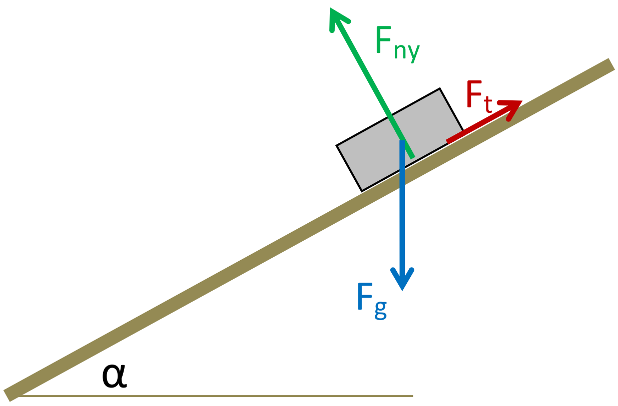
(A P80-as smirgli esetén 1,320.)

1/d) kísérlet:
20 g tömeggel terhelt gyufásdobozt helyezünk P120-as smirglire, és a pohár víz tömegét csökkentjük ahhoz képest, mint ami már megindította a gyufásdobozt (a kísérletben 21,66 g helyett csak 19,67 g). Ekkora tömeg esetén a kötélerő kisebb, mint a tapadási súrlódási erő maximuma, ezért a doboz magától nem kezd gyorsulni – de ha meglökjük egy kicsit, akkor csúszik, mert a csúszási súrlódási együttható kisebb, mint a tapadási súrlódási együttható.

2. kísérletsorozat: Súrlódás lejtőn

2B/1. feladat: értékeljük ki a következő kísérletet:
2/a) kísérlet: Állítható hajlásszögű lejtőn növeljük a hajlásszöget. Megmérjük, milyen szögnél csúszik meg a lejtőre helyezett test.
Számoljuk ki ebből a tapadási súrlódási együttható értékét!
Adatok: a tapadás határszöge $\alpha_h = 21°$.

<ins>Megoldás</ins>
A testre ható erők:



az F_g nehézségi erő
függőlegesen lefelé,
nagysága mg,
a lejtővel párhuzamos komponense mgsinα,
a lejtőre merőleges komponense mgcosα;
a lejtő által a testre kifejtett F_{ny} nyomóerő,
iránya merőleges a lejtőre,
nagysága akkora, hogy a test a felületen legyen;
az F_t tapadási súrlódási erő,
iránya azzal ellentétes irányba mutat, mint amerre a tapadási súrlódási erő nélkül a test elkezdene gyorsulni – tehát jelen esetben a lejtővel párhuzamosan felfelé, nagysága akkora, hogy a test nyugalomban maradjon, de maximum $\mu_t F_{ny}$.

A mozgásegyenlet felületre merőleges komponensének zérusnak kell lenni:
$F_{ny} - mg\cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad F_{ny} = mg\cos\alpha$.
A mozgásegyenlet felülettel párhuzamos komponense (lefelé pozitív):
$ma = mg\sin\alpha - F_t$.

A test addig tapad, amíg a = 0.
Ahogy növeljük a lejtő hajlásszögét, sinα értéke nő, és F_t értéke is nő, amíg el nem éri az adott szöghöz tartozó határértéket. Ekkor
$F_t = mg\sin\alpha$.
Másrészt az erőtörvényből tudjuk, hogy $F_t \le F_{t,max} = \mu_t F_{ny}$; ezekből tehát
$mg\sin\alpha \le \mu_t\, mg\cos\alpha$
$\rightarrow$ a test addig tapad, amíg $\operatorname{tg}\alpha \le \mu_t$.

A tapadás hatásszögéből kiszámolható a tapadási súrlódási együttható értéke:
$\mu_t = \operatorname{tg}\alpha_h = \operatorname{tg}21° = 0{,}3839$.
(A vízszintes felületen végzett kísérletnél kiszámolt érték $\mu_t = 0{,}4182$ volt, ez 8%-os eltérés.)

2/b) kísérlet: Állandó hajlásszögű lejtőn gyorsulva csúszik le egy test. Megmérjük, mennyi idő alatt tesz meg egy adott távolságot.

Számoljuk ki test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható értékét!

Adatok: $\alpha = 28°$; L = 0,5 m távolságot t* = 0,667 s idő alatt tett meg; a felület sima.

Számolás:

A gyorsulás kiszámolható a távolságból és az időből, mivel $L = \frac{1}{2} at^2$ $\rightarrow$

$a_{le} = 2L / t^{*2} = 2 \cdot 0{,}5/0{,}667^2 = 2{,}248\ m/s^2$.

A **2A/1.b)** feladatban levezettük, hogy lejtőn lefelé csúszó test gyorsulása

$a_{le} = g\ (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

Ebből kifejezhető a csúszási súrlódási együttható:

$\mu = \frac{g \sin\alpha - a_{le}}{g \cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha - \frac{a_{le}}{g \cos\alpha} = \mathrm{tg}28° - 2{,}248/(10 \cdot \cos28°) = 0{,}2771$.

A tapadási súrlódási együttható értékét 0,4182-nek, ill. 0,3839-nek számoltuk; látható, hogy a csúszási súrlódási együttható értéke kisebb.

2B/2. feladat: értékeljük ki a következő kísérletet:

2/c) kísérlet: Állandó hajlásszögű lejtőre helyezünk egy M tömegű testet, amire egy fonalat kötünk, a fonalat átvetjük a lejtő tetején levő csigán, és a függőlegesen lógó fonál végére egy m tömegű üres poharat kötünk. Az M tömegű test a lejtőn lefelé gyorsulva csúszni kezd.

Számoljuk ki, mennyi idő alatt tesz meg L távolságot a lejtőn a nyugalmi helyzetből lecsúszó test a csúszási súrlódást is figyelembe véve!

Adatok: $M = m_{gy} + 20\ g = 21{,}59\ g = 21{,}59 \cdot 10^{-3}$ kg; $m = 1{,}26\ g = 1{,}26 \cdot 10^{-3}$ kg; $\alpha = 28°$;

a csúszási súrlódási együttható értéke az előző feladatból $\mu = 0{,}2771$;

a jól mérhető szakasz hossza L = 0,485 m.

<u>Megoldás</u>

A testre ható erők:

az F_g nehézségi erő függőlegesen lefelé, nagysága Mg,

a lejtővel párhuzamos komponense $Mg\sin\alpha$,

a lejtőre merőleges komponense $Mg\cos\alpha$;

a lejtő által a testre kifejtett F_{ny} nyomóerő,

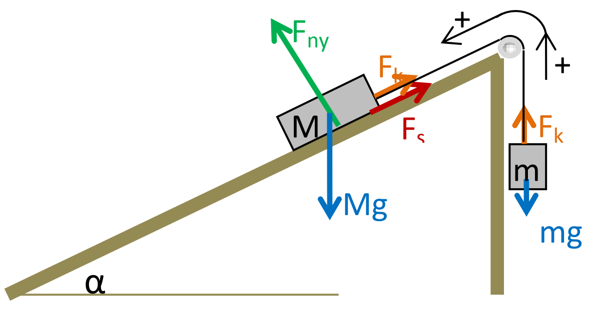
iránya merőleges a lejtőre,

nagysága akkora, hogy a test a felületen legyen;

az F_s csúszási súrlódási erő,

iránya a sebességgel ellentétes irányba mutat,

nagysága $F_s = \mu F_{ny}$.



A pozitív irányt most úgy vesszük fel, hogy tudjuk, hogy a test a lejtőn lefelé fog csúszni, ezért a lejtő síkjában lefelé mutató irányt választjuk pozitívnak. A fonál végén lógó test ebben az esetben felfelé fog gyorsulni, ezért az m tömegű testnél a függőlegesen felfelé mutató irány a pozitív.

A lejtőn levő testre felírt mozgásegyenlet

felületre merőleges komponensének zérusnak kell lennie:

$F_{ny} - Mg\cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad F_{ny} = Mg\cos\alpha$

$\rightarrow$ a csúszási súrlódási erő $F_s = \mu F_{ny} = \mu Mg\cos\alpha$;

és a felülettel párhuzamos komponense (lefelé pozitív):

$Ma = Mg\sin\alpha - F_s - F_k = Mg\sin\alpha - \mu Mg\cos\alpha - F_k$.

A fonál másik végén lógó test mozgásegyenlete

$m a = F_k - mg$.

A két egyenletet összeadva kifejezhető a gyorsulás:

$$a = \frac{Mg\sin\alpha - mg - \mu Mg\cos\alpha}{M + m} = \frac{M(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m}{M + m} g \ ,$$

behelyettesítve

$$a = \frac{21{,}59\cdot10^{-3}\cdot(\sin 28 - 0{,}2771\cdot\cos 28) - 1{,}26\cdot10^{-3}}{21{,}59\cdot10^{-3} + 1{,}26\cdot10^{-3}}\cdot 10 = 1{,}573 \text{ m/s}^2.$$

A test nyugalmi helyzetből indul ekkora gyorsulással, tehát

$L = ½\, a\, t^{*2} \quad \rightarrow \quad t^* = \ = \ = 0{,}7853$ s.

A kísérlet szerint a test 1,834 s alatt teszi meg ezt a távolságot. Ebből visszafelé számolva a csúszási súrlódási együttható értéke 0,431-nek adódna 0,277 helyett. Az eltérés azzal magyarázható, hogy a számolásban azt tételeztük fel, hogy a csiga ideális, azaz nem súrlódik rajta a fonál, de a számításunk alapján látjuk, hogy ez nem volt helyes feltételezés.

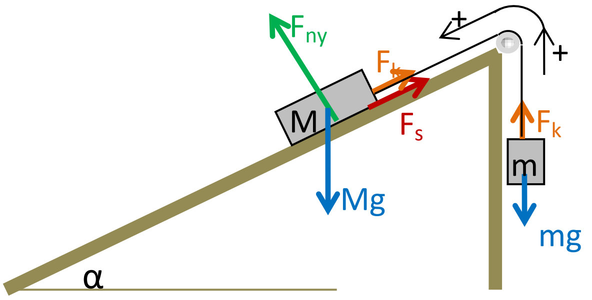
2/d) kísérlet: Állandó hajlásszögű lejtőre helyezünk egy M tömegű testet, amire egy fonalat kötünk, a fonalat átvetjük a lejtő tetején levő csigán, és a függőlegesen lógó fonál végén levő m tömegű pohárba egyre nagyobb tömeget helyezünk.

Megfigyelés:

A fonál végén levő tömeg növelésével a lejtőn levő test először még megindul lefelé a lejtőn, a gyorsulása

$$a = \frac{M(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m}{M + m} g$$

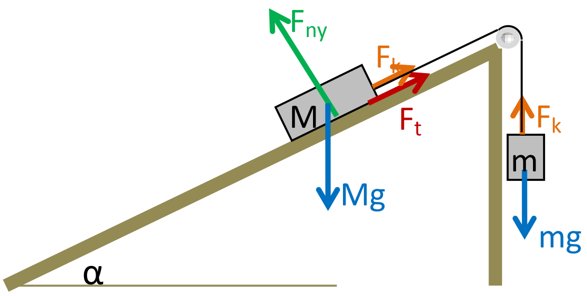
egyre kisebb lesz, ahogy az m tömeg nő.



és a kötélerő is egyre kisebb lesz.

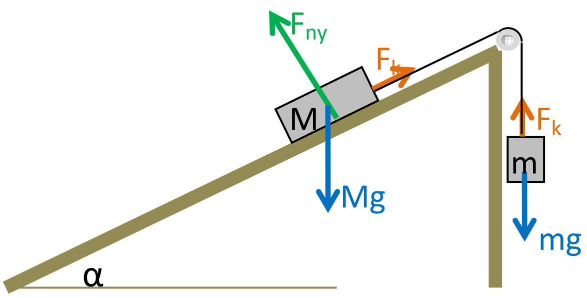
A kötélerő itt nem egyenlő mg -vel, mivel az m tömegű testet az F_k – mg nagyságú erő gyorsítja. F_k nagyságát most nem fejezzük ki. (Kifejezhető, ha az előző feladatban a gyorsulást visszahelyettesítjük bármelyik test mozgásegyenletébe.)

Amikor a kötélerő eléri a tapadási súrlódási erő maximális értékét ($F_{t,max} = \mu_t F_{ny} = \mu_t Mg\cos\alpha$), akkor a test a tapadási súrlódási erő miatt nem indul meg. Ilyenkor $a = 0 \rightarrow F_k = mg$.

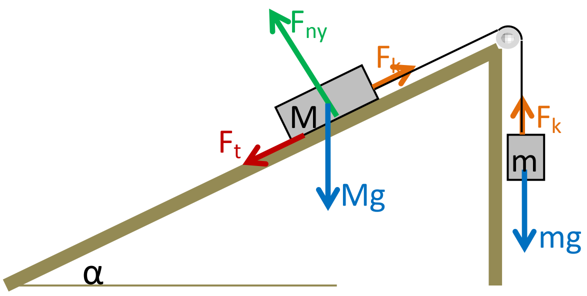


Először a tapadási súrlódási erő iránya ugyanúgy felfelé mutat, mint a csúszási súrlódási erő iránya mutatott, mert súrlódás nélkül a test lefelé gyorsulna a lejtőn, mivel $Mg\sin\alpha > F_k$.
A tapadási súrlódási erő nagysága $F_t = Mg\sin\alpha - F_k = Mg\sin\alpha - mg$.

Ahogy az m tömeget növeljük, nő a kötélerő is $\rightarrow$ F_t nagysága csökken.

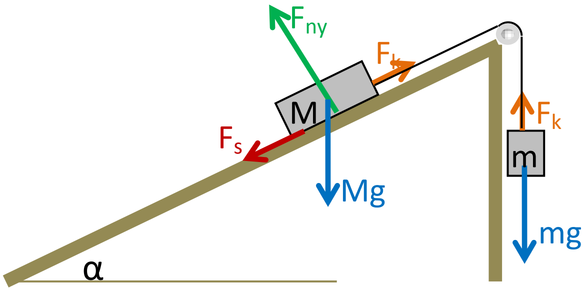


Van egy m* tömeg, amikor $Mg\sin\alpha = m^*g$ $\rightarrow$ ilyenkor $F_t = 0$.



Ha $mg > Mg\sin\alpha$, akkor a test felfelé gyorsulna a lejtőn, ezért a tapadási súrlódási erő lefelé mutat, és a nagysága $F_t = F_k - Mg\sin\alpha = mg - Mg\sin\alpha$.
A test mindaddig tapad, amíg $F_t \leq F_{t,max} = \mu_t F_{ny} = \mu_t Mg\cos\alpha$,
vagyis $m \leq M(\sin\alpha + \mu_t M\cos\alpha)$.

Az m tömeget tovább növelve a lejtőn levő test felfelé kezd gyorsulni, és újra csúszási súrlódási erő lép fel a test és a lejtő között ($F_s = \mu\ Mg\cos\alpha$).



STATIKA

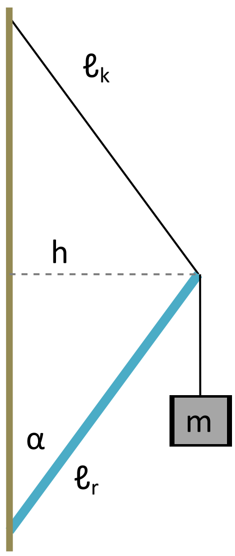
A test, ill. a több testből álló összetett rendszer nyugalomban van, nem kezd gyorsulni (**a** = 0), ha minden egyes összetevőjére a rá ható erők vektori eredője zérus: $\Sigma\ \mathbf{F}_i = 0$.

A rendszerben kényszererők léphetnek fel:
- nyomóerő: a felületre merőleges;
- kötélerő: kötél irányú húzó erő;
- rúderő: rúd irányú erő, ami lehet húzó vagy nyomó erő is.

3. kísérletsorozat: Statika

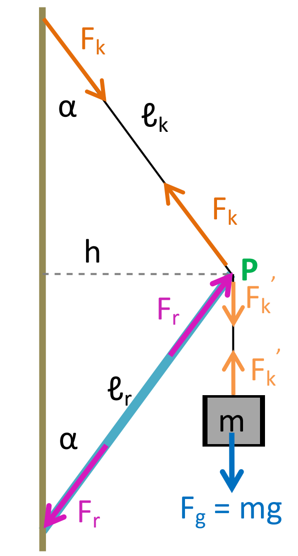
2B/3. feladat: értékeljük ki a következő kísérletet:
3/a) Az ábra szerinti elrendezésben egy m tömegű testet úgy rögzítettünk egy függőleges lapra, hogy felülről egy kötél tartja, és alulról egy rúd támasztja meg.
Számoljuk ki, mekkora erő lép fel a kötélben, ill. a rúdban!

Adatok: m = 100 g = 0,1 kg;
a kötél és a rúd hossza megegyezik: $\ell_k = \ell_r = 21$ cm;
a felfüggesztési pont h = 12,5 cm távol van a függőleges laptól.



Megoldás

Jelöljük P-vel a kötél és a rúd találkozási pontját, ahová az m tömeg egy kis fonáldarab közvetítésével rögzítve van.



A rendszerben ható erők:

$F_g = mg$ nehézségi erő;

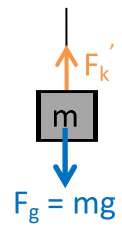
F_k kötélerő: a P pontra húzó erőt fejt ki;

F_r rúderő: vegyük fel úgy, hogy a P pontra nyomó erőt fejt ki;

a kis fonáldarabban F_k' erő lép fel, ami az m tömeget felfelé, a P pontot lefelé húzza.

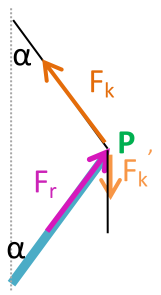
Az m tömegű testre hat az $F_g = mg$ nehézségi erő és a függőleges fonál által kifejtett F_k' fonálerő, és a kettő eredője zérus:

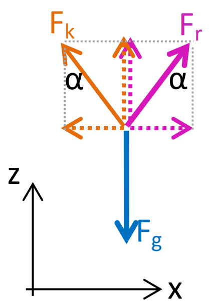
$F_k' - mg = 0 \quad \rightarrow \quad F_k' = mg.$



A függőleges fonáldarab tehát $F_k' = mg$ nagyságú erővel hat a P pontra lefelé, vagyis számolhatunk úgy, mintha az m tömeg közvetlenül a P pontban lenne.

Vizsgáljuk a P pont egyensúlyát:





A 3 erő vektori eredője zérus: $\mathbf{F_k} + \mathbf{F_r} + \mathbf{F_g} = \mathbf{0}$.

Bontsuk vízszintes és függőleges komponensekre:

az ábrán jelölt irányoknak megfelelően

az x komponens:

$-F_k \sin\alpha + F_r \sin\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad F_k \sin\alpha = F_r \sin\alpha$

$\rightarrow \quad F_k = F_r$, a két erő nagysága egyenlő;

a z komponens:

$F_k \cos\alpha + F_r \cos\alpha - mg = 0.$

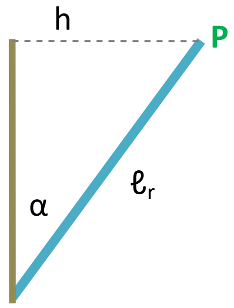
$F_k = F_r$ felhasználásával

$2 F_k \cos\alpha = mg \quad \rightarrow \quad F_k = \frac{mg}{2 \cos\alpha}$.

Számolás:

$\sin\alpha = h / \ell_r = 12{,}5\text{ cm} / 21\text{ cm} = 0{,}5952 \rightarrow \alpha = 36{,}53°$.

$F_k = \frac{mg}{2\cos\alpha} = \frac{0{,}1\cdot 10}{2\cdot\cos 36{,}53} = 0{,}6222\text{ N}$.



$F_k = 0{,}6222$ N húzó erő;

$F_r = 0{,}6222$ N nyomó erő.

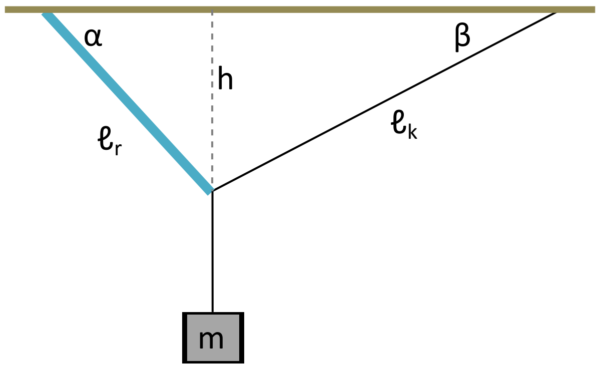
A rúdnak tényleg nyomnia kell a P pontot.

3/b) kísérlet: Ha fejjel lefelé fordítjuk az előző elrendezést és alulra kerül a kötél, akkor a kötél nem tudja megtartani az m tömeget, mivel nem tud nyomó erőt kifejteni.

2B/4. feladat: értékeljük ki a következő kísérletet:

3/c) Az ábra szerinti elrendezésben egy m tömegű testet rögzítettünk egy vízszintes lapra egy kötél és egy rúd segítségével.

Számoljuk ki, mekkora erő lép fel a kötélben, ill. a rúdban!



Adatok: $m = 100\text{ g} = 0{,}1\text{ kg}$;

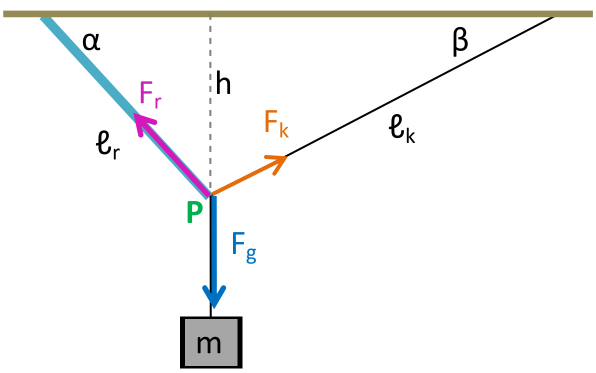
a rúd hossza: $\ell_r = 16$ cm;

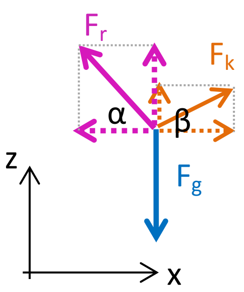
a kötél hossza: $\ell_k = 26$ cm;

a felfüggesztési pont $h = 12$ cm távol van a vízszintes laptól.

<u>Megoldás</u>

Az előző feladat gondolatmenetét felhasználva vizsgáljuk a P pont egyensúlyát:





A 3 erő vektori eredője zérus: $\mathbf{F_k} + \mathbf{F_r} + \mathbf{F_g} = \mathbf{0}$.

Bontsuk vízszintes és függőleges komponensekre!
Az ábrán jelölt irányoknak megfelelően

az x komponens:

$F_k \cos\beta - F_r \cos\alpha = 0$;

a z komponens:

$F_k \sin\beta + F_r \sin\alpha - mg = 0$.

Az x komponensből fejezzük ki F_r-t:

$F_r = F_k \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$,

és írjuk be a z komponensbe:

$F_k (\sin\beta + F_k \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \sin\alpha) - mg = 0 \quad \rightarrow$

$F_k = \frac{mg}{\sin\beta + \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\sin\alpha}$.

Számolás:
$\sin\alpha = h / \ell_r = 12 / 16 = 0{,}75 \quad \rightarrow \ \alpha = 48{,}59°$,
$\sin\beta = h / \ell_k = 12 / 26 = 0{,}4615 \ \rightarrow \ \beta = 27{,}49°$.
$F_k = \frac{0{,}1\cdot 10}{\sin 27{,}49 + \frac{\cos 27{,}49}{\cos 48{,}59}\cdot \sin 48{,}59} = 0{,}6815$ N a kötélerő nagysága, és

$F_r = F_k \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 0{,}6815 \cdot \frac{\cos 27{,}49}{\cos 48{,}59} = 0{,}9139$ N a rugóerő nagysága.

Mindkét erő húzó erő.

Ezekben a vizsgált elrendezésekben könnyen látható, hogy a rúd milyen irányú erőt kellett kifejtsen (az első elrendezésben nyomó erőt, a másodikban húzó erőt), de ha nem egyértelmű, akkor induláskor felveszünk egy tetszőleges irányt, és a számolás után az előjelből látjuk, hogy helyes volt-e a feltételezésünk. Ha negatív előjelű erőt kapunk végeredményül, akkor meg kell változtatni az eredetileg felvett erő irányát. (Kötél esetében természetesen csak húzó erő léphet fel.)

Gyakorló feladatok

Példatár
<u>Lejtő</u>: 365., 367., 369., 370., 371., 373., 374., 375., 378., 400.
<u>Pontrendszerek</u>: 379., 384., 386.
<u>Statika</u>: 255., 256., 257., 262., 263., 265., 266., 267. , 268., 372.

A **2B/2.** feladat mintájára: Állandó hajlásszögű lejtőre helyezünk egy M tömegű testet, amire egy fonalat kötünk, a fonalat átvetjük a lejtő tetején levő csigán, és a függőlegesen lógó fonál végére egy m* tömeget rögzítünk. Az M tömegű test a lejtőn felfelé gyorsulva csúszni kezd.
Számoljuk ki, mennyi idő alatt tesz meg L távolságot a lejtőn a nyugalmi helyzetből felfelé csúszó test a csúszási súrlódást is figyelembe véve!
Adatok: M = 21,59 g; m = 31,26 g; α = 28°; μ = 0,2771; L = 0,485 m.