**2. TÉMAKÖR: DINAMIKA**

2. GYAKORLAT

**1. kísérletsorozat: Tapadás vízszintes felületen**

*1/a) kísérlet:*

*Vízszintes sík felületen levő mgy = 1,59 g tömegű üres gyufásdobozhoz egy fonalat kötünk, a fonalat átvetjük a felület szélén levő csigán, és a végére egy 1,26 g tömegű üres poharat kötünk.*

*A gyufásdoboz sima felületen ennek hatására megcsúszik.*

*Ha a felületre smirglit helyezünk, és ezzel megnöveljük a súrlódási együtthatót, akkor a gyufásdoboz nem csúszik meg (tapad).*

*Ha a gyufásdobozt megnyomjuk kézzel fentről lefelé, akkor a gyufásdoboz nem csúszik meg.*

*Ha a gyufásdobozba egy kis súlyt helyezünk, azaz megnöveljük a tömegét (de a lelógó pohár tömege nem változott), akkor a gyufásdoboz nem csúszik meg.*

*1/b) kísérlet:*

*Terheljük a gyufásdobozt 20 g tömeggel: M = mgy + 20 g = 21,59 g.*

*Ezzel a terheléssel a gyufásdoboz a sima felületen tapad, ha a pohár üres.*

*A pohárba vizet töltünk, addig, amíg a gyufásdoboz el nem kezd csúszni. A pohár és a víz együttes tömege ekkor m\* = 9,03 g.*

Ebből kiszámolható a gyufásdoboz és a sima felület közötti tapadási súrlódási együttható értéke. A számoláshoz szükséges képlet a **2/4. házi feladat**ban van levezetve:

t = m\* / M .

Behelyettesítve μt, sima = 9,03 / 21,59 = 0,4182.

*1/c) kísérlet:*

*Megismételjük az 1/b) kísérletet a felületre P120-as smirglit helyezve.*

*Ekkor több vizet kell tölteni a pohárba ahhoz, hogy a 20 g tömeggel terhelt gyufásdoboz csúszni kezdjen. A tapadás megszűnésekor a pohár és a víz tömege m2\* = 21,66 g.*

Ebből kiszámolható a gyufásdoboz és a P120-as smirgli felülete közötti tapadási súrlódási együttható értéke:

t, P120 = m2\* / M = 21,66 / 21,59 = 1,003.

(A P80-as smirgli esetén 1,320.)

*1/d) kísérlet:*

*20 g tömeggel terhelt gyufásdobozt helyezünk P120-as smirglire, és a pohár víz tömegét csökkentjük ahhoz képest, mint ami már megindította a gyufásdobozt (a kísérletben 21,66 g helyett csak 19,67 g). Ekkora tömeg esetén a kötélerő kisebb, mint a tapadási súrlódási erő maximuma, ezért a doboz magától nem kezd gyorsulni – de ha meglökjük egy kicsit, akkor csúszik, mert a csúszási súrlódási együttható kisebb, mint a tapadási súrlódási együttható.*

**2. kísérletsorozat: Súrlódás lejtőn**

**2B/1.** feladat: értékeljük ki a következő kísérletet:

*2/a) kísérlet: Állítható hajlásszögű lejtőn növeljük a hajlásszöget. Megmérjük, milyen szögnél csúszik meg a lejtőre helyezett test.*

Számoljuk ki ebből a tapadási súrlódási együttható értékét!

Adatok: a tapadás határszöge αh = 21.

Megoldás

A testre ható erők:

Ft

Fg

Fny

α

az Fg nehézségi erő

függőlegesen lefelé,

nagysága mg,

a lejtővel párhuzamos komponense mgsinα,

a lejtőre merőleges komponense mgcosα;

a lejtő által a testre kifejtett Fny nyomóerő,

iránya merőleges a lejtőre,

nagysága akkora, hogy a test a felületen legyen;

az Ft tapadási súrlódási erő,

iránya azzal ellentétes irányba mutat, mint amerre a tapadási súrlódási erő nélkül a test elkezdene gyorsulni – tehát jelen esetben a lejtővel párhuzamosan felfelé, nagysága akkora, hogy a test nyugalomban maradjon, de maximum t Fny.

A mozgásegyenlet felületre merőleges komponensének zérusnak kell lenni:

 Fny – mgcosα = 0  Fny = mgcosα .

A mozgásegyenlet felülettel párhuzamos komponense (lefelé pozitív):

 ma = mgsinα – Ft .

A test addig tapad, amíg a = 0.

Ahogy növeljük a lejtő hajlásszögét, sinα értéke nő, és Ft értéke is nő, amíg el nem éri az adott szöghöz tartozó határértéket. Ekkor

 Ft = mgsinα.

Másrészt az erőtörvényből tudjuk, hogy Ft ≤ Ft,max = t Fny ; ezekből tehát

 mgsinα ≤ t mgcosα

 a test addig tapad, amíg tgα ≤ t .

A tapadás hatásszögéből kiszámolható a tapadási súrlódási együttható értéke:

 t = tgαh = tg21° = 0,3839.

(A vízszintes felületen végzett kísérletnél kiszámolt érték μt = 0,4182 volt, ez 8%-os eltérés.)

*2/b) kísérlet: Állandó hajlásszögű lejtőn gyorsulva csúszik le egy test. Megmérjük, mennyi idő alatt tesz meg egy adott távolságot.*

Számoljuk ki test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható értékét!

Adatok: α = 28; L = 0,5 m távolságot t\* = 0,667 s idő alatt tett meg; a felület sima.

Számolás:

A gyorsulás kiszámolható a távolságból és az időből, mivel L = ½ at2 

ale = 2L / t\*2 = 2∙0,5/0,6672 = 2,248 m/s2.

A **2A/1.b)** feladatban levezettük, hogy lejtőn lefelé csúszó test gyorsulása

ale = g (sinα – μcosα).

Ebből kifejezhető a csúszási súrlódási együttható:

μ = $\frac{g sinα – a\_{le}}{g cosα}$ = tgα – $\frac{a\_{le}}{g cosα}$ = tg28 – 2,248/(10∙cos28) = 0,2771.

A tapadási súrlódási együttható értékét 0,4182-nek, ill. 0,3839-nek számoltuk; látható, hogy a csúszási súrlódási együttható értéke kisebb.

**2B/2.** feladat: értékeljük ki a következő kísérletet:

*2/c) kísérlet: Állandó hajlásszögű lejtőre helyezünk egy M tömegű testet, amire egy fonalat kötünk, a fonalat átvetjük a lejtő tetején levő csigán, és a függőlegesen lógó fonál végére egy m tömegű üres poharat kötünk. Az M tömegű test a lejtőn lefelé gyorsulva csúszni kezd.*

Számoljuk ki, mennyi idő alatt tesz meg L távolságot a lejtőn a nyugalmi helyzetből lecsúszó test a csúszási súrlódást is figyelembe véve!

Adatok: M = mgy + 20 g = 21,59 g = 21,59∙10–3 kg; m = 1,26 g = 1,26∙10–3 kg; α = 28 ;

a csúszási súrlódási együttható értéke az előző feladatból μ = 0,2771;

a jól mérhető szakasz hossza L = 0,485 m.



Megoldás

Fs

Mg

Fny

α

Fk

Fk

M

m

mg

+

+

A testre ható erők:

az Fg nehézségi erő függőlegesen lefelé, nagysága Mg,

a lejtővel párhuzamos komponense Mgsinα,

a lejtőre merőleges komponense Mgcosα;

a lejtő által a testre kifejtett Fny nyomóerő,

iránya merőleges a lejtőre,

nagysága akkora, hogy a test a felületen legyen;

az Fs csúszási súrlódási erő,

iránya a sebességgel ellentétes irányba mutat,

nagysága Fs =  Fny.

A pozitív irányt most úgy vesszük fel, hogy tudjuk, hogy a test a lejtőn lefelé fog csúszni, ezért a lejtő síkjában lefelé mutató irányt választjuk pozitívnak. A fonál végén lógó test ebben az esetben felfelé fog gyorsulni, ezért az m tömegű testnél a függőlegesen felfelé mutató irány a pozitív.

A lejtőn levő testre felírt mozgásegyenlet

felületre merőleges komponensének zérusnak kell lennie:

 Fny – Mgcosα = 0  Fny = Mgcosα

 a csúszási súrlódási erő Fs = μ Fny = μ Mgcosα;

és a felülettel párhuzamos komponense (lefelé pozitív):

 Ma = Mgsinα – Fs – Fk = Mgsinα – μ Mgcosα – Fk .

A fonál másik végén lógó test mozgásegyenlete

 m a = Fk – mg .

A két egyenletet összeadva kifejezhető a gyorsulás:

a = $\frac{Mgsinα – mg – μ Mgcosα}{M + m}$ = $\frac{M(sinα – μcosα) – m}{M + m}$g ,

behelyettesítve

a = $\frac{21,59∙10^{–3}∙(sin28– 0,2771∙cos28) – 1,26∙10^{–3}}{21,59∙10^{–3} + 1,26∙10^{–3}}$∙10 = 1,573 m/s2.

A test nyugalmi helyzetből indul ekkora gyorsulással, tehát

 L = ½ a t\*2  t\* = = = 0,7853 s.

A kísérlet szerint a test 1,834 s alatt teszi meg ezt a távolságot. Ebből visszafelé számolva a csúszási súrlódási együttható értéke 0,431-nek adódna 0,277 helyett. Az eltérés azzal magyarázható, hogy a számolásban azt tételeztük fel, hogy a csiga ideális, azaz nem súrlódik rajta a fonál, de a számításunk alapján látjuk, hogy ez nem volt helyes feltételezés.

*2/d) kísérlet: Állandó hajlásszögű lejtőre helyezünk egy M tömegű testet, amire egy fonalat kötünk, a fonalat átvetjük a lejtő tetején levő csigán, és a függőlegesen lógó fonál végén levő m tömegű pohárba egyre nagyobb tömeget helyezünk.*

Megfigyelés:

A fonál végén levő tömeg növelésével a lejtőn levő test először még megindul lefelé a lejtőn, a gyorsulása

a = $\frac{M(sinα – μcosα) – m}{M + m}$g

egyre kisebb lesz, ahogy az m tömeg nő.

Fs

Mg

Fny

α

Fk

Fk

M

m

mg

+

+

és a kötélerő is egyre kisebb lesz.

A kötélerő itt nem egyenlő mg -vel, mivel az m tömegű testet az Fk – mg nagyságú erő gyorsítja.
Fk nagyságát most nem fejezzük ki. (Kifejezhető, ha az előző feladatban a gyorsulást visszahelyettesítjük bármelyik test mozgásegyenletébe.)

Amikor a kötélerő eléri a tapadási súrlódási erő maximális értékét (Ft,max = μt Fny = μt Mgcosα), akkor a test a tapadási súrlódási erő miatt nem indul meg. Ilyenkor a = 0  Fk = mg.

Ft

Mg

Fny

α

Fk

Fk

M

m

mg

Először a tapadási súrlódási erő iránya ugyanúgy felfelé mutat, mint a csúszási súrlódási erő iránya mutatott, mert súrlódás nélkül a test lefelé gyorsulna a lejtőn, mivel Mgsinα > Fk .

A tapadási súrlódási erő nagysága Ft = Mgsinα – Fk = Mgsinα – mg.

Ahogy az m tömeget növeljük, nő a kötélerő is  Ft nagysága csökken.

Mg

Fny

α

Fk

Fk

M

m

mg

Van egy m\* tömeg, amikor Mgsinα = m\*g  ilyenkor Ft = 0.

Ft

Mg

Fny

α

Fk

Fk

M

m

mg

Ha mg > Mgsinα , akkor a test felfelé gyorsulna a lejtőn, ezért a tapadási súrlódási erő lefelé mutat, és a nagysága Ft = Fk – Mgsinα = mg – Mgsinα.

A test mindaddig tapad, amíg Ft ≤ Ft,max = μt Fny = μt Mgcosα,

vagyis m ≤ M(sinα+μt Mcosα).

Az m tömeget tovább növelve a lejtőn levő test felfelé kezd gyorsulni, és újra csúszási súrlódási erő lép fel a test és a lejtő között (Fs = μ Mgcosα).

Fs

Mg

Fny

α

Fk

Fk

M

m

mg

**STATIKA**

A test, ill. a több testből álló összetett rendszer nyugalomban van, nem kezd gyorsulni (**a** = 0), ha minden egyes összetevőjére a rá ható erők vektori eredője zérus: Σ **Fi** = 0.

A rendszerben kényszererők léphetnek fel:

* nyomóerő: a felületre merőleges;
* kötélerő: kötél irányú húzó erő;
* rúderő: rúd irányú erő, ami lehet húzó vagy nyomó erő is.

**3. kísérletsorozat: Statika**

ℓk

ℓr

h

α

m

**2B/3.** feladat: értékeljük ki a következő kísérletet:

*3/a) Az ábra szerinti elrendezésben egy m tömegű testet úgy rögzítettünk egy függőleges lapra, hogy felülről egy kötél tartja, és alulról egy rúd támasztja meg.*

Számoljuk ki, mekkora erő lép fel a kötélben, ill. a rúdban!

Adatok: m = 100 g = 0,1 kg;

a kötél és a rúd hossza megegyezik: ℓk = ℓr = 21 cm;

a felfüggesztési pont h = 12,5 cm távol van a függőleges laptól.

Megoldás

Jelöljük P-vel a kötél és a rúd találkozási pontját, ahová az m tömeg egy kis fonáldarab közvetítésével rögzítve van.

A rendszerben ható erők:

ℓk

ℓr

h

α

m

Fg = mg

Fk

Fk’

Fk’

Fr

**P**

α

Fk

Fr

Fg = mg nehézségi erő;

Fk kötélerő: a P pontra húzó erőt fejt ki;

Fr rúderő: vegyük fel úgy, hogy a P pontra nyomó erőt fejt ki;

a kis fonáldarabban Fk’ erő lép fel, ami az m tömeget felfelé, a P pontot lefelé húzza.

Az m tömegű testre hat az Fg = mg nehézségi erő és a függőleges fonál által kifejtett Fk’ fonálerő, és a kettő eredője zérus:

m

Fg = mg

Fk’

 Fk’ – mg = 0  Fk’ = mg.

A függőleges fonáldarab tehát Fk’ = mg nagyságú erővel hat a P pontra lefelé,

vagyis számolhatunk úgy, mintha az m tömeg közvetlenül a P pontban lenne.

Vizsgáljuk a P pont egyensúlyát:

Fk

Fk’

Fr

**P**

 α

 α

Fk

Fr

 Fg

 α

 α

 x

 z

A 3 erő vektori eredője zérus: **Fk** + **Fr** + **Fg** = **0**.

Bontsuk vízszintes és függőleges komponensekre:

az ábrán jelölt irányoknak megfelelően

az x komponens:

 –Fk sinα + Fr sinα = 0  Fk sinα = Fr sinα

 Fk = Fr , a két erő nagysága egyenlő;

a z komponens:

 Fk cosα + Fr cosα – mg = 0.

Fk = Fr felhasználásával

 2 Fk cosα = mg  Fk = $\frac{mg}{2 cosα}$ .

Számolás:

ℓr

h

α

**P**

sinα = h / ℓr = 12,5 cm / 21 cm = 0,5952  α = 36,53.

Fk = $\frac{mg}{2 cosα}$ = $\frac{0,1∙10}{2∙cos36,53}$ = 0,6222 N.

Fk = 0,6222 N húzó erő;

Fr = 0,6222 N nyomó erő.

A rúdnak tényleg nyomnia kell a P pontot.

*3/b) kísérlet: Ha fejjel lefelé fordítjuk az előző elrendezést és alulra kerül a kötél, akkor a kötél nem tudja megtartani az m tömeget, mivel nem tud nyomó erőt kifejteni.*

ℓk

ℓr

h

α

m

β

**2B/4.** feladat: értékeljük ki a következő kísérletet:

*3/c) Az ábra szerinti elrendezésben egy m tömegű testet rögzítettünk egy vízszintes lapra egy kötél és egy rúd segítségével.*

Számoljuk ki, mekkora erő lép fel a kötélben, ill. a rúdban!

Adatok: m = 100 g = 0,1 kg;

a rúd hossza: ℓr = 16 cm;

a kötél hossza: ℓk = 26 cm;

a felfüggesztési pont h = 12 cm távol van a vízszintes laptól.

Megoldás

Az előző feladat gondolatmenetét felhasználva vizsgáljuk a P pont egyensúlyát:

ℓk

ℓr

h

α

m

β

Fr

 Fg

Fk

**P**

α

β

Fr

 Fg

Fk

 z

 x

A 3 erő vektori eredője zérus: **Fk** + **Fr** + **Fg** = **0**.

Bontsuk vízszintes és függőleges komponensekre!

Az ábrán jelölt irányoknak megfelelően

az x komponens:

 Fk cosβ – Fr cosα = 0 ;

a z komponens:

 Fk sinβ + Fr sinα – mg = 0.

Az x komponensből fejezzük ki Fr -t:

Fr = Fk $\frac{cosβ}{cosα}$ ,

és írjuk be a z komponensbe:

 Fk ( sinβ + Fk $\frac{cosβ}{cosα}$ sinα ) – mg = 0 

 Fk = $\frac{mg}{sinβ + \frac{cosβ}{cosα} sinα }$ .

Számolás:

sinα = h / ℓr = 12 / 16 = 0,75  α = 48,59 ,

sinβ = h / ℓk = 12 / 26 = 0,4615  β = 27,49 .

Fk = $\frac{0,1∙10}{sin27,49 + \frac{cos27,49}{cos48,59} ∙sin48,59 }$ = 0,6815 N a kötélerő nagysága, és

Fr = Fk $\frac{cosβ}{cosα}$ = 0,6815∙$\frac{cos27,49}{cos48,59}$ = 0,9139 N a rugóerő nagysága.

Mindkét erő húzó erő.

Ezekben a vizsgált elrendezésekben könnyen látható, hogy a rúd milyen irányú erőt kellett kifejtsen (az első elrendezésben nyomó erőt, a másodikban húzó erőt), de ha nem egyértelmű, akkor induláskor felveszünk egy tetszőleges irányt, és a számolás után az előjelből látjuk, hogy helyes volt-e a feltételezésünk. Ha negatív előjelű erőt kapunk végeredményül, akkor meg kell változtatni az eredetileg felvett erő irányát. (Kötél esetében természetesen csak húzó erő léphet fel.)

**Gyakorló feladatok**

**Példatár**

Lejtő: 365., 367., 369., 370., 371., 373., 374., 375., 378., 400.

Pontrendszerek: 379., 384., 386.

Statika: 255., 256., 257., 262., 263., 265., 266., 267. , 268., 372.

A **2B/2.** feladat mintájára: Állandó hajlásszögű lejtőre helyezünk egy M tömegű testet, amire egy fonalat kötünk, a fonalat átvetjük a lejtő tetején levő csigán, és a függőlegesen lógó fonál végére egy m\* tömeget rögzítünk. Az M tömegű test a lejtőn felfelé gyorsulva csúszni kezd.

Számoljuk ki, mennyi idő alatt tesz meg L távolságot a lejtőn a nyugalmi helyzetből felfelé csúszó test a csúszási súrlódást is figyelembe véve!

Adatok: M = 21,59 g; m = 31,26 g; α = 28; μ = 0,2771; L = 0,485 m.