2. TÉMAKÖR: DINAMIKA

1. GYAKORLAT

NEWTON AXIÓMÁK

I. axióma: tehetetlenség törvénye.

Magára hagyott test nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez (azaz: $\mathbf{v}$ = konst.), ha a test mozgását olyan vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk, ami inerciarendszer.
Magára hagyott test: nincs kölcsönhatásban más testtel, ha megfelelően távol van más testektől.
Mi az inerciarendszer? Olyan vonatkoztatási rendszer, amiben érvényes Newton I. axiómája. Vagyis körbeért a definíció. Feloldás: az állítás az, hogy létezik inerciarendszer. A Földet inerciarendszernek tekintjük olyan mozgások vizsgálatánál, amelyeknél a megtett távolságok elhanyagolhatóak a Föld méretéhez képest – de nagyobb távolságot átfogó mozgásoknál már nem tekinthetünk el a Föld forgásától, keringésétől, és így nem tekinthető inerciarendszernek. Vagy: állócsillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszer alkalmas inerciarendszernek.

II. axióma: a dinamikai alaptörvénye.

A test gyorsulása arányos a rá ható erővel: $\mathbf{a} \sim \mathbf{F}$,
az arányossági tényező a test tömege: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.
Az m tömeg a tehetetlenség mértéke [kg],
az F erő a kölcsönhatás mértéke [N].

KÍSÉRLET: rugós kisautó. A rugó mindig ugyanakkora erőt fejt ki, az autó tömegének növelésével csökken a gyorsulás.
KÍSÉRLET: egy kiskocsit gyorsítottunk egy csigán átvetett fonálon lógó tömeggel. A kiskocsiba az egyes kísérletekben különböző terhelő tömegeket tettünk.

III. axióma: kölcsönhatás törvénye.

Jelölje $\mathbf{F}_{AB}$ az A test által a B testre kifejtett erőt, és $\mathbf{F}_{BA}$ a B test által az A testre kifejtett erőt; a két erő egyenlő nagyságú, megegyező hatásvonalú és ellentétes irányú: $\mathbf{F}_{BA} = -\mathbf{F}_{AB}$, azaz $\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA} = \mathbf{0}$.
Az erő-ellenerő (akció-reakció) megnevezés azt sugallja, hogy az egyik váltja ki a másikat, időben késleltetés van közöttük, de ez nem igaz, egyszerre, egy időben lépnek fel.

KÍSÉRLET: 2 rugós erőmérő egymást húzza. A 2 rugó mindig egyformán nyúlik meg.

IV. axióma: szuperpozíció törvénye (az erők összegzése).

Ha egy testre egyszerre több erő is hat, akkor a test gyorsulását az erők vektori eredője határozza meg: $\mathbf{F}_{\text{eredő}} = \Sigma\mathbf{F}_i$, az $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ egyenletbe az erők vektori eredőjét kell írni: $\Sigma\mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$.
Ez azt is jelenti, hogy az egyszerre fellépő erők nem befolyásolják egymást (vagyis a kölcsönhatások egymástól függetlenek).

VIDEÓ: két test: egy vasgolyó és néhány madártoll esik le. A nehézségi erő okozta gyorsulásuk egyforma nagyságú, de a nagyobb fajlagos felületű tollakra a közegellenállási erő is hat, ezért kisebb lesz a gyorsulása. (A másikra is hat közegellenállási erő, de ott elhanyagolható a gyorsulásának a változása.) Vákuumban viszont nincs közegellenállás, ott mindkét testnek egyforma a gyorsulása: [*https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs*](https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs)

MOZGÁSEGYENLET

Az $m\mathbf{a} = \Sigma\mathbf{F}_i$ egyenletbe behelyettesítjük az egyes kölcsönhatásoknak megfelelő erőtörvényeket (ld. később), így tudjuk a test gyorsulását. A kezdősebesség és a kezdeti helyvektor (vagy bármely időpontban a sebesség és a helyvektor) ismeretében meg tudjuk határozni a sebességet és a helyvektort az idő függvényében.

ERŐTÖRVÉNYEK

avagy: mitől, hogyan függ az egyes kölcsönhatásokban fellépő erő?

Nehézségi erő a Föld felszínén

A Föld által bármely testre kifejtett vonzóerő.

Nagysága: $F_g = mg$, ahol

g a gravitációs gyorsulás, aminek értéke kis mértékben függ attól, hogy a Föld mely pontján van a test (ld. később), Magyarországon $g \approx 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$;

iránya: függőlegesen lefelé;

A g értéke függ a földrajzi szélességtől egyrészt, mert a Föld nem gömb alakú, másrészt, mert a Föld forog, és függ a tengerszint feletti magasságtól.

A földi nehézségi erő az általános tömegvonzási erőből származik, ahol a két egymást vonzó test közül az egyik a Föld. Az általános tömegvonzási (gravitációs) erő bármely két test között fellép, a nagysága a távolság növekedésével csökken, de sehol nem zérus.

Kérdés: a Föld és egy ember közötti kölcsönhatásban melyikre hat nagyobb tömegvonzási erő?

Ha a test szabadon mozog $\rightarrow$ hajítás;

ha van felület, kötél, rúd $\rightarrow$ „kényszererő.”

Kényszererők: felület, kötél, rúd

A testek mozgását felület, kötél, rúd korlátozza, ezt a geometriai kényszert a test és a felület, kötél, rúd között ható erővel írjuk le.

Csak az irányukat tudjuk (a geometriai kényszer miatt), a nagyságukat nem, az mindig az adott problémából adódik!

A testre a felület által kifejtett $\mathbf{F}_{ny}$ nyomóerő:

iránya: a felületre merőleges (ha görbült a felület, akkor a pontbeli érintősíkra merőleges); csak nyomni tud;

nagysága akkora, hogy a test a felületen maradjon.

A testre a kötél által kifejtett $\mathbf{F}_{kötél}$ kötélerő:

iránya: csak húzni tudja a testet, kötélirányban;

nagysága: ugyanakkora az erő nagysága a kötél két végén; akkora, hogy a test a kötél hosszánál távolabbra nem kerülhet a kötél rögzítési pontjától.

A testre rúd által kifejtett $\mathbf{F}_{rúd}$ rúderő:

iránya: húzni és nyomni is tudja a testet, rúdirányban;

nagysága abból adódik, hogy a rúd hossza nem változhat.

Súrlódási erők

Csúszási súrlódási erő

Szilárd felület és a hozzá képest mozgásban levő test között lép fel (a felületek között ható kémiai erők és a felületek érdessége miatt).

Nagysága: $F_s = \mu F_{ny}$, ahol
F_{ny} a testre ható nyomóerő,
μ a csúszási súrlódási együttható;
iránya: a sebességgel ellentétes irányú;

Tapadási súrlódás

Szilárd felület és a hozzá képest nyugalomban levő test között lép fel, ha valamilyen külső erő el akarja mozdítani őket egymáshoz képest.

Nagysága: akkora, amekkora ahhoz szükséges, hogy a test nyugalomban maradjon,
de nem lehet nagyobb, mint $F_{t,max} = \mu_t F_{ny}$, ahol
F_{ny} a testre ható nyomóerő,
μ_t a tapadási súrlódási együttható;
(ha ennél nagyobb erőre lenne szükség, akkor a test elkezd mozogni a felülethez képest);
iránya: a felülettel párhuzamos; azzal ellentétes irányú, amerre a külső (eredő) erő el akarja mozdítani a testet.

Gördülési ellenállás: $F_{gördülési} = \mu_{gördülési} F_{ny}$

Azonos felületek között $\mu_{gördülési} < \mu_{csúszási} < \mu_{tapadási}$.

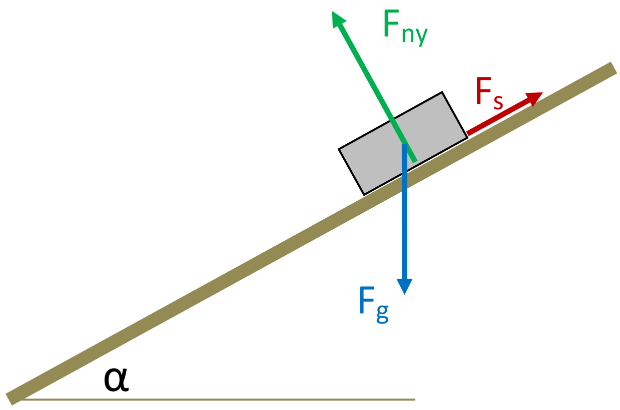
Közegellenállási erő

Fluidum (folyadék, gáz) és a hozzá képest mozgásban levő test között lép fel. Iránya: a sebességgel ellentétes irányú, nagysága függ a sebesség nagyságától.

FELADATOK

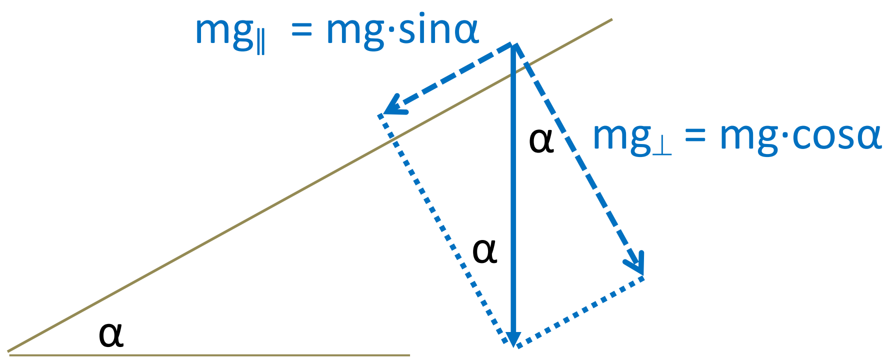
2A/1. Van egy α = 18° hajlásszögű, L = 2,3 m hosszú lejtő, és egy m = 85 dkg tömegű test. A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható μ = 0,16.
a) Mekkora súrlódási erő hat a testre a mozgása közben?
b) Mekkora lesz a test végsebessége a lejtő aljára érkezve, ha a test a lejtő tetejéről nyugalomból indulva elkezd lefelé csúszni?
c) Legalább mekkora kezdősebességet kell adni a testnek a lejtő alján, hogy feljusson a lejtő legtetejére?
d) Ha azt szeretnénk, hogy a test állandó sebességgel mozogjon felfelé a lejtőn, mekkora lejtővel párhuzamos erőt kell rá kifejtenünk?
Plusz kérdés:
e) Ha azt szeretnénk, hogy a test állandó sebességgel mozogjon felfelé a lejtőn, mekkora vízszintes erőt kell rá kifejtenünk?

Megoldás
A testre 3 erő hat:



a nehézségi erő:
  az iránya függőlegesen lefelé mutat,
  a nagysága F_g = mg;
a lejtő által a testre kifejtett nyomóerő:
  az iránya merőleges a lejtő síkjára,
  a nagysága akkora, hogy teljesüljön az, hogy a test a lejtő síkjában mozog;
a csúszási súrlódási erő:
  az iránya ellentétes a test mozgásának az irányával,
  a nagysága $F_s = \mu \cdot F_{ny}$, a nyomóerő nagyságától függ.

A három erő 3 különböző irányú. A test a lejtő síkjában mozog, ezért úgy írunk fel két egyenletet, hogy az egyik a mozgás iránya, ami most a lejtővel párhuzamos irány, a másik pedig az arra merőleges (a lejtő síkjára merőleges) irány.
Ehhez először fel kell bontanunk a nehézségi erőt ilyen irányú komponensekre:



Mivel a test a lejtő síkjában mozog, az arra merőleges erők eredője zérus kell legyen, hiszen nem lehet gyorsulása a lejtőre merőlegesen. A lejtőre merőleges nyomóerő ezért akkora kell legyen, mint a nehézségi erőnek a lejtőre merőleges komponense:
$F_{ny} = mg_{\perp} = mg\cdot\cos\alpha = 8{,}084$ N.
A feladat megoldásánál a képleteket fogjuk tovább alakítani és csak a legvégén fogunk behelyettesíteni, de szürkével oda lesznek írva menet közben a részeredmények.

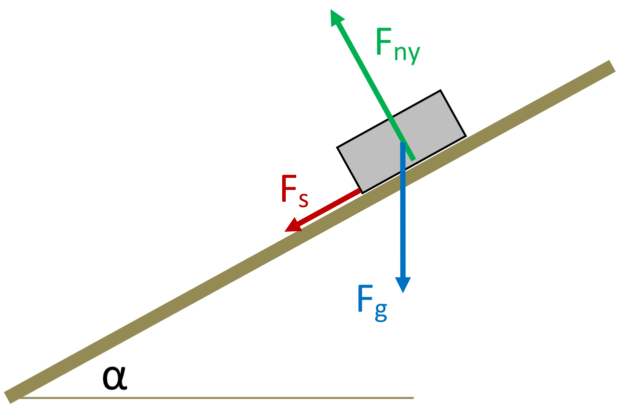
a) A nyomóerő nagyságát ismerve ki tudjuk fejezni a csúszási súrlódási erő nagyságát:
$F_s = \mu\cdot F_{ny} = \mu\cdot mg\cdot\cos\alpha$
Behelyettesítve:
$F_s = \mu\cdot mg\cdot\cos\alpha = 0{,}16 \cdot 0{,}85\cdot 10\cdot\cos 18° = 1{,}293$ N.

b) Ki kell fejeznünk a test gyorsulását a mozgásegyenlet lejtővel párhuzamos komponenséből. A test a lejtő síkjában lefelé fog mozogni, ezért azt vesszük fel pozitív iránynak. A testet a nehézségi erő lejtővel párhuzamos komponense gyorsítja, a súrlódás fékezi:
$ma_{le} = mg\cdot\sin\alpha - \mu\cdot mg\cdot\cos\alpha = 2{,}627 - 1{,}293 = 1{,}333$ N ,
ebből a test gyorsulása lefelé
$a_{le} = g\cdot(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha) = 10\cdot(\sin 18° - 0{,}16\cdot\cos 18°) = 1{,}568$ m/s^2 .

Mivel állandó a test gyorsulása, ezért a sebessége egyenletesen változik:
$v_{le}(t) = v_{le0} + a_{le} \cdot t$,
és a lejtőn megtett távolságot négyzetes úttörvénnyel számolhatjuk:
$s_{le}(t) = v_{le0}\, t + ½\, a_{le}\, t^2$.
Ebben a feladatban most $v_{le0} = 0$, mert nyugalomból indul, tehát
$v_{le}(t) = a_{le} \cdot t$ és $s_{le}(t) = ½\, a_{le}\, t^2$.

A lejtő alján a sebességet úgy tudjuk kiszámolni, hogy először meghatározzuk, mennyi idő alatt ér le, vagyis milyen t* időben lesz s(t*) = L:
$½\, a_{le}\, t^{*2} = L \quad\rightarrow\quad t^* = \sqrt{\frac{2L}{a_{le}}} = 1{,}713$ s,
és ezt behelyettesítjük a sebesség képletébe:
$v_{le,vég} = v_{le}(t^*) = a_{le} \cdot t^* = a_{le} \cdot \sqrt{\frac{2L}{a_{le}}} = \sqrt{2L\, a_{le}}$.
Behelyettesítve:
$v_{le,vég} = \sqrt{2L\, a_{le}} = \sqrt{2\cdot 2{,}3\cdot 1{,}568} = 2{,}686$ m/s.

c) Ha felfelé halad a test a lejtőn, akkor más lesz a gyorsulásának a nagysága, mint amikor lefelé csúszott. A csúszási súrlódási erő most is fékezi a testet, az iránya mindig a mozgás irányával ellentétes irányba mutat, vagyis felfelé haladó test esetén lefelé mutat. Másrészt a nehézségi erő lejtővel párhuzamos komponense mindig lefelé mutat, ami a lefelé haladó testet gyorsította, de a felfelé haladó testet fékezi.



Mivel a test most a lejtő síkjában felfelé fog mozogni, ezért most azt vesszük fel pozitív iránynak.

$m a_{fel} = -\, mg \cdot \sin\alpha - \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha = -\,2{,}627 - 1{,}293 = -3{,}920 \text{ N}$,

ebből a test gyorsulása felfelé

$a_{fel} = -\, g \cdot (\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) = -10 \cdot (\sin 18° + 0{,}16 \cdot \cos 18°) = -4{,}612 \text{ m/s}^2$.

Ha ugyanakkora kezdősebességet adnánk a testnek, mint amekkora végsebességgel leérkezett a lejtő aljára, akkor nem jutna fel a lejtő tetejére, mert most nagyobb abszolút értékű a lassulása, mint a **b)** részben a gyorsulása volt.

Írjuk fel a test sebességét és a lejtőn megtett utat az idő függvényében:

$v_{fel}(t) = v_{fel0} + a_{fel} \cdot t$ és $s_{fel}(t) = v_{fel0}\, t + ½\, a_{fel}\, t^2$.

A minimális kezdősebességgel éppen a lejtő tetejére érve áll meg a test (ehhez t' idő kell):

$v_{fel0} + a_{fel} \cdot t' = 0 \quad \rightarrow \quad t' = -\, v_{fel0} / a_{fel} = 0{,}9987 \text{ s}$ (a_{fel} negatív, tehát t' pozitív).

s_{fel} képletébe ezt az időt behelyettesítve L-et kell kapjunk:

$$v_{fel0}\, t' + ½\, a_{fel}\, t'^2 = v_{fel0} \cdot (-\, v_{fel0}/a_{fel}) + ½\, a_{fel}\, (-\, v_{fel0}/a_{fel})^2 = -\frac{v_{fel0}^2}{2\, a_{fel}} = L \, .$$

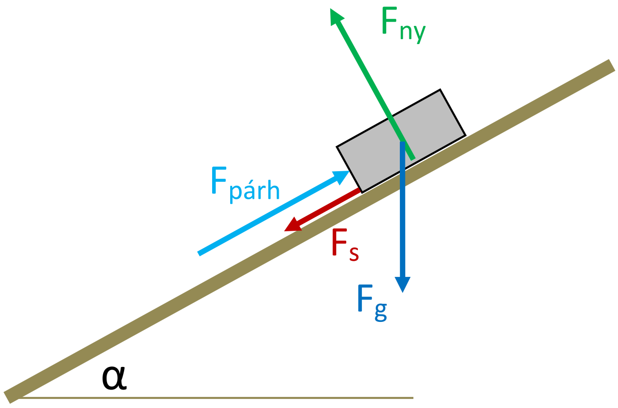
Ebből kifejezhető a minimális kezdősebesség, amivel feljut a lejtő tetejére:

$v_{fel0} = \sqrt{-2L\, a_{fel}}$ (a_{fel} negatív, tehát a gyök alatti mennyiség pozitív)

Behelyettesítve

$$v_{fel0} = \sqrt{-2 \cdot 2{,}3 \cdot (-4{,}612)} = 4{,}606 \text{ m/s} \, .$$

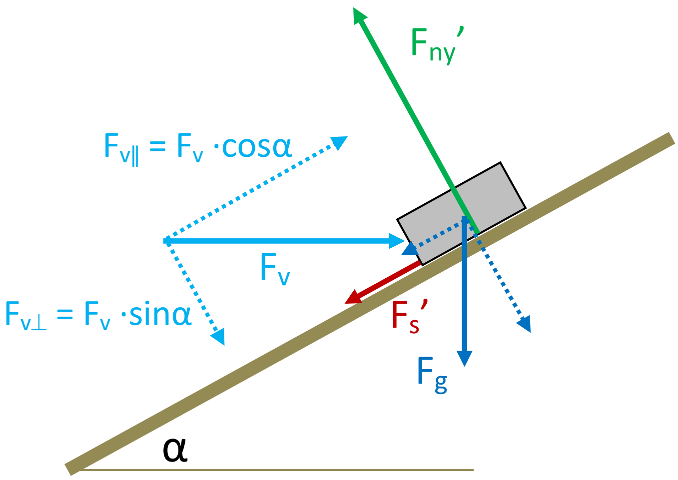
d) Ha állandó sebességgel mozog a test a lejtőn, akkor a gyorsulása zérus ($a_{fel} = 0$) , vagyis a lejtővel párhuzamos erők eredője zérus kell legyen.



Jelölje $F_{párh}$ az általunk a lejtővel párhuzamos irányban kifejtett erőt. Ez az erő felfelé gyorsítja a testet, vagyis felfelé mutató tengely esetén pozitív előjelű:

$ma_{fel} = F_{párh} - mg\cdot\sin\alpha - \mu\cdot mg\cdot\cos\alpha = 0$
$\rightarrow\ F_{párh} = mg\cdot\sin\alpha + \mu\cdot mg\cdot\cos\alpha$,
behelyettesítve $F_{párh} = 3{,}920$ N.

Plusz kérdés:
e) Az általunk kifejtett F_v erő nem párhuzamos a lejtő síkjával, ezért nem csak tolja felfelé a testet a lejtőn, hanem „bele is akarja nyomni” a lejtőbe. Emiatt a lejtő által a kifejtett nyomóerő nagysága megváltozik, nagyobb lesz.
A számoláshoz az F_v erőt is fel kell bontanunk lejtővel párhuzamos és lejtőre merőleges komponensekre:



A lejtőre merőleges komponensek eredője zérust kell adjon:
$F_{ny}' - mg_{\perp} - F_{v\perp} = F_{ny}' - mg\cdot\cos\alpha - F_v\cdot\sin\alpha = 0$,
ezért a lejtő által kifejtett nyomóerő most
$F_{ny}' = mg\cdot\cos\alpha + F_v\cdot\sin\alpha$.

A nyomóerő nagyságának változása miatt a súrlódási erő nagysága is változni fog:
$F_s' = \mu\cdot F_{ny}' = \mu\cdot mg\cdot\cos\alpha + \mu\cdot F_v\cdot\sin\alpha$.

A testet akkora erővel toljuk, hogy a sebessége állandó legyen, ezért a lejtővel párhuzamos gyorsulása zérus:

$F_{v\parallel} - mg_{\parallel} - F_s' = 0 \quad \rightarrow$

$F_v \cdot \cos\alpha - mg \cdot \sin\alpha - (\mu \cdot mg \cdot \cos\alpha + \mu \cdot F_v \cdot \sin\alpha) = 0$

Ebből kifejezhető az F_v erő:

$$F_v = \frac{\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha} mg$$

Behelyettesítve $F_v = 4{,}348$ N.

2A/2. Az előző feladatban szereplő test és a lejtő között a tapadási súrlódási együttható értéke $\mu_t = 0{,}34$. A többi adat változatlan (L = 2,3 m; m = 85 dkg; csúszási súrlódási együttható $\mu = 0{,}16$).
Mekkora a testre ható (tapadási vagy csúszási) súrlódási erő?

Megoldás
A lejtőn nyugalomban levő testet a nehézségi erő lejtővel párhuzamos komponense, $mg_{\parallel} = mg \cdot \sin\alpha = 2{,}627$ N nagyságú erő akarja gyorsítani a lejtőn lefelé.

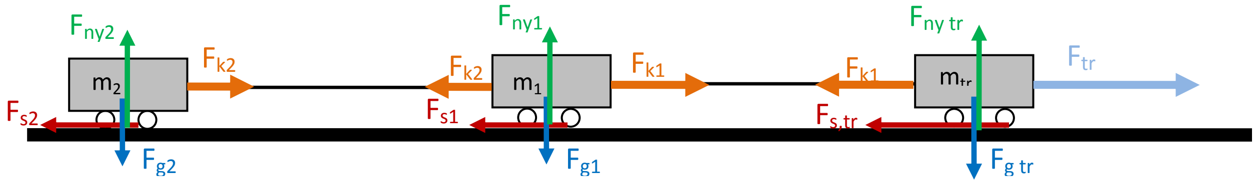
Tudjuk, hogy a tapadási súrlódási erő maximális értéke $F_{t,max} = \mu_t \cdot F_{ny}$.

Mivel most $F_{ny} = mg_{\perp} = mg \cdot \cos\alpha = 8{,}084$ N ,
ezért $F_{t,max} = \mu_t \cdot F_{ny} = 0{,}34 \cdot 8{,}084 = 2{,}749$ N.

$F_{t,max} = 2{,}749 \text{ N} \quad > \quad mg_{\parallel} = 2{,}627 \text{ N}$

A tapadási súrlódási erő maximális értéke nagyobb, mint az az erő, ami a lejtőn lefelé gyorsítani akarja a testet, ezért a test nem kezd el csúszni.
A tapadási súrlódási erő értéke akkora, hogy az eredő erő zérus legyen, vagyis
$F_t = mg_{\parallel} = 2{,}627$ N.

2A/3. Egy traktor két pótkocsit vontat nyújthatatlan drótkötelekkel. Mekkora a traktor húzóereje és mekkora erő feszíti a köteleket, ha indításnál a traktor 1 perc alatt egyenletesen gyorsít fel 43,2 km/h sebességre?
A traktor tömege 3 t, a pótkocsik tömege 2-2 t, a gördülő ellenállási együttható $\mu_g = 0{,}08$.



<u>Megoldás</u>

Adatok:

pótkocsik: $m_1 = m_2 = 2$ t = 2000 kg; traktor: $m_{tr} = 3$ t = 3000 kg;

$v_0 = 0$; $v_{vég} = 43{,}2$ km/h = 12 m/s; $\Delta t = 1$ min = 60 s.

Milyen erők hatnak?

F_{tr} az út által az traktorra a mozgás irányába kifejtett erő:
- iránya a gyorsítás irányába mutat,
- nagysága ismeretlen;

F_{k1} ill. **F_{k2}** a két kötélerő:
- iránya a kötél irányában ható húzóerő,
- nagysága ismeretlen;

$F_{g\,tr}$, F_{g1} és **F_{g2}** a Föld által a traktorra, ill. pótkocsikra kifejtett nehézségi erő,
- iránya függőlegesen lefelé mutat,
- nagysága $F_g = mg$;

$F_{ny\,tr}$, F_{ny1} és **F_{ny2}** a talaj által a traktorra, ill. pótkocsikra kifejtett nyomóerő.
- iránya a talajra merőlegesen felfelé mutat,
- nagysága akkora, amekkora ahhoz szükséges, hogy a test éppen a felületen mozogjon;

$F_{s\,tr}$, F_{s1} és **F_{s2}** a gördülési súrlódási erő,
- iránya a mozgással ellentétes irányba mutat,
- nagysága $F_s = \mu_g \cdot F_{ny}$.

Az erők egy része vízszintes, másik része függőleges. A kiszámolandó erők vízszintesek, de mivel a vízszintes súrlódási erők nagysága a függőleges nyomóerők nagyságától függ, először azokat kell tudnunk.

Mivel a testek a talajon mozognak, a függőleges erők eredője zérus kell legyen, hiszen nem lehet gyorsulásuk függőlegesen felfelé vagy lefelé $\rightarrow$ ebből tudjuk a nyomóerőket:

$F_{ny,tr} = m_{tr}\, g$, $F_{ny1} = m_1\, g$, $F_{ny2} = m_2\, g$.

A súrlódási erők nagysága így $F_s = \mu\, F_{ny} = \mu mg$ mindegyik testre:

$F_{s\,tr} = \mu\, F_{ny\,tr} = \mu m_{tr}\, g$; $F_{s\,1} = \mu\, F_{ny1} = \mu m_1\, g$; $F_{s2} = \mu\, F_{ny2} = \mu m_2\, g$.

Vízszintesen az x tengely pozitív irányának azt az irányt választjuk, amerre a traktor gyorsít $\rightarrow$ a súrlódási erők előjele mindig negatív.

A kötélerő egy-egy kötél két végén egyenlő, de a két kötélben eltérő nagyságú.

Fel fogjuk írni minden testre az $ma_x = \Sigma F_{ix}$ egyenletet.

Tudjuk, hogy a drótkötél nyújthatatlan, ezért a kocsik közötti távolság nem változhat, vagyis minden pillanatban megegyezik a sebességük, így mindhárom test (a két kocsi és a traktor) gyorsulása megegyezik (jelöljük ezt a_x helyett egyszerűen a-val):

traktor: $m_{tr}\, a = F_{tr} - F_{k1} - F_{s\,tr}$

első pótkocsi: $m_1\, a = F_{k1} - F_{k2} - F_{s1}$

második pótkocsi: $m_2\, a = F_{k2} - F_{s2}$

A súrlódási erők nagyságát behelyettesítve:

traktor: $m_{tr}\, a = F_{tr} - F_{k1} - \mu m_{tr} g$

első pótkocsi: $m_1\, a = F_{k1} - F_{k2} - \mu m_1 g$

második pótkocsi: $m_2\, a = F_{k2} - \mu m_2 g$

Ezekből sorra kiszámolhatók a kérdéses erők, ha ismerjük a gyorsulást.

A gyorsulást ki tudjuk abból számítani, hogy a traktor 1 perc alatt gyorsít fel álló helyzetből 43,2 km/h sebességre:

$a = \Delta v / \Delta t = (43{,}2/3{,}6 - 0) / 60 = 12 / 60 = 0{,}2\ m/s^2$.

Tehát az erők:

$F_{k2} = m_2(a+\mu g) = 2000\cdot(0{,}2+0{,}08\cdot 10) = 2000\ N$,

$F_{k1} = F_{k2} + m_1(a+\mu g) = (m_1+m_2)(a+\mu g) = (2000+2000)\cdot(0{,}2+0{,}08\cdot 10) = 4000\ N$,

$F_{tr} = F_{k1} + m_{tr}(a+\mu g) = (m_1+m_2+m_{tr})(a+\mu g) = (2000+2000+3000)\cdot(0{,}2+0{,}08\cdot 10) = 7000\ N$.

MEGJEGYZÉSEK

- A drótkötelek tömegét elhanyagoltuk. Ha figyelembe kellene venni a tömegüket, akkor nem lenne igaz, hogy a két végükön ébredő erő megegyezik, hanem a kötelekre is fel kellene írni mozgásegyenletet és abból tudnánk kiszámolni az erőket.

- Vegyük észre, hogy a fenti feladatban a gyorsulás az egyes testekre felírt egyenletekből kifejezve

$$a = \frac{F_{tr} - (F_{k1} + F_{s\,tr})}{m_{tr}} = \frac{F_{k1} - (F_{k2} + F_{s1})}{m_1} = \frac{F_{k2} - F_{s2}}{m_2} ,$$

vagyis az egyes testekre az előre- ill. a hátrafelé ható erők különbsége arányos a tömegükkel (ugyanez igaz kötelekre is).

- Tekintsük a 3 testet egy rendszernek és adjuk össze a 3 testre felírt mozgásegyenletet:

$$(m_{tr} + m_1 + m_2)\, a = F_{tr} - (\, F_{s\,tr} + F_{s1} + F_{s2})$$

Ekkor az F_{k1}, F_{k2} kötélerők kiesnek, mivel ők a 3 testből álló rendszerben belső erők.
A 3 testből álló rendszer gyorsulását a külső erők eredője határozza meg:

$$a = \frac{F_{tr} - (F_{s\,tr} + F_{s1} + F_{s2})}{m_{tr}+m_1+m_2} .$$

- A függőleges komponensekre is felírhattuk volna az $ma_z = \Sigma F_{iz}$ egyenleteket pl. a pozitív irányt felfelé választva, és tudjuk, hogy $a_z = 0$ kell legyen:

traktor: $m_{tr}\, a_{tr\,z} = -m_{tr}\, g + F_{ny\,tr} = 0$

első pótkocsi: $m_1\, a_{1\,z} = -m_1\, g + F_{ny1} = 0$

második pótkocsi: $m_2\, a_{2\,z} = -m_2\, g + F_{ny2} = 0$

- Felírhatjuk a mozgásegyenleteket vektori alakban is: $m\, \mathbf{a} = \Sigma \mathbf{F_i}$:

traktor: $m_{tr}\, \mathbf{a_{tr}} = m_{tr}\, \mathbf{g} + \mathbf{F_{ny\,tr}} + \mathbf{F_{tr}} + \mathbf{F_{k1}} + \mathbf{F_{s\,tr}}$

első pótkocsi: $m_1\, \mathbf{a_1} = m_1\, \mathbf{g} + \mathbf{F_{ny1}} + \mathbf{F_{k1}} + \mathbf{F_{k2}} + \mathbf{F_{s1}}$

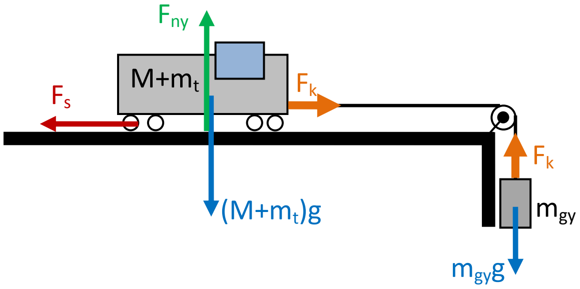
második pótkocsi: $m_2\, \mathbf{a_2} = m_2\, \mathbf{g} + \mathbf{F_{ny2}} + \mathbf{F_{k2}} + \mathbf{F_{s2}}$

2A/4. *KÍSÉRLET: egy kiskocsit gyorsítottunk egy csigán átvetett fonálon lógó tömeggel. A kiskocsiba az egyes kísérletekben különböző terhelő tömegeket tettünk.*

A fonál nyújthatatlan, a tömegét a kiskocsi tömegébe mértük bele.

Vezessük le, mekkora lesz a kiskocsi gyorsulása a kiskocsiba rakott terhelő tömeg és a függőlegesen lógó gyorsító tömeg függvényében!

Megoldás



A kiskocsi tömege M, a bele rakott terhelő tömeg m_t. Ezt a két testet kezelhetjük egy testnek az egyenletek felírásakor, mert a terhelő tömeg nem mozdul el a kiskocsihoz képest.
A függőlegesen lógó gyorsító test tömege m_{gy}.

A kiskocsi mozgása vízszintes, a gyorsító tömegé függőleges irányú, de a sebességük nagysága meg kell egyezzen minden pillanatban, mert a fonál hossza állandó közöttük. Mivel a sebességük nagysága megegyezik, a gyorsulásuk nagysága is megegyezik. A testeket összekötő fonál ugyanakkora erővel hat mindkét testre, de az erő iránya változik a fonál irányát követve.
A kiskocsira felírhatjuk, hogy a rá ható függőleges erők eredője zérus kell legyen, és ebből tudjuk, hogy $F_{ny} = (M + m_t)\, g$.
A kiskocsit fékezi a kerekek gördülési ellenállása, ez az erő a csúszási súrlódási erőhöz hasonlóan írható fel, nagysága a nyomóerő nagyságával arányos:

$F_s = \mu\, F_{ny} = \mu\, (M + m_t)\, g$.

A gyorsulás meghatározásához fel kell írni

a kiskocsira ható vízszintes erők eredőjét:

$(M + m_t)\, a = F_k - F_s = F_k - \mu\, (M + m_t)\, g$;

a gyorsító tehernél pedig a függőleges erők eredőjét:

$m_{gy}\, a = m_{gy}\, g - F_k$.

(Az előjeleket itt most annak megfelelően választottuk meg, hogy tudjuk, hogy merre mozognak a testek.)
A két egyenletet összeadva a kötélerő kiesik:

$(M + m_t + m_{gy})\, a = m_{gy}\, g - \mu\, (M + m_t)\, g$,

és kifejezhető belőle a gyorsulás a tömegek függvényében:

$$a = \frac{m_{gy} - \mu\,(M + m_t)}{M + m_t + m_{gy}}\, g\ .$$

MEGJEGYZÉS: Az $(M + m_t + m_{gy})\, a = m_{gy}\, g - F_s$ egyenleten azt látjuk, hogy ha egy rendszernek tekintjük a testeket, akkor erre a rendszerre a rendszeren kívüli külső erők eredője $m_{gy}\, g - F_s$. Természetesen nem csak ezek a külső erők hatnak a rendszerre, mert hat $(M + m_t)\, g$ és F_{ny} is, de azok eredője zérus.

SZIMULÁCIÓK, VIDEÓK:

Vízszintes síkon gyorsított test súrlódással:
https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/forces-1d
Lejtő, állítható súrlódási együtthatókkal:
https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/ramp-forces-and-motion
A tapadási súrlódási erő attól függ, hogy a felületek mekkora erővel nyomják egymást:
http://www.videoman.gr/106419
https://www.youtube.com/watch?v=bgyrrjmavy4