**KINEMATIKA**

2. GYAKORLAT

**1B/1. (MÁ 123.)** Függőlegesen felfelé dobunk egy követ 20 m/s sebességgel.

**a)** Mekkora lesz a sebessége 3 s múlva?

**b)** Hol lesz ekkor a test?

**c)** Milyen irányban mozog ebben a pillanatban?

Megoldás

Függőleges hajítás

sebessége: vz(t) = v0 – gt (vízszintesen vx = 0);

z koordinátája (ha a kiinduló koordinátája z0): z(t) = z0 + v0t – ½gt2 (és x = x0).

Számolhatnánk úgy, hogy először kiszámoljuk, mennyi ideig emelkedik, és milyen magasra jut ezalatt, majd a maradék időre a pálya legmagasabb pontjáról induló szabadeséssel számolnánk tovább. Mivel azonban a sebességet a képletben előjeles mennyiségként kezeljük, a felfelé ill. lefelé irányuló mozgást egyben számolhatjuk: felfelé vz > 0, lefelé vz < 0, a legfelső ponton vz = 0.

Adatok: v0 = 20 m/s (pozitív, mert felfelé dobtuk el a testet); z0 legyen 0

→ v(t) = 20 – 10t ; z(t) = 20t – 5t2.

**a)** t = 3 s: v(3) = 20 – 10∙3 = –10 m/s.

**c)** v(3) előjele negatív → a test lefelé mozog.

**b)** z(3) = 20∙3 – 5∙32 = 15 m.

Nem volt kérdés, de kiszámolható az emelkedés ideje: v(th) = 0: 20 – 10th = 0 → th = 2 s ; ezalatt z(th) = 20∙2 – 5∙22 = 20 m magasra jutott, ez volt a maximális magasság.

Az ábrán látható, hogy a vz(t) függvény a z(t) deriváltja, vz aktuális értéke a z(t) érintőjének meredekségével arányos:

t = 2 s-nál z(t) érintője vízszintes → ekkor vz = 0;

előtte z(t) érintőjének meredeksége pozitív → vz > 0;

utána z(t) érintőjének meredeksége negatív → vz < 0.

**1B/2. (MÁ 6.)** Egyenes pályán 36 km/h sebességgel haladó vasúti kocsi oldalait a pályára merőleges irányban kilőtt lövedék üti át. A kimeneti nyílás 5 cm-rel van eltolódva a menetiránnyal ellentétesen a bemeneti nyíláshoz képest. A kocsi falainak távolsága 2,5 m. Mekkora a lövedék sebessége?

x

y

Megoldás

A vonat az x tengely mentén halad egyenletes vvonat sebességgel: x(t) = x0 + vvonat t;

a golyó az y tengely mentén halad egyenletes vgolyó sebességgel: y(t) = y0 + vgolyó t.

vvonat = 36 km/h = 10 m/s.

Origónak válasszuk azt a pontot, amikor a golyó éppen eléri a vonatot.

t\* ideig tart, amíg a golyó áthalad a vonaton, ez alatt

a vonat svonat = 5 cm = 0,05 m-t halad: svonat = Δxvonat(t\*) = vvonat t\*;

a golyó által megtett távolság a vonat szélessége, sgolyó = 2,5 m: sgolyó = Δygolyó(t\*) = vgolyó t\* .

A két egyenlet tehát svonat = vvonat t\* és sgolyó = vgolyó t\*.

Elosztva egymással a két egyenletet az idő kiesik:

,

amiből a golyó sebessége

vgolyó = (svonat/sgolyó) ∙ vvonat .

Behelyettesítve

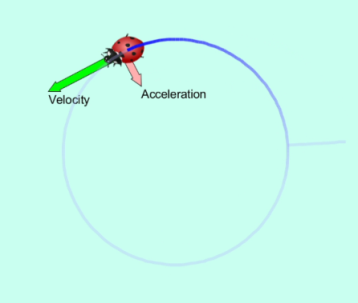
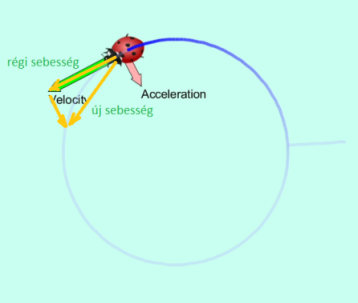
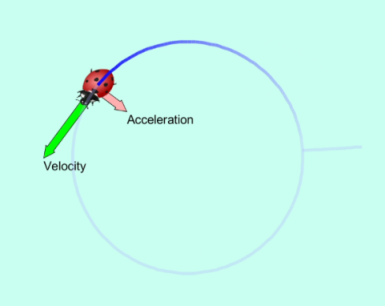
vgolyó = (2,5/0,05) ∙ 10 = 500 m/s.

[Nem kérdés, de kiszámolható a közben eltelt idő: t\* = 0,05 m / (36/3,6 m/s) = 0,005 s.]

**Körmozgás, görbe vonalú mozgás gyorsulása**

[*https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/ladybug-motion-2d*](https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/ladybug-motion-2d)

Egyenletes körmozgás esetén a gyorsulás mindig merőleges a sebességre, emiatt a sebesség iránya állandóan változik.

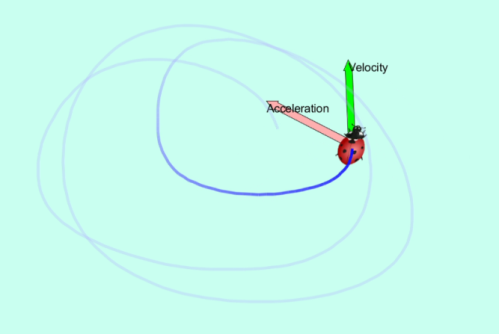
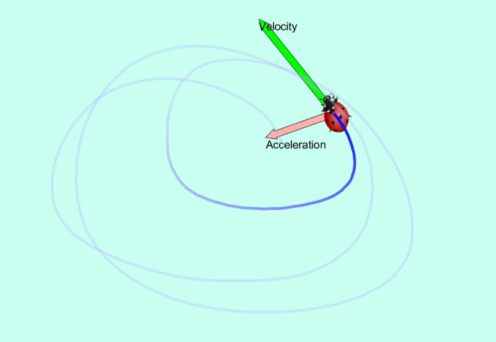
  

[Megjegyzés: Ezt a gyorsulást hívják centripetális gyorsulásnak.

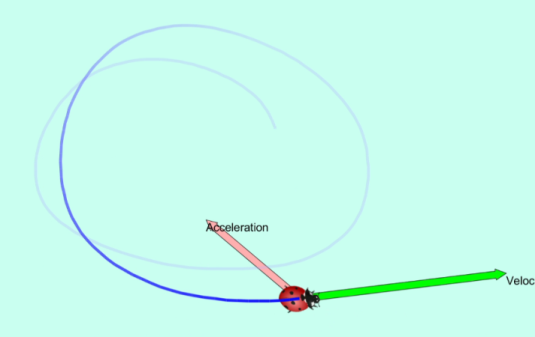
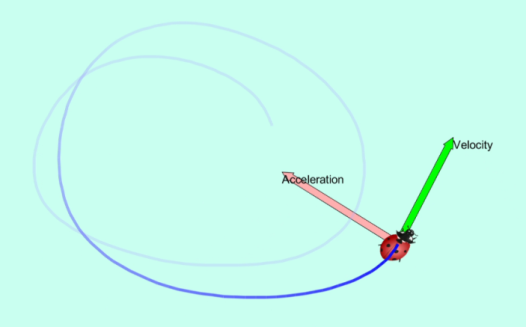
A nagysága acp = v2 / r , tehát kanyarodásnál egyrészt a sebesség négyzetével nő a centripetális gyorsulás, másrészt a körív sugarával fordítottan arányos.]

Ha a gyorsulás nem pontosan merőleges a sebességre, akkor a sebesség nagysága is változik:

ha hegyes szöget zárnak be, akkor a test gyorsabb lesz:

ha tompa szöget, akkor a test lassul:

**Átlagsebesség**

Mennyi az átlagsebesség egy körre? Vagyis az az állandó értékű sebesség, amivel egy kör megtétele alatt ugyanannyit mozdulna el a test? Nulla, mivel a test egy kör megtétele után visszaérkezik a kiinduló pontba.

A sebességet vektorként értelmezzük, az átlagsebességnél az adott idő alatt létrejött   
Δ**r** elmozdulásvektort osztjuk az eltelt Δt idővel:

**vátl** = Δ**r** / Δt .

A sebesség nagyságának az átlaga persze nem nulla, hanem az adott idő alatt megtett s út osztva az eltelt Δt idővel:

│**v**│átl = vátl = s / Δt .

**Impulzus**

*KÍSÉRLET: Álló kiskocsinak ütközik egy másik kiskocsi v\* sebességgel, majd összetapadva mozognak tovább.*

*Ha a két kiskocsi tömege megegyezik → az összetapadt kocsik sebessége ½ v\*.*

*Ha a mozgó kiskocsira ráteszünk egy akkora tömeget, mint a kiskocsié, vagyis a mozgó kiskocsinak kétszer akkora a tömege, mint az állóé → az összetapadt kocsik sebessége ⅔ v\*.*

*Ha az álló kiskocsira teszünk egy akkora tömeget, mint a kiskocsié, vagyis a mozgó kiskocsinak fele akkora a tömege, mint az állóé → az összetapadt kocsik sebessége ⅓ v\*.*

A kísérlet azt mutatja, hogy a két összetapadt test sebességét nem csak a mozgó test sebessége határozza meg, hanem a testek tömegei is.

**IMPULZUS**

a tömeg és a sebesség szorzata:

**I** = m **v**

vektormennyiség, iránya megegyezik **v** vektor irányával;

mértékegysége: [kg∙m/s].

**AZ IMPULZUS MEGMARAD** az ütközések során.

Egyetlen magára hagyott test (ami nincs kölcsönhatásban semmivel) egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, vagyis úgy mozog, hogy sebességének se a nagysága, se az iránya nem változik, tehát a sebességvektora állandó, és így az impulzusa is állandó (nagysága és iránya is).

Két test kölcsönhatásba kerülhet egymással. Ekkor az egyes testek sebessége – és így impulzusa – megváltozhat, de a két test impulzusának az eredője (vektori összege) ugyanakkora az ütközés előtt és az ütközés után, tehát a kettőjük eredő impulzusa megmarad. Több testre is igaz, hogy az impulzusuk összege megmarad a kölcsönhatásuk előtti és utáni állapotot összehasonlítva. A testeket rendszernek tekintve az eredő impulzus megmarad.

Az impulzus megmaradásának az a feltétele, hogy olyan rendszert vizsgáljunk, ami nincs kölcsönhatásban a rendszeren kívüli testekkel.

Gyakorlati szempontból lehetséges, hogy a rendszer kölcsönhatásban van más testekkel (pl. a Föld vonzza, az asztal nyomja a testeket), de egyszerre több kölcsönhatás lép fel, amik kioltják egymást, az eredőjük nulla. Másrészt az is lehetséges, hogy nem nulla az eredő (pl. súrlódás miatt), de az ütközés olyan rövid ideig tart, hogy ennek a hatását elhanyagolhatjuk.

Az impulzus megmaradása alkalmazható

* ütközéseknél, ha két test összeragadva egy testként mozog tovább (rugalmatlan ütközés);
* a fordított jelenségnél: ha egy több testből álló rendszer több részre válik szét (pl. kocsiból kidobott tégla, robbanás, rakéta);
* és akkor is, ha ütközés után a két test külön testként mozog tovább.

**1B/3. (MÁ 535.)** Rugóval lökünk szét két golyót. Az egyik 1 kg és 8,75 m/s sebességű. A másik 3,7 m/s sebességet kapott. Mennyi ennek a golyónak a tömege?

Megoldás

Adatok:

Jelölje a testek tömegét mA és mB: mA = 1 kg, mB = ?;

a testek sebessége a szétlökődés előtt vA1 = vB1 = 0;

a testek sebességének nagysága a szétlökődés után │vA2│ és │vB2│:

│vA2│= 8,75 m/s, │vB2│= 3,7 m/s.

A két testből és a rugóból álló rendszer eredő impulzusa nem változik, miközben a rugó szétlöki őket. A rugó tömege elhanyagolható a testek tömegéhez képest, ezért a két test impulzusának összege egyezik meg a szétlökődés előtti és utáni állapotban.

A szétlökődés előtt a testek nyugalomban vannak, tehát az eredő impulzus zérus:

**I1** = 0 = mA **vA1** + mB **vB1** = **0**.

A szétlökődés után az eredő impulzus:

**I2** = mA **vA2** + mB **vB2** .

A sebességek egymással ellentétes irányúak (egydimenziós vektorok), az előjelük fogja mutatni a sebesség irányát. Ha az mA tömegű test sebességének az irányát vesszük pozitívnak, akkor az mB tömegű test sebessége negatív előjelű:

vA2 = 8,75 m/s; vB2 = – 3,7 m/s (de természetesen választhatnánk a másik lehetőséget is).

Az impulzus-megmaradást felírva:

**I1** = **I2** : mA vA2 + mB vB2 = 0

→ mB = – ( vA2 / vB2 ) ∙ mA ;

behelyettesítve

mB = – ( 8,75 / (–3,7) ) ∙ 1 = 2,365 kg.

**1B/4. (MÁ 536.)** Egy összenyomott rugó 0,2 kg és 0,3 kg tömegű, eredetileg nyugvó kiskocsikat úgy lök szét, hogy azok 5 s alatt 60 cm távolságra jutnak egymástól. A rugó tömege és a súrlódás elhanyagolható. Mekkora a kocsik sebessége?

Megoldás

Az **1B/3.** feladathoz hasonlóan itt is teljesül az impulzus-megmaradás feltétele, tehát felírhatjuk, hogy mA vA2 + mB vB2 = 0, mert a szétlökődés előtt a kocsik nyugalomban voltak, tehát a két kocsiból álló rendszer eredő impulzusa zérus volt. Itt azonban nem ismerjük sem az mA, sem az mB tömegű kocsinak a szétlökődés utáni sebességét (vA2-t ill. vB2-t), de tudjuk, hogy a megadott idő alatt összesen mennyit távolodtak egymástól (d = 60 cm-t).

Írjuk fel a testek x koordinátáját úgy, hogy a testek az origóból indulnak. Δt idő alatt

az mA tömegű test az xA koordinátájú pontba érkezik: xA = vA2 Δt;

az mB tömegű test az xB koordinátájú pontba érkezik: xB = vB2 Δt;

és a két test között távolság d = │ xA – xB │ = │vA2 – vB2│∙Δt .

Ez érvényes tetszőleges irányú sebességekre, ha a sebességeket előjelesen kezeljük.

Jelen esetben ellenkező irányba mozognak a kocsik.   
Válasszuk úgy az előjeleket, hogy vA2 > 0 és vB2 < 0, így d = (vA2 – vB2)∙Δt.

Két egyenletünk van tehát:

az impulzus-megmaradásra felírt mA vA2 + mB vB2 = 0,

és az elmozdulásra felírt d = (vA2 – vB2)∙Δt.

Fejezzük ki a másodikból vA2 -t:

vA2 = d / Δt + vB2,

és írjuk be az elsőbe:

mA vA2 + mB vB2 = mA ( d/Δt + vB2 ) + mB vB2 = mA ∙ d/Δt + ( mA + mB ) vB2 = 0

→ .

Adatok: mA = 0,2 kg; mB = 0,3 kg; Δt = 5 s; d = 60 cm = 0,6 m.

Behelyettesítve

= –0,4∙0,12 = –0,048 m/s = – 4,8 cm/s,

vA2 = 0,12 + (–0,048) = 0,072 m/s = 7,2 cm/s.

**1B/5. (MÁ 544.)** Terheléssel együtt 150 kg tömegű kocsi 10 m/s sebességgel halad. A kocsiból menetirányban kidobunk egy 30 kg tömegű ládát, a talajhoz viszonyított 15 m/s sebességgel. Mekkora a kocsi sebessége a láda kidobása után?

Megoldás

Adatok: mláda = 30 kg, mkocsi = 150–30 = 120 kg;

a kidobás előtt a kocsi és a láda sebessége megegyezik, mivel a láda még a kocsin van:

vkocsi,1 = vláda,1 = v1 = 10 m/s;

a kidobás után a láda sebessége a talajhoz képest: vláda,2 = 15 m/s.

Kérdés a láda kidobása után a kocsi sebessége a talajhoz képest: vkocsi,2 = ?

A kocsira és a ládára ható külső erők eredője zérus (a felület által kifejtett nyomóerő nagysága éppen megegyezik a nehézségi erővel), így tehát teljesül az impulzus-megmaradás feltétele. A kocsiból és a ládából álló rendszer eredő impulzusa nem változik, miközben a ládát kidobják.

Kidobás előtt:

I1 = (mkocsi + mláda) ⋅ v1 = (120+30)⋅10 = 1500 kg⋅m/s ;

Kidobás után:

I2 = mkocsi vkocsi,2 + mláda vláda,2 = 120 vkocsi,2 + 30⋅15 = 120 vkocsi,2 + 450 kg⋅m/s.

I2 = I1 : 120 vkocsi,2 + 450 = 1500 → vkocsi,2 = (1500–450) / 120 = 8,75 m/s .

**1B/6. (MÁ 538.)** Álló vízben két csónak egyenletesen halad egymás felé. Sebességük külön-külön 0,6 m/s. Amikor egymás mellé érnek, az egyikről a másikra 60 kg tömegű testet tesznek át. Ezután a másik csónak eredeti irányában 0,4 m/s sebességgel halad tovább. Mekkora ennek a második csónaknak a tömege, ha a víz ellenállása elhanyagolható?

Megoldás

A két csónakból és a 60 kg tömegű testből álló rendszer eredő impulzusa állandó. A feladat megoldása szempontjából most lényegtelen, hogy mekkora tömegű csónakról került át a „másik” csónakra a 60 kg tömegű test, mert annak a csónaknak a további mozgásával nem foglalkozunk. Az viszont lényeges, hogy a 60 kg tömegű test mozgásban volt, és tudjuk a sebességét.

Adatok:

Az „másik” (ismeretlen mcsónak tömegű) csónak sebessége

az átrakás előtt vcsónak,1 = 0,6 m/s volt,

az átrakás után vcsónak,2 = 0,4 m/s lett (lelassult, mert egy szemből érkező testet tettek rá).

Az mtest = 60 kg tömegű test sebessége

az átrakás előtt ellentétes irányú volt a csónakéval, sebességének nagysága 0,6 m/s volt, tehát vtest,1 = –0,6 m/s volt,

az átrakás után vtest,2 = 0,4 m/s lett (a csónakkal együtt halad).

Impulzus-megmaradást felírva a „másik” csónakból és az átrakott testből álló rendszerre:

az átrakás előtt:

I1 = mcsónak vcsónak,1 + mtest vtest,1 = 0,6 mcsónak + 60⋅(–0,6) = 0,6 mcsónak – 36 ;

az átrakás után:

I2 = mcsónak vcsónak,2 + mtest vtest,2 = 0,4 mcsónak + 60⋅0,4 = 0,4 mcsónak + 24 .

I1 = I2 : 0,6 mcsónak – 36 = 0,4 mcsónak + 24 → 0,2 mcsónak = 60 → mcsónak = 300 kg.

**1B/7. (MÁ 541.)** m1 tömegű lapos kocsi a talajon nyugalomban van. m2 tömegű személy (a talajon történő nekifutással) v sebességgel ráfut a kocsira, és ugyanilyen sebességgel fut le a kocsiról. Mi történik a kocsival? A kocsi és a talaj közötti súrlódástól eltekintünk.

Megoldás

A kocsiból és a futóból álló rendszerre alkalmazhatjuk az impulzus-megmaradást.

Három állapotot tudunk összehasonlítani:

1.) Mielőtt a futó fellép a kocsira:

a futó sebessége: vfutó,1 = v ;

a kocsi sebessége zérus: vkocsi,1 = 0.

2.) Miközben a futó a kocsin fut végig:

a futó sebessége: vfutó,2 = ? ismeretlen;

a kocsi sebessége: vkocsi,2 = ? ismeretlen.

3.) Miután a futó végigfutott a kocsin:

a futó sebessége: vfutó,3 = v (ugyanolyan sebességgel fut, mint a kocsira futás előtt);

a kocsi sebessége vkocsi,3 = ? ismeretlen.

A 2.) állapotról nem tudunk semmit, de az 1.) és 3.) állapotot össze tudjuk hasonlítani.

I1 = I3 : mfutó ∙ v + mkocsi ⋅ 0 = mfutó ∙ v + mkocsi ⋅ vkocsi,3 → vkocsi,3 = 0 .

Mivel a futó sebessége a kocsin való átfutás előtt és után megegyezik, ezért a kocsi sebessége is meg kell egyezzen a futó áthaladása előtt és után.

[A kocsi közben elmozdul valamennyit, mert a 2.) szakaszban mozgásban volt.]

**KIEGÉSZÍTŐ FELADAT ÉRDEKLŐDŐKNEK**

**1B/8. (MÁ 525.)** Gombfocijáték közben a 2 g tömegű labda és az 1,2 dkg tömegű játékos ütközik, és ezt követően a labda keleti irányban mozog 5 m/s, a játékos északra 0,5 m/s sebességgel.

**a)** Mekkora és milyen irányú a játékosból és labdából álló rendszer impulzusa?

**b)** Ütközés előtt mekkora és milyen irányú volt a labda sebessége, ha a játékos sebessége az ütközés előtt m/s volt, és sebességének iránya nem változott az ütközés során?

vlabda,2

vjátékos,2

vjátékos,1

Megoldás

A labdából és a játékosból álló rendszer impulzusa vektormennyiség, amit a labda ill. játékos egymásra merőleges sebessége alapján tudunk kiszámolni.

vlabda,2

vjátékos,2

vjátékos,1

x

y

Vegyünk fel egy koordinátarendszert úgy, hogy az x tengely mutat a keleti, és az y tengely az északi irányba.

Adatok: mjátékos = 1,2 dkg = 1,2∙10–2 kg; mlabda = 2 g = 2∙10–3 kg;

a sebességek nagysága

ütközés után: vjátékos,2 = 0,5 m/s; vlabda,2 = 5 m/s;

ütközés előtt: vjátékos,1 = m/s; vlabda,1 = ?

**a)** Ütközés után

a labda x irányban mozog, az impulzusának nagysága

Ilabda,2 = mlabda vlabda,2 = 2∙10–3 ∙ 5 = 10∙10–3 kg∙m/s;

a játékos y irányban mozog, az impulzusának nagysága

Ijátékos,2 = mjátékos vjátékos,2 = 1,2∙10–2 ∙ 0,5 = 6∙10–3 kg∙m/s.

Tudjuk tehát az impulzus komponenseit:

Ilabda,2 = Ix2 és Ijátékos,2 = Iy2 ,

és ebből kiszámolhatjuk az impulzus

nagyságát Püthagorasz-tétellel:

= 11,66∙10–3 kg∙m/s ;

és az x tengellyel bezárt szögét:

tgα2 = Iy2 / Ix2 = 6∙10–3 / 10∙10–3 = 0,6 → α2 = 30,96°.

Az eredő impulzus tehát északkeleti irányba mutat, kelettel 30,96°-ot (északkal 59,04°-ot) zár be, és a nagysága 11,66∙10–3 kg∙m/s.

**b)** Az impulzus-megmaradást vektor esetén komponensenként írhatjuk fel, vagyis az eredő impulzus megmaradása úgy teljesül, hogy mind a két komponense külön-külön megmarad:

Ix1 = Ix2 és Iy1 = Iy2.

Általános esetben mind a két komponensben szerepelhet a labda és a játékos impulzusa is, ha a sebességek nem speciálisan x ill. y irányúak. Általánosan úgy kellett volna felírnunk az **a)** rész megoldását, hogy az ütközés előtt a játékos sebességének x komponense vjátékos,x1 és y komponense vjátékos,y1; illetve az ütközés után vjátékos,x2 és vjátékos,y2; és hasonlóan a labdára is, tehát az impulzus-megmaradás komponensekben felírva így néz ki:

Ix1 = Ix2 : mjátékos vjátékos,x1 + mlabda vlabda,x1 = mjátékos vjátékos,x2 + mlabda vlabda,x2 és

Iy1 = Iy2 : mjátékos vjátékos,y1 + mlabda vlabda,y1 = mjátékos vjátékos,y2 + mlabda vlabda,y2 .

Mivel a feladatunkban

a játékos csak az y tengely mentén mozog az ütközés előtt és után is, így

vjátékos,x1 = 0 , vjátékos,x2 = 0,

a labda az ütközés után csak az x tengely mentén mozog, így

vlabda,y2 = 0,

ezért a feladat adatait pontosabban úgy kellett volna felírni, hogy

a sebességek komponensei

ütközés után: vjátékos,x2 = 0; vjátékos,y2 = 0,5 m/s; vlabda,x2 = 5 m/s; vlabda,y2 = 0 ;

ütközés előtt: vjátékos,x1 = 0; vjátékos,y1 = m/s; vlabda,x1 = ?; vlabda,y1 = ?

A nem-zérus tagok tehát

Ix1 = Ix2 : mlabda vlabda,x1 = mlabda vlabda,x2 és

Iy1 = Iy2 : mlabda vlabda,y1 + mjátékos vjátékos,y1 = mjátékos vjátékos,y2 .

Az x komponensből azt látjuk, hogy a labda ütközés előtti sebességének x komponense megegyezik az ütközés utánival: vlabda,x1 = vlabda,x2 = vlabda,2 = 5 m/s.

Ütközés előtt azonban a labda sebességének van y irányú komponense is, mert a játékos y irányú sebessége (és így impulzusa) megváltozik az ütközés során. Ezt kifejezhetjük a második egyenletből:

vlabda,y1 = (vjátékos,y2 – vjátékos,y1) ∙ mjátékos / mlabda .

Behelyettesítve

vlabda,y1 = ( 0,5 – ) ∙ 1,2∙10–2 / 2∙10–3 = 2 m/s.

A labda elvesztette azt az y irányú sebességét, és az ennek megfelelő impulzusát átadta a játékosnak, aki ettől felgyorsult (a sebessége megnőtt m/s-ról 0,5 m/s-ra).

vlabda,2

vjátékos,2

vjátékos,1

x

y

vlabda,1

A komponensekből kiszámolhatjuk a labda ütközés előtti sebességének

nagyságát Püthagorasz-tétellel:

= 5,385 m/s ;

és az x tengellyel bezárt szögét:

tgβ = vlabda,y1 / vlabda,x1 = 2 / 5 = 0,4 → β = 21,80°.

A sebessége tehát északkeleti irányba mutat, kelettel 21,80°-ot (északkal 68,20°-ot) zár be, és a nagysága 5,385 m/s.

**SZIMULÁCIÓ, AMIVEL ÉRDEMES JÁTSZANI:**

Ütközések: <https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/collision-lab>

**Mik a gyakorló feladatok a példatárból?**

* az I/1. fejezet minden feladata, kivéve a csillagosok;
* az I/2. fejezet minden feladata, kivéve a csillagosok;
* az I/3. fejezet minden feladata, kivéve a csillagosok;
* az I/14. fejezetből: 526., 527., 534. (kivéve erőlökés), 537., 539., 540., 550.a), 555.