# 1. TÉMAKÖR: KINEMATIKA

1. GYAKORLAT

**Információk a tárgyról**

A középiskolai fizika tananyag néhány olyan fejezetét nézzük át, amik hasznosak lesznek a későbbi szaktárgyakban. Néhány esetben a középiskolai szintet meghaladó szinten tárgyaljuk az adott témakört, felhasználva azt a matematikatudást, amit középiskolában az után sajátítottak el, miután fizikából az adott témát már lezárták. Egyetemi szintű matematikai ismereteket nem igényel ez a tantárgy.

6 témakör lesz dupla órákkal (vagyis 12 hétre van tananyag). A feladatmegoldások előtt ismertetjük az elméleti hátteret, és kísérleteket is mutatunk be az adott témakörben, részben demonstrációs céllal, de egy-egy kísérletet ki is értékelünk (megmérünk valamit és abból kiszámolunk valamit).

Minden témakörből lesz egy 15 perces kis zh a következő témakör első óráján. A zh-k anyaga a példatár kijelölt szakaszából egy számolási feladat, esetleg még egy tesztkérdés vagy egy rövid elméleti kérdés is. A 6 zh-ból a 4 legjobb zh-t vesszük figyelembe, pótzh nem lesz. Egy-egy zh max. 20 pontos.

A zh-kon kívül minden hallgatónak egyszer a félévben tartania kell egy kb. 5 perces szóbeli beszámolót a táblánál a csoport előtt az adott témakör második órájának az elején egy olyan feladatból, amit az előző héten megkap, és az előző héten elhangzó információk alapján megoldható. Enélkül a félév nem teljesíthető; pótlási lehetőséget biztosítunk az utolsó héten. Ez a beszámoló max. 20 pontot ér és kötelezően teljesítendő.

A 4 legjobb zh és a beszámoló pontszámának összege alapján alakul ki a félévközi jegy. Ha a szóbeli beszámoló el van fogadva, akkor az osztályzat

50 – 2<br>
62 – 3<br>
74 – 4<br>
86 – 5

A pótlási héten pótpót zh írható a teljes anyagból különeljárási díj megfizetése mellett.

**Bevezetés**

A fizika egy kísérleti tudomány.

A tudományos megismerési folyamat lépései:

> ***megfigyelés, kísérlet, mérések $\rightarrow$ tapasztalatok, mérési adatok rendszerezése $\rightarrow$ hipotézisek, modellalkotás $\rightarrow$ jóslat a további kísérletek kimenetelére $\rightarrow$ ellenőrzés kísérlettel, méréssel $\rightarrow$ ***

A fizikai mennyiségeket mérőszámmal és mértékegységgel adjuk meg.

A számolást nagyban megkönnyíti az SI alapmennyiségek használata.

Prefixumok

| neve | jele | értéke |
|---|---|---|
| tera | T | $10^{12}$ |
| giga | G | $10^{9}$ |
| mega | M | $10^{6}$ |
| kilo | k | $10^{3}$ |
| hekto | h | $10^{2}$ |
| deka | da | $10^{1}$ |
| deci | d | $10^{-1}$ |
| centi | c | $10^{-2}$ |
| milli | m | $10^{-3}$ |
| mikro | $\mu$ | $10^{-6}$ |
| nano | n | $10^{-9}$ |
| piko | p | $10^{-12}$ |

**Derivált, integrál jelentése**

COVID-19 görbék elemzése

Induljunk ki a kumulatív esetszámot bemutató diagramból. A kumulatív esetszámot bemutató diagram napi növekedése megadja a napi új fertőzöttek számát. A kumulatív esetszámnál a függőleges tengelyen ábrázolt mennyiség mértékegysége „fő”, a napi új fertőzöttek mértékegysége pedig „fő/nap”. Ez az egy napra vonatkoztatott átlagos változási sebesség, ami jellemzi a fertőzöttek számának növekedését, külön diagramon is ábrázolható. A napi új fertőzöttek számát bemutató diagram adott napi értéke a kumulatív esetszámot mutató diagram meredeksége. Ha ennél részletesebb adataink vannak, finomíthatjuk a felosztást. Ha folytonos a görbe, az egyre finomabb felosztás határértékeként megkapjuk a pillanatnyi változási sebességet. Ez a függvény deriváltja abban a pillanatban. Grafikusan tekintve ez a görbe érintőjének meredeksége. A deriválás mint matematikai művelet függvényhez függvényt rendel (ebben a tárgyban nem lesz szükség ezekre az ismeretekre). A fizikában vizsgált folyamatok szempontjából azt lényeges tudnunk, hogy a derivált függvény adott pillanathoz tartozó értéke azt jellemzi, hogy mennyi a vizsgált mennyiség változási sebessége abban a pillanatban.

Hogyan kapjuk meg a kumulatív esetszámot, ha a napi új fertőzötteket bemutató diagramból indulunk ki? Össze kell adogatni a napi esetszámot, amit úgy kapunk meg, hogy a változási sebességet szorozzuk a változás idejével. A mértékegységeket tekintve a „fő/nap” szorozva a „nap”-pal adja a „fő”-t. Ez grafikusan a napi esetszám diagramján egy téglalap területe, és ezeket a területeket összegezve kapjuk a kumulatív esetszámot. Finomabb beosztás esetén belátható, hogy az összegzéssel a görbe alatti területet kapjuk meg. Ez tehát azt jelenti, hogy ha ismerjük egy mennyiség változási sebességét, akkor abból összegzéssel megkapjuk a kérdéses mennyiség pillanatnyi értékét: ez az integrálás lényege. Vegyük észre, hogy az integrál csak a kérdéses mennyiség növekményét adja meg! Szükségünk van annak ismeretére is, hogy a mennyiség milyen értékről indult (kezdeti értékre).

Nézzük most az aktív esetek aktuális értékének diagramját: itt a meredekség lehet negatív is. A fertőzöttek összes számának szempontjából a gyógyultak számát negatív előjellel kell figyelembe venni. A napi fertőzöttek és a napi gyógyultak számát ábrázoló diagramokból kiindulva az aktív esetek száma integrálással kapható meg, úgy, hogy a két diagram görbe alatti területét összegezzük, úgy, hogy a napi gyógyultak számából származó terület negatív.

Mit jelent az átlagérték? Azt az értéket, ami az adott időintervallumot tekintve ugyanakkora változást hoz létre, mint amekkora a változó érték esetén létrejön. Grafikusan ez azt az értéket jelenti a függőleges tengelyen, amekkora értékkel az adott időintervallumhoz tartozó téglalap területe megegyezik az eredeti görbe alatti területtel.

**<u>Hely – sebesség – gyorsulás</u>**

Középiskolában az „út" kiszámítására voltak képletek, de célszerű ehelyett a test helyéről beszélni, amiből a test mozgása esetén meghatározható a megtett út. A test sebessége azt mutatja, hogy éppen mennyire változik a test helye. A test gyorsulása pedig azt mutatja, hogy éppen mennyire változik a test sebessége. (Általánosan és tömören fogalmazva tehát azt mondhatjuk, hogy a sebesség a hely deriváltja, a gyorsulás pedig a sebesség deriváltja, de ezzel majd csak a Fizika1 –Mechanika tárgyban foglalkozunk. Most maradunk egyszerű speciális mozgásoknál, de aki tud deriválni, felismerheti ezt az alkalmazott képletekben.)
Fontos megkülönböztetni a sebességet és a gyorsulást!
*KÍSÉRLET: Vízzel feltöltött lombikban alulról fonállal rögzített parafadugó vagy szivacsos műanyag darabka a lombik mozgatása közben a pillanatnyi gyorsulás irányát mutatja. Egyenletes mozgás közben a fonál függőleges, mivel akkor a gyorsulás zérus.*
A hely, a sebesség, és a gyorsulás <u>vektor</u>ok (azaz nem csak nagyságuk, hanem irányuk is van). A helyvektor egy vonatkoztatási pontból mutat a test helyére. A sebességvektor iránya azt mutatja, hogy merre mozdul el a test. A gyorsulásvektor a sebességvektor változását mutatja: ha egy irányba mutat a sebességvektorral, akkor a sebesség nagysága nőni fog, ill. ha ellenkező irányba mutat vele, akkor a sebesség nagysága csökkenni fog. Előfordul azonban az is, hogy a sebességvektor egyenese és a gyorsulásvektor egyenese nem esik egybe, ilyenkor meg fog változni a sebességvektor iránya, ami azt jelenti, hogy a test „kanyarodni" is fog, görbe vonalú mozgást végez.

**<u>Egyenletes mozgás, egyenletesen változó mozgás az x tengely mentén</u>**

Felejtsük el az „s = vt" képletet, a test helyét az x koordinátájával adjuk meg, és általános képleteket írunk fel, amikben az egyes mennyiségek előjelesek (nem a képletekben lesznek előjelek).

**Egyenletes mozgás**: $v$ = konst.
A $v$ sebesség előjeles mennyiség (egydimenziós vektor). Először megválasztjuk az $x$ tengely irányítottságát. Az $x$ növekedésének irányába mutató sebesség pozitív előjelű, az $x$ csökkenésének irányába mutató sebesség negatív előjelű.
A test helye az idő függvényében, ha $t=0$-ban az $x_0$ pontból indul: $x = x_0 + vt$.
A gyorsulás zérus ($a=0$).

**Egyenletesen változó mozgás**: $a$ = konst.
Az $a$ gyorsulás is előjeles mennyiség, az $x$ növekedésének irányába mutató gyorsulás pozitív előjelű.
A test sebessége egyenletesen változik: $v = v_0 + at$, ha $t=0$-ban a test sebessége $v_0$.
A test helye: $x = x_0 + v_0t + ½at^2$.
A sebesség és a gyorsulás előjelétől függően 4 eset állhat elő:
- $v>0$ és $a>0$: az $x$ növekedésének irányába halad egyre gyorsabban;
- $v>0$ és $a<0$: az $x$ növekedésének irányába halad egyre lassabban;
- $v<0$ és $a<0$: az $x$ csökkenésének irányába halad egyre gyorsabban;
- $v<0$ és $a>0$: az $x$ csökkenésének irányába halad egyre lassabban.

Megjegyzések:
1. Vegyük észre, hogy az egyenletes mozgást leíró képleteket megkapjuk úgy, hogy az egyenletesen változó mozgás képletébe $a = 0$-t helyettesítünk.
2. Jelölés: $v = v_0 + at$ és $x = x_0 + v_0t + ½at^2$ a sebesség ill. a helykoordináta időfüggését írja le, jelölhetjük $v(t)$-vel ill. $x(t)$-vel is, de a rövidség kedvéért ezt sokszor elhagyjuk.

**FELADATOK**

**1A/1. (MÁ 4.)** Egy vízmelegítő percenként 9,6 $dm^3$ vizet enged át. Hány m/s sebességgel folyik a víz a 2 $cm^2$ keresztmetszetű csapból?
Megoldás
A víz m/s-ban kifejezett $v$ kifolyási sebessége azt jelenti, hogy $\Delta t$ (s-ban kifejezett) idő alatt a víz $\Delta x$ (m-ben kifejezett) távolságot mozdul előre a csőben. A cső $A$ keresztmetszetével való szorzással kapjuk az adott idő alatt átment $\Delta V$ térfogatot. Tehát $v = \Delta x/\Delta t$ és $\Delta x \cdot A = \Delta V$, amiből
$v = (\Delta V/\Delta t)/A$, tehát a $\Delta V/\Delta t$ térfogatáramot osztani kell a cső keresztmetszetével.
Behelyettesítés:
$\Delta t$ = 1 perc = 60 s; $\Delta V$ = 9,6 $dm^3$ = $9{,}6\cdot10^{-3}$ $m^3$; $A$ = 2 $cm^2$ = $2\cdot10^{-4}$ $m^2$;
$v = (\Delta V/\Delta t)/A = (9{,}6\cdot10^{-3}\ m^3 / 60\ s) / 2\cdot10^{-4}\ m^2 = 0{,}8$ m/s.

**1A/2. (MÁ 8.)** Két autó egyszerre indul egymással szemben 20 km távolságból. Mekkora köztük a távolság negyed óra múlva, ha az egyik sebessége 25 km/h, a másiké 11 m/s?

Megoldás

Mindkét test egyenletes mozgást végez: $x = x_0 + vt$,

vagyis $x_1 = x_{01} + v_1 t$ és $x_2 = x_{02} + v_2 t$ .

Az egyik autó indulási $x_{01}$ koordinátáját vegyük zérusnak, így a másiké $x_{02}$ = 20 km = 20000 m;

a sebességek nagysága: $|v_1|$ = 25 km/h, ill. $|v_2|$ = 11 m/s.

Hogyan váltunk át mértékegységet? $1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{1000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = \frac{1}{3{,}6}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$,

tehát a $v_1$ sebesség nagysága SI alapmennyiségekkel: $|v_1|$ = 25/3,6 = 6,944 m/s,

ill. a $v_2$ sebesség nagysága km/h-ban: $|v_2|$ = 11·3,6 = 39,6 km/h.

A két autó egymással szembe megy, ezért az egyik sebesség előjele negatív kell legyen. Ha az x tengelyt úgy vesszük fel, hogy az arra mutat, amerre az 1-es autó megy, akkor a 2-es autó sebessége negatív: $v_2$ = –11 m/s = –39,6 km/h.

A helykoordináták így

SI alapegységekkel felírva: $x_1 = 6{,}944\ t$ és $x_2 = 20000 - 11\ t$ : itt t s-ban értendő; ill.

km/h-ban felírva: $x_1 = 25\ t$ és $x_2 = 20 - 39{,}6\ t$ : itt t h-ban értendő.

Helyettesítsük be a megadott időt:

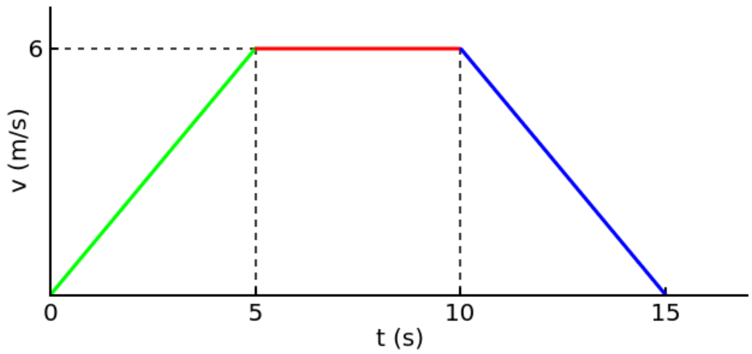
SI alapegységekkel t* = 0,25 h = 0,25 h · 3600 (s/h) = 900 s:

$x_1$ = 6,944·900 = 6250 m és $x_2$ = 20000 – 11·900 = 10100 m;

km/h-ban felírva: $x_1$ = 25·0,25 = 6,25 km és $x_2$ = 20 – 39,6·0,25 = 10,1 km.

A két autó közötti távolság d = $|x_1 - x_2|$ = 3850 m = 3,85 km.

**1A/3. (MÁ 75.)** Az ábra egy felvonó emelkedésének sebesség–idő diagramja.




**a)** Hány métert emelkedett a felvonó a 15 s alatt?

**b)** Mennyi volt az átlagsebessége?

**c)** Rajzoljuk fel a felvonó gyorsulását és a kiindulási szinttől mért magasságát is az idő függvényében!

Megoldás

A mozgás szakaszonként egyenletesen változó mozgás:

$v(t) = v_0 + at$ és $x(t) = x_0 + v_0 t + ½at^2$.

Minden mennyiséget SI alapmennyiségekkel írunk fel.

A 0 – 5 s között

a kiinduló koordináta $x_{01} = 0$;

a kezdősebesség $v_{01} = 0$;

a gyorsulás: $a_1 = \Delta v/\Delta t = (6–0)/(5–0) = 1{,}2\ m/s^2$ (pozitív, a lift sebessége nő);

$\rightarrow$ $v_1(t) = a_1t = 1{,}2t$ és $x_1(t) = ½a_1t^2 = 0{,}6t^2$;

5 s-ban $x_1(5) = 0{,}6\cdot5^2 = 15$ m (és ellenőrizhetjük, hogy $v_1(5) = 1{,}2\cdot5 = 6$ m/s).

Az 5 – 10 s között

mivel ez a szakasz az 5 s-nál kezdődik, ezért ezen a szakaszon $t_2 = t – 5$ s;

a kiinduló koordináta $x_{02} = x_1(5) = 15$ m;

a (kezdő)sebesség $v_{02} = v_1(5) = 6$ m/s;

a gyorsulás zérus;

$\rightarrow$ $v_2(t) = 6$ m/s és $x_2(t) = 15 + 6\cdot(t–5)$;

10 s-ban $x_2(10) = 15 + 6\cdot5 = 45$ m.

A 10 – 15 s között

mivel ez a szakasz a 10 s-nál kezdődik, ezért ezen a szakaszon $t_3 = t – 10$ s;

a kiinduló koordináta $x_{03} = x_2(10) = 45$ m;

a kezdősebesség $v_{03} = v_2(10) = 6$ m/s;

a gyorsulás $a_3 = \Delta v/\Delta t = (0–6)/(15–10) = –1{,}2\ m/s^2$ (negatív, a lift sebessége csökken);

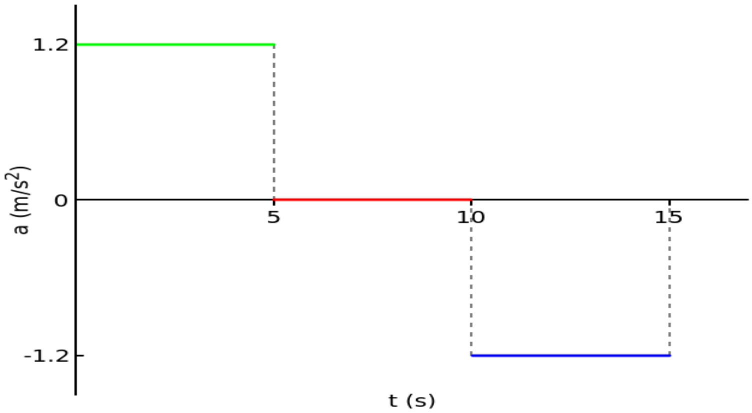
$\rightarrow$ $v_3(t) = 6 – 1{,}2(t–10)$ és $x_3(t) = 45 + 6(t–10) – 1{,}2(t–10)^2$;

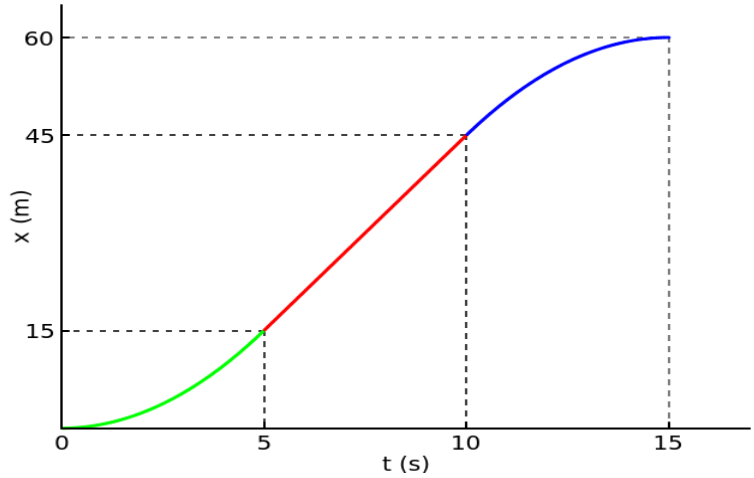
15 s-ban $x_3(15) = 45 + 6\cdot5 – 0{,}6\cdot5^2 = 60$ m

(és ellenőrizhetjük, hogy $v_3(15) = 6 – 1{,}2\cdot5 = 0$ m/s).

**a)** A felvonó emelkedése $x_3(15) = 60$ m volt.

**b)** A felvonó átlagsebessége $v_{átl} = \Delta x/\Delta t = (60–0)/(15–0) = 4$ m/s volt.



**1A/4. (MÁ 61.)** Elkerülhető-e az összeütközés, ha az 54 km/h sebességgel haladó jármű előtt 95 m távolságban forgalmi akadály bukkan fel, és a jármű 1,25 m/s$^2$ lassulással fékezhető? Vegyük figyelembe, hogy az akadály észlelése és a fékezés kezdete között a reakcióidő 1 s. (A féktávolság a reakcióidő és a fékezés alatt megtett út.)

Megoldás

A jármű az első másodpercben egyenletes mozgás végez:

$v_1$ = 54 km/h = 15 m/s   és   $x_1(t) = v_1 t = 15t$;  t = 1 s-nál  $x_1(1) = 15\cdot 1 = 15$ m.

Ezután kezd lassulni. Ezen a szakaszon

$t_2 = t - 1$ s (mivel ez a szakasz t = 1 s-nál kezdődik);

$x_{02} = x_1(1) = 15$ m;

$v_{02} = v_1 = 15$ m/s;

$a_2 = -1{,}25$ m/s$^2$ (negatív a gyorsulás, mert a test lassul).

Többféleképpen számolhatunk:

**1.)** A lassuló szakaszra $t_2$-vel írjuk fel a sebességet és a helyet ($t_2$ a lassulás ideje, 1 s-nál kezdődik):

$v_2(t_2) = 15 - 1{,}25t_2$   és   $x_2(t_2) = 15 + 15t_2 - 0{,}625t_2^2$.

Kiszámoljuk azt a $t_2^*$ időt, amennyi ahhoz szükséges, hogy a jármű megálljon, azaz $v_2 = 0$ legyen:

$15 - 1{,}25t_2^* = 0 \;\rightarrow\; t_2^* = 12$ s

(ezt számolhatjuk úgy is, hogy $a = \Delta v/\Delta t \;\rightarrow\; \Delta t = \Delta v/a = (0-15)/(-1{,}25) = 12$ s),

és ezt az időt behelyettesítjük az $x_2(t_2)$ függvénybe: $x_2(12) = 15 + 15\cdot 12 - 0{,}625\cdot 12^2 = 105$ m.

Az ütközés tehát nem kerülhető el.

**2.)** Hasonló, de kissé bonyolultabb, ha t-vel írjuk fel a képleteket (t a teljes idő, 0 s-nál kezdődik):

$v_2(t) = 15 - 1{,}25(t-1)$   és   $x_2(t) = 15 + 15(t-1) - 0{,}625(t-1)^2$.

Az a $t^*$ időpont, amikor a jármű megáll, azaz $v_2 = 0$:

$15 - 1{,}25(t^*-1) = 0 \;\rightarrow\; t^* = 13$ s,

ezt behelyettesítve az $x_2(t)$ függvénybe: $x_2(13) = 15 + 15\cdot 12 - 0{,}625\cdot 12^2 = 105$ m.

**3.)** Bonyolultabb, ha először azt a $t_2'$ időt számoljuk ki, amikor a jármű 95 m-hez ér:

$x_2(t_2) = 15 + 15t_2' - 0{,}625t_2'^2 = 95 \;\rightarrow\; 0{,}625t_2'^2 - 15t_2' + 80 = 0$

$\rightarrow\; t_2' = 8$ s  (16 s is megoldás, de annak nincs fizikai értelme),

és ezt behelyettesítve a $v_2(t_2)$ függvénybe kiszámolhatjuk, hogy oda érkezve mekkora a jármű sebessége: $v_2(8) = 15-1{,}25\cdot 8 = 5$ m/s, tehát 95 m-nél a jármű még mozgásban van.

**4.)** Rendezhetjük a  $v_2(t_2^*) = v_{02} + at_2^* = 0$  és  $x_2(t_2^*) = x_{02} + v_{02}t_2^* + ½at_2^{*2}$  képleteket, hogy ne kelljen a $t_2^*$ időt kiszámolni: a sebességből:  $t_2^* = -v_{02}/a$ , és ezt beírjuk a hely függvényébe:

$x_2 = x_{02} + v_{02}\cdot(-v_{02}/a) + ½a(-v_{02}/a)^2 = x_{02} - v_{02}^2/a + ½ \cdot v_{02}^2/a = x_{02} - ½ \cdot v_{02}^2/a$.

Ebbe behelyettesítve:  $x_2 = x_{02} - ½ \cdot v_{02}^2/a = 15 - ½ \cdot 15^2/(-1{,}25) = 105$ m.

**<u>Függőleges hajítás, szabadesés</u>**

A földfelszín közelében a nehézségi erő miatt minden testnek állandó nagyságú gyorsulása van függőlegesen lefelé, ezért a függőleges hajítás és a szabadesés egyenletesen változó mozgás.

Az összes számolási feladatban g = 10 m/s$^2$ értékkel számolunk.

A függőleges koordinátára a szokásos jelölés nem x, hanem z (ill. lehet y is, de a Fizika1 – Mechanika tárgy számolási feladataiban is z fogja jelölni).

A z tengely felfelé mutat, ezért a = –g. A kezdősebesség és a pillanatnyi sebesség előjele attól függ, hogy a test felfelé vagy lefelé mozog: felfelé pozitív, lefelé negatív.

Ezzel tehát $v(t) = v_0 - gt$ és $z = z_0 + v_0t - ½gt^2$

Szabadesésnél $v_0 = 0$, ezért $v(t) = -gt$ és $z = z_0 - ½gt^2$.

**FELADATOK**

**1A/5. (MÁ 94.)** Legalább milyen hosszú ejtőzsinórt kell készítenünk, ha 5 koppanást szeretnénk hallani egyenletes időközönként, és az első golyót a fémlemeztől 7 cm távolságra rögzítettük?

<u>Megoldás</u>

Az összes golyó szabadesést végez adott magasságból, tehát $z_i = z_{0i} - ½gt_i^2$, i = 1 … 5.

$z_{0i}$ a kiindulási magasság a fémlemezhez képest, vagyis a golyók akkor koppannak, amikor $z_i = 0$, tehát a kiindulási magasságok az esés idejével kifejezve: $z_{0i} = ½gt_i^2$.

A koppanásoknak egyenletesen kell követniük egymást:

$t_2 = t_1 + t_1 = 2\,t_1$, $t_3 = t_2 + t_1 = 3\,t_1$, … , általánosan $t_i = i\cdot t_1$ ($t_1$ a legalsó golyó leesésének ideje).

Ebből kifejezhetjük a $z_{0i}$ kiindulási magasságok arányát:

$z_{0i} = ½g\cdot(i\cdot t_1)^2 = i^2\cdot ½gt_1^2 = i^2\cdot z_{01}$.

A golyóknak tehát négyzetesen növekvő magasságból kell indulniuk.

A legalsó golyó 7 cm magasról indul: $z_{01}$ = 0,07 m $\rightarrow$ a második golyó $z_{02} = 2^2\cdot 0{,}07 = 0{,}28$ m magasról, a harmadik golyó $z_{03} = 3^2\cdot 0{,}07 = 0{,}63$ m magasról, a negyedik golyó $z_{04} = 4^2\cdot 0{,}07 =$ 1,12 m magasról, és az ötödik golyó $z_{05} = 5^2\cdot 0{,}07 = 1{,}75$ m magasról.

[Nem kérdés, de kiszámolhatjuk a koppanások között eltelt időt:

$z_{01} = ½gt_1^2 = 0{,}07$ m $\rightarrow$ $t_1 = 0{,}12$ s.]

*KÍSÉRLET: Kötélre egyenletes távolságban, ill. négyzetesen növekvő távolságban fűzünk fel anyacsavarokat, és leejtve megfigyeljük az anyacsavarok koppanása között eltelt időt. Füllel is érzékelhető a különbség, de a hangot rögzíthetjük is (pl. Audacity), és onnan leolvasható a koppanások között eltelt idő.*

**1A/6. (MÁ 108.)** Egy lift 14,7 m/s sebességgel süllyed. A lift mellett leejtünk egy követ.

**a)** Mikor és hol találkozik a lift a kővel, ha elég hosszú még lefelé a liftakna?

**b)** Mikor egyenlő a kő és a lift sebessége?

Megoldás

A lift és a kő helyét kell az idő függvényében felírni arra ügyelve, hogy azonos koordinátarendszerben adjuk meg a helyüket. A z = 0 helyet mi választhatjuk meg úgy, hogy a legegyszerűbb legyen a számolás: legyen pl. az a hely, ahonnan indul a lift és a kő. Így az egyenletesen süllyedő liftre $z_{lift}(t) = -v_{lift}t$ és
a szabadesést végző kőre $z_{kő}(t) = -½gt^2$ .

**a)** Akkor találkoznak, ha $z_{lift}(t^*) = z_{kő}(t^*)$, vagyis $-v_{lift}t^* = -½gt^{*2}$.
A $t^*_1 = 0$ megoldás a közös kiindulási állapotra vonatkozik. A másik megoldás
$t^*_2 = 2v_{lift}/g = 2·14{,}7/10 = 2{,}94$ s , ekkor éri utol a kő a liftet.
A találkozás helye kiszámolható bármelyik z(t) függvénybe való behelyettesítéssel:
$z^* = -v_{lift}\, t^*_2 = -14{,}7·2{,}94 = -43{,}22$ m, ill. $z^* = -½g{t^*_2}^2 = -0{,}5·10·2{,}94^2 = -43{,}22$ m;
tehát 43,22 m-rel lejjebb találkoznak.

**b)** A lift sebessége konstans: $v_{lift} = -14{,}7$ m/s , a kőé pedig egyenletesen nő: $v_{kő}(t) = -gt$.
$v_{kő}(t') = v_{lift}$ , ha $-gt' = v_{lift}$ $\rightarrow$ $t' = -v_{lift}/g = -(-14{,}7)/10 = 1{,}47$ s.
[Egyébként ekkor nincsenek egymás mellett, a lift $z_{lift}(t') = -14{,}7·1{,}47 = -21{,}61$ m-nél, a kő pedig $z_{kő}(t') = -0{,}5·10·1{,}47^2 = -10{,}80$ m-nél van (még nem érte utol a liftet).]

---

**Ferde hajítás**

Ha távolabbról nézzük, ahogy egy egyenletesen haladó teherautó platóján valaki leejt egy testet, vagy függőlegesen felfelé ill. lefelé elhajít, akkor azt látjuk, hogy a függőleges mozgás közben vízszintes irányban is elmozdul a test egyenletes sebességgel. Hasonló mozgás jön létre akkor is, ha a testet úgy hajítjuk el, hogy mi adunk a testnek vízszintes irányú sebességet. Ez a vízszintes irányú sebesség nem fog változni, mert a test g gyorsulása függőleges, és mivel a g gyorsulásnak nincs vízszintes komponense, ezért a sebesség vízszintes komponense állandó marad.

*KÍSÉRLET: Két test egy időben indul azonos magasságból: az egyik vízszintes kezdősebességgel, a másik kezdősebesség nélkül szabadon esik. Egyszerre érnek földet, ami azt mutatja, hogy a vízszintesen meglökött test vízszintes irányú elmozdulása nem befolyásolja a függőleges irányú mozgását, a vízszintes és a függőleges irányú mozgások egymástól függetlenek.*

A ferde hajítás tehát egy vízszintes irányú egyenletes mozgás és egy függőleges irányú egyenletesen változó mozgás eredője.

Képletek:

A mozgás az x – z síkban történik, a z tengely felfelé mutat.
A test gyorsulásának komponensei:

vízszintes: $a_x = 0$;
függőleges: $a_z = -g$.

A kezdősebesség nagysága $v_0$, a vízszintessel $\alpha$ szöget zár be. $\alpha$ pozitív, ha ferdén felfelé hajítunk, ill. $\alpha$ negatív, ha ferdén lefelé hajítunk. Ebből a kezdősebesség komponensei:
$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0z} = v_0 \sin\alpha$.
A test sebességének komponensei:

vízszintes: $v_x = v_{0x} = \text{konst.}$;

függőleges: $v_z = v_{0z} - gt$ .

Ha $v_z>0$, akkor a test emelkedik, ill. ha $v_z<0$, akkor a test esik lefelé. Mivel gt előjele negatív, egy idő után $v_z$ előjele akkor is negatív lesz (azaz esik lefelé), ha $v_{0z}$ pozitív volt (felfelé dobtuk el a testet). Az előjelek alkalmazásával a hajítás felfelé ill. lefelé mutató szakasza egyben kezelhető.
A test helyvektorának komponensei:

vízszintes: $x = x_0 + v_{0x}t$ ;

függőleges: $z = z_0 + v_{0z}t - ½gt^2$ .

<u>Speciális esetek:</u>
Függőleges hajítás:

sebessége: vízszintes: $v_x = 0$; függőleges: $v_z = v_0 - gt$ ;

helyének komponensei: vízszintes: $x = x_0$ ; függőleges: $z = z_0 + v_0t - ½gt^2$ .

Vízszintes hajítás:

sebessége: vízszintes: $v_x = v_0 = \text{konst.}$; függőleges: $v_z = - gt$ ;

helyének komponensei: vízszintes: $x = x_0 + v_0t$ ; függőleges: $z = z_0 - ½gt^2$ .

**FELADATOK**

**1A/7. (MÁ 132.)** Egy testet 25 m/s kezdősebességgel, 60°-os szögben ferdén elhajítunk. Hol van 2 s múlva, és mekkora a sebessége?
<u>Megoldás</u>
A test helyének vízszintes koordinátája $x = x_0 + v_{0x}t$, függőleges koordinátája $z = z_0 + v_{0z}t - ½gt^2$.
$x_0$ és $z_0$ választható zérusnak.
$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 25\cdot\cos60^\circ = 12{,}5$ m/s; $v_{0z} = v_0 \sin\alpha = 25\cdot\sin60^\circ = 21{,}65$ m/s, tehát
$x(t) = 12{,}5t$ és $z(t) = 21{,}65t - 5t^2$.
Behelyettesítve t = 2 s-ot $x(2) = 12{,}5\cdot2 = 25$ m; $z(2) = 21{,}65\cdot2 - 5\cdot2^2 = 23{,}30$ m.
A test tehát vízszintesen mérve 25 m-t távolodott az elhajítás helyétől, és 23,30 m-rel van magasabban annál a magasságnál, ahonnan elhajították.
A test sebességének komponensei $v_x = v_{0x} = 25\cdot\cos60^\circ = 12{,}5$ m/s (állandó), és
$v_z(t) = v_{0z} - gt = 25\cdot\sin60^\circ - 10t = 21{,}65 - 10t$,
ami t = 2 s-nál $v(2) = 21{,}65 - 10\cdot2 = 1{,}651$ m/s (pozitív, tehát a test még emelkedik).
[Hogy miért nem 1,65 m/s-ot írunk? Mert kerekítésnél a számokat 4 értékes jeggyel írjuk le, a számolásokban viszont mindig a pontos értéket visszük tovább. A $v_{0z} = v_0 \sin\alpha = 25\cdot\sin60^\circ$ értéke pontosabban megadva 21,65063509 m/s, ami 4 értékes jegyre kerekítve 21,65 m/s,

viszont a $v(2) = 25 \cdot \sin 60° - 10 \cdot 2$ értéke pontosabban 1,650635095 m/s, ami 4 értékes jegyre kerekítve 1,651 m/s.]
A test sebességének nagysága Püthagorasz-tétellel: $v(2) = \sqrt{(12{,}5^2 + 1{,}651^2)} = 12{,}61$ m/s.

*KÍSÉRLET: A locsolókannából kifolyó víz által leírt pálya parabola.*

**1A/8. (MÁ 127.)** Egy testet 60°-os szögben ferdén elhajítunk 25 m/s kezdősebességgel.
**a)** Mikor ér a pálya tetőpontjára?
**b)** Milyen magasan van a tetőpont?
**c)** Mikor ér újra az elindítás magasságába?
**d)** Milyen távol ér újra az elindítás magasságába?
Megoldás
**a)** A test az elhajítás után egy ideig emelkedik, vagyis a sebességének a függőleges komponense pozitív, majd a pálya tetőpontját elérve esni kezd, vagyis a sebességének a függőleges komponense negatív lesz. A pálya tetőpontján akkor van a test, amikor a sebességének a függőleges komponense zérus. (A test nem áll meg a pálya legfelső pontján, mert a vízszintes sebessége állandó; csak a függőleges sebessége lesz egy pillanatra zérus.)
$v_z(t) = v_{0z} - gt = v_0 \sin\alpha - gt = 25 \cdot \sin 60° - 10t = 21{,}65 - 10t$;
$v_z(t_h) = 0 \quad \rightarrow \quad t_h = v_{0z}/g = 2{,}165$ s.
**b)** A test helyének függőleges koordinátája $z = z_0 + v_{0z}t - ½gt^2$.
$z_0$ választható zérusnak; $z(t) = v_{0z}t - ½gt^2 = v_0 \sin\alpha - ½gt^2 = 21{,}65t - 5t^2$.
A pálya csúcspontjának a magasságát úgy kapjuk meg, hogy ebbe behelyettesítjük $t_h$ értékét:
$h = z(t_h) = 21{,}65t - 5t_h^2 = 21{,}65 \cdot 2{,}165 - 5 \cdot 2{,}165^2 = 23{,}44$ m.
[Vagy megtehetjük, hogy először a képleteket rendezzük, és h-t kifejezzük a kezdősebességgel:
$h = v_{0z}t_h - ½gt_h^2 = v_{0z} \cdot v_{0z}/g - ½g\,(v_{0z}/g)^2 = ½v_{0z}^2/g = 0{,}5 \cdot (25 \cdot \sin 60°)^2/10 = 23{,}44$ m.]
**c)** Amikor a test az elhajítás magasságába ér, akkor ugyanakkora a z koordinátája, mint az elhajításkor ($z_0 = 0$ volt a választásunk), tehát
$z(t_d) = v_{0z}t_d - ½gt_d^2 = 21{,}65t_d - 5t_d^2 = 0 \quad \rightarrow$
ennek egyik megoldása $t_d = 0$, ami az indulás időpontja,
másik megoldása $t_d = 2v_{0z}/g = 4{,}330$ s.
Vegyük észre, hogy ez az idő kétszerese annak az időnek, amennyi alatt a test a pálya csúcspontjára ért, mivel a pálya szimmetrikus.
**d)** Amikor a test azonos magasságba ér az elhajítás magasságával, akkor az elhajítás helyétől mért távolsága megegyezik az x koordinátájának változásával. (A pálya minden más pontján a távolságot Püthagorasz-tétellel kellene számolni, mivel mindkét koordináta változik.)
$d = x(t_d) - x_0 = v_{0x}t_d = v_0 \cos\alpha \cdot t_d$ .
Behelyettesítve $t_d$ értékét: $d = 25 \cdot \cos 60° \cdot 4{,}330 = 54{,}13$ m.
[Vagy megtehetjük, hogy először a képleteket rendezzük, és d-t kifejezzük a kezdősebességgel:
$d = v_{0x} \cdot t_d = v_{0x} \cdot (2v_{0z}/g) = v_0 \cos\alpha \cdot 2 \cdot v_0 \sin\alpha/g = v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)/g = 25^2 \cdot \sin 120°/10 = 54{,}13$ m.]

**SZIMULÁCIÓK, AMIKKEL ÉRDEMES JÁTSZANI:**

Viszonylag szabadon rajzolható függvények deriváltja ill. integrálja:
https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/calculus-grapher

Próbáljuk meg a katicát gyorsulással irányítani:
https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/maze-game

„Katicaidomítás”: szabadon mozgatható a bogár, és közben megrajzolja a pillanatnyi sebességvektorát és gyorsulásvektorát:
https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/ladybug-motion-2d

Hajítás:
https://phet.colorado.edu/en/simulation/projectile-motion

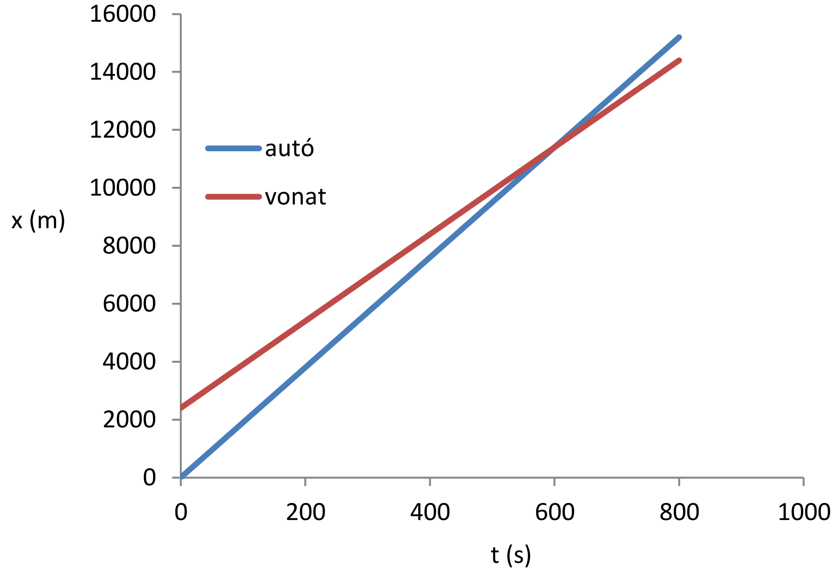
---

A legtöbb mobiltelefonban van gyorsulásérzékelő, aminek az adatai kiolvashatók pl. a VIEYRA szoftverrel, így megtudhatjuk, mekkora volt pl. a villamos vagy a lift gyorsulása, illetve hogy milyen gyorsulással tudunk futni.

## KIDOLGOZOTT GYAKORLÓ FELADATOK

**(MÁ 14.)** Egyenes úton személyautó, az úttal párhuzamosan futó vasúti sínen pedig vonat halad. Az autó sebessége 68,4 km/h, a vonaté 54 km/h. A vonat 2,4 km-rel jár az autó előtt. Mennyi idő alatt és mekkora úton éri utol az autó a vonatot?
Ábrázoljuk mindkét test elmozdulását az idő függvényében!

<u>Megoldás</u>
Mindkét test egyenletes mozgást végez: $x = x_0 + vt$,
vagyis $x_{autó} = x_{0,\,autó} + v_{autó}\,t$ és $x_{vonat} = x_{0,vonat} + v_{vonat}\,t$ .
Az autó indulási $x_{0,\,autó}$ koordinátáját vegyük zérusnak, így a vonaté $x_{0,vonat}$ = 2,4 km = 2400 m;
a sebességek: $v_{autó}$ = 68,4 km/h, ill. $v_{vonat}$ = 54 km/h.
Mértékegység átváltása: $1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{1000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = \frac{1}{3{,}6}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$,
tehát a sebességek SI alapmennyiségekkel: $v_{autó}$ = 19 m/s, ill. $v_{vonat}$ = 15 m/s.
A helykoordináták
km és h mértékegységekkel felírva: $x_{autó} = 68{,}4\ t$ és $x_{vonat} = 2{,}4 + 54\ t$ (t h-ban értendő);
SI alapegységekkel felírva: $x_{autó} = 19\ t$ és $x_{vonat} = 2400 + 15\ t$ (t s-ban értendő).
Akkor találkoznak, amikor $x_{autó} = x_{vonat}$ , azaz $x_{0,\,autó} + v_{autó}\,t = x_{0,vonat} + v_{vonat}\,t \;\rightarrow$
$t = (x_{0,vonat} - x_{0,\,autó}) / (v_{autó} - v_{vonat})$.
Behelyettesítve
km és h mértékegységekkel: t = (2,4–0)/(68,4–54) = 1/6 h = 0,1667 h;
SI alapegységekkel: t = (2400–0)/(19–15) = 600 s.
Tehát 1/6 h = 600 s = 10 perc múlva találkoznak.
A találkozás helyét megkaphatjuk bármelyik x(t) függvénybe való behelyettesítéssel,
pl. SI alapegységekkel számolva:
$x_{autó} = v_{autó}\,t = 19\cdot600 = 11400$ m, ill. $x_{vonat} = x_{0,vonat} + v_{vonat}\,t = 2400 + 15\cdot600 = 11400$ m.
Ábrázoljuk:



**(MÁ 57.)** Egy gépkocsi sebessége 54 km/h-ról 90 km/h-ra növekedett, miközben a gyorsulása 1,6 m/s$^2$ volt. Mennyi ideig tartott és mekkora utat tett meg a gépkocsi ezalatt?

<u>Megoldás</u>

$v_0$ = 54 km/h = 15 m/s; $v_1$ = 90 km/h = 25 m/s, a = 1,6 m/s$^2$.

A gyorsulás állandó,
tehát $v(t) = v_0 + at = 15 + 1{,}6t$ ;
és tudjuk, hogy a keresett $t_1$ időben $v_1 = v(t_1) = v_0 + at_1 = 25$ m/s, amiből $t_1 = 6{,}25$ s.
Vagy számolhatunk az $a = \Delta v / \Delta t$ képlettel is:
$\Delta t = \Delta v / a = (v_1 - v_0) / a = (25 - 15) / 1{,}6 = 6{,}25$ s.

A gépkocsi x koordinátája, ha induláskor az origóból indul, azaz $x_0 = 0$:
$x(t) = v_0 t + ½at^2$ ,
ebbe behelyettesítve a $t_1$ időt
$x(t) = v_0 t_1 + ½at_1^2 = 15\cdot 6{,}25 + (1{,}6/2)\cdot 6{,}25^2 = 125$ m.