

A FORGÓ MOZGÁS DINAMIKÁJA I (FORGÁS RÖGZÍTETT TENGELENY KÖRÜL)

„A fizikában hamar megtanultam, hogyan érezek rá a lényeghez vezető mélyebben rejtőző utakra és hogyan hagyjak minden egyebet figyelmen kívül, mindazt a rengeteg dolgot, amellyel csak telezsúfoljuk az agyunkat, elvonva gondolatainkat a lényegről. A módszer gyenge pontja természetesen az, hogy – ha akarjuk, ha nem – először mindent a fejünkbe kell tömnünk ahhoz, hogy a lényegtelenet végül elhagyhassuk.”

ALBERT EINSTEIN

12.1 Bevezetés

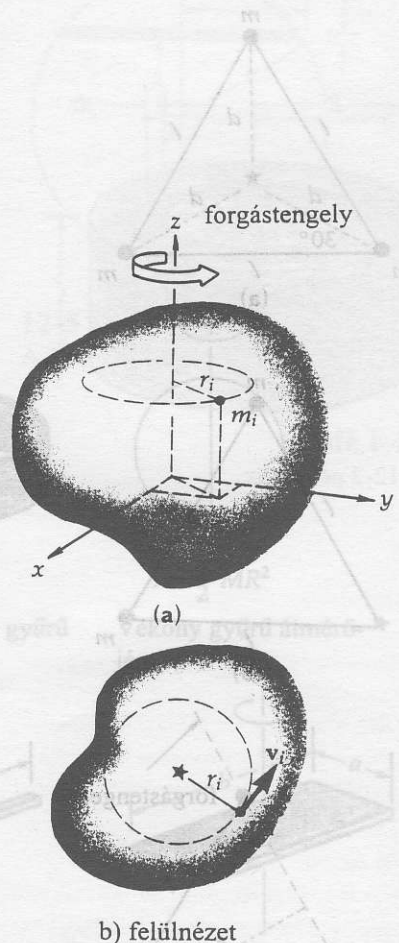
A továbbiakban a forgó mozgás dinamikájával foglalkozunk, vagyis azzal a kérdéssel, hogy mi okozza a testek szöggyorsulását. Newton második törvénye, $-\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ – kimondja, hogy egy testnek azért van translációs gyorsulása, mert a rá ható erők eredője nem zérus. Itt azt mutatjuk meg, hogy egy testnek akkor van szöggyorsulása, ha a rá ható forgatónyomatékok összege nem zérus. Ebben a fejezetben olyan testekkel foglalkozunk, amelyek egy inercia-rendszerben nyugvó rögzített tengely körül forognak. A következő fejezetben a mozgó tengely körül forgó test általánosabb mozgását tárgyaljuk. A haladó és a forgó mozgás dinamikai egyenletei között szoros analógia van. Ha ezt figyelembe vesszük, akkor az új összefüggések könnyebben megérthetőek!

12.2 A tehetetlenségi nyomaték

Tekintsünk egy rögzített \star tengelyre szerelt merev testet. (12-1 ábra.) Amikor a test ω szögsebességgel forog, akkor az r_i helyen lévő m_i tömegpont v_i tangenciális sebességgel körpályán mozog. A részecske K_i kinetikus energiája

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

A merev test forgása közben minden részecskének azonos az ω szögsebessége, így $v_i = r_i \omega$, ahol r_i az m_i tömeg és a forgástengely közötti merőleges távolság. A forgó egész merev test teljes kinetikus energiája így



12-1 ábra

Tekintsük a test belsejében a forgástengelytől r_i merőleges távolságban lévő m_i elemi tömeget! Amikor a test a z tengely körül forog, akkor a részecske r_i sugarú körpályán v_i sebességgel mozog.

$$K_{rot} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2.$$

A haladó mozgást végző test $K = \frac{1}{2} m v^2$ kinetikus energiájához hasonlóan a zárójelben lévő mennyiség analóg a haladó mozgást végző test tehetetlenségét meghatározó mennyiséggel; ezt a test \star tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának nevezzük.

Az I tehetetlenségi nyomaték

$$I \equiv \sum m_i r_i^2 \quad \left[\begin{array}{l} r_i \text{ az } m_i \text{ tömeg forgástengely-} \\ \text{től mért távolsága} \end{array} \right] \quad (12-1)$$

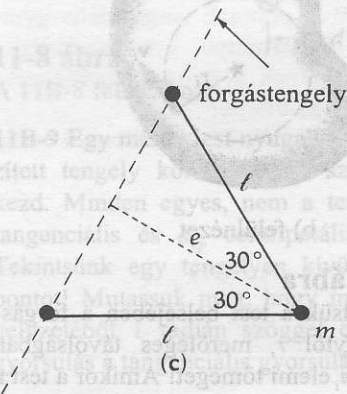
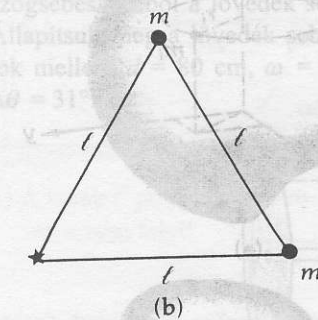
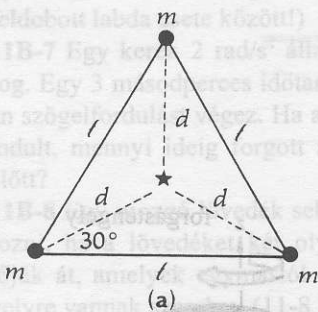
(\star tengelyre vonatkoztatva)

A tehetetlenségi nyomatékot **forgási tehetetlenségnek** is nevezik, dimenziója a tömeg és távolság négyzetének szorzata, egysége tehát $\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Ezért I nem csupán a test tömegétől, hanem a tömegnek \star tengelyre vonatkoztatott eloszlásától is függ. Amiként m a test haladó mozgásának gyorsulásával szemben kifejtett ellenállás mértéke, ugyanúgy I a test forgó mozgásának gyorsulásával szemben kifejtett ellenállás a mértéke. Egy, a forgástengelytől távolabb elhelyezett elemi tömeg nagyobb mértékben járul a tehetetlenségi nyomatékhoz, mint egy ugyanakkora, de a forgástengelyhez közelebbi elemi tömeg.¹ Figyeljünk az analógiára: I és ω rendre m -nek és v -nek felel meg. Ez segítséget jelent a forgó mozgás egyenleteinek megtanulásához.

A fenti egyenletek felhasználásával a forgási energiát így írhatjuk:

$$\text{Forgási kinetikus energia} \quad K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (12-2)$$

Jegyezzük meg, hogy ez a kinetikus energiának nem egy új alakja, hiszen a forgó test valamennyi részecskéjének kinetikus energiáját összegeztük. Jelölésére azonban a K_{rot} szimbólumot vezetjük be, mert az általános (haladó és egyidejűleg forgó) mozgást végző test kinetikus energiája a tömegközéppont haladó mozgásából adódó $K = \frac{1}{2} M (v_{TKP})^2$ és a tömegközéppont körüli forgásból adódó $K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$ energiából tevődik össze. (Az együttes forgó és haladó mozgással a következő fejezetben foglalkozunk.)



12-2 ábra

A 12-1 példához.

12-1 PÉLDA

Három, egyenként m tömegű pont egy l oldalhosszúságú egyenlő-oldalú, elhanyagolható tömegű háromszög alakú váz csúcsaiban helyezkedik el. Határozzuk meg a következő tengelyekre a tehetetlenségi nyomatékot. (a) A háromszög középpontján átmenő, a tömegpontok által meghatározott síkra merőleges \star tengely. (b) Az egyik tömegponton átmenő, a tömegpontokat tartalmazó síkra merőleges tengely. (c) Az ábra síkjában lévő, két tömegponton átmenő tengely.

MEGOLDÁS

(a) A 12-2a ábra szerint meghatározzuk az egyes tömegpontok \star forgástengelytől mért d távolságát. Trigonometriai összefüggésekből $l = 2d \cos 30^\circ$, vagy $d = \frac{l}{(2 \cos 30^\circ)} = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

Tehát

¹ Hogy ezt a különbséget jól „érezkeljük”, vegyünk egy hosszúkás testet, pl. egy méterrudat, és gyorsan forgassuk meg a tömegközéppontján átmenő tengely körül. Próbáljuk először a rúd tengelye körül forgatni, majd pedig a rúd tengelyére merőleges tengely körül forgatni.

$$I = \sum m_i r_i^2 = 3m \left(\frac{l}{\sqrt{3}} \right)^2 = ml^2.$$

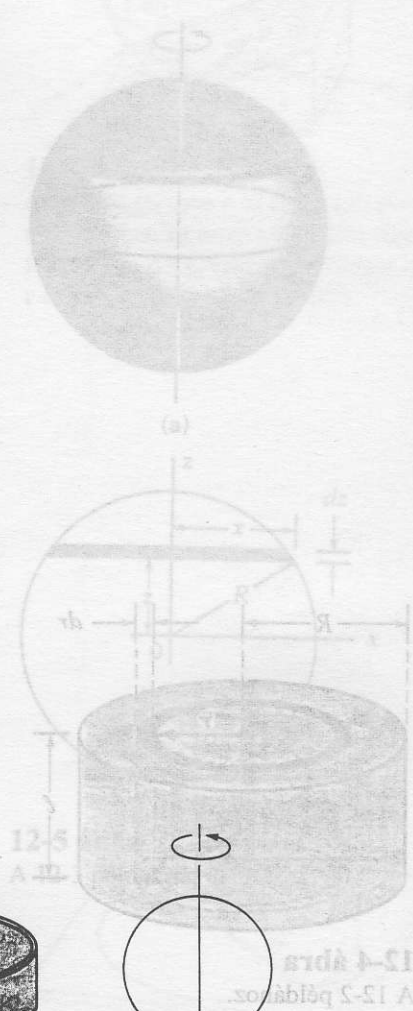
(b) A 12-2b ábrán a ★ tengely áthalad az egyik tömegponton. Mivel erre a tömegpontra $r_i = 0$, ez a pont nem járul hozzá az I tehetetlenségi nyomatékhoz. A másik két tömegpont mindegyike a ★ tengelytől l távolságra van, így

$$I = \sum m_i r_i^2 = 2ml^2.$$

(c) A 12-2c ábrán az m tömeg a forgástengelyig mért merőleges e távolság $e = l \cos 30^\circ = l\sqrt{3}/2$. Tehát

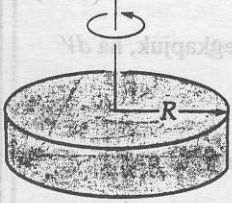
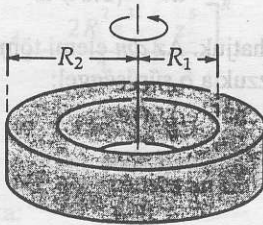
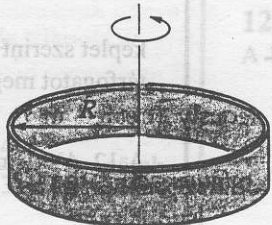
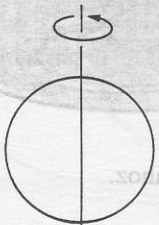

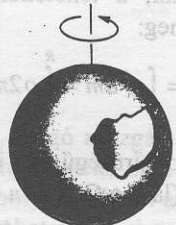
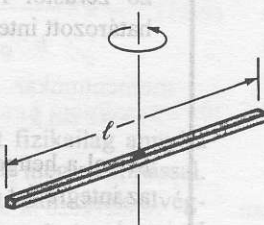
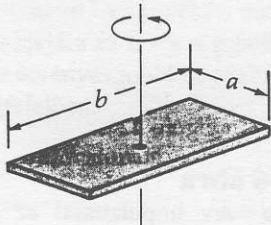
$$I = \sum m_i r_i^2 = m \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} ml^2.$$

Összehasonlítva a három eredményt, látjuk, hogy az I tehetetlenségi nyomaték az egyes forgástengelyekre különböző.



12.3 Folytonos tömegeloszlású testek tehetetlenségi nyomatékának meghatározása

A tömegpontokból álló rendszer tehetetlenségi nyomatékának számítása nem egyéb, mint az összegezési eljárás következetes alkalmazása. A folytonos tömegeloszlású testre azonban ez csak integrálás alkalmazásával végezhető el. Tárgyalásunkat olyan merev, egyszerű geometriai alakú testek esetére

 <p>$I = \frac{1}{2} MR^2$</p> <p>Tömör henger, vagy tárcsa (a tengelyére)</p>	 <p>$I = \frac{1}{2} M(R_2^2 + R_1^2)$</p> <p>$R_1$ belső és R_2 külső sugárú cső (a tengelyére)</p>	 <p>$I = MR^2$</p> <p>Vékony karika, vagy gyűrű (a tengelyére)</p>	 <p>$I = \frac{1}{2} MR^2$</p> <p>Vékony gyűrű átmérőjére.</p>
 <p>$I = \frac{2}{5} MR^2$</p> <p>Tömör gömb egy átmérőjére</p>	 <p>$I = \frac{2}{3} MR^2$</p> <p>Vékony falú üres gömb egy átmérőjére</p>	 <p>$I = \frac{1}{12} Ml^2$</p> <p>l hosszúságú vékony rúd a TKP-n átmenő, a rúdra merőleges tengelyre</p>	 <p>$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$</p> <p>Vékony lemez TKP-n átmenő, a lemezre merőleges tengelyre</p>

12-3 ábra

Homogén sűrűségű anyagból készült különböző szimmetrikus testek tömegközéppontján átmenő tengelyre vonatkozó I tehetetlenségi nyomatékok. A test tömege mindegyik esetben M .

korlátozzuk, amelyeknek a szimmetriatengelye egybeesik a forgástengelyükkel. A folytonos tömegeloszlású merev testek I tehetetlenségi nyomatékára vonatkozó egyenletet integrálalakban fejezzük ki:

Tehetlenségi nyomaték (★ tengelyre vonatkoztatva)	tömegpont- rendszerre	folytonos tömeg- eloszlásra	$I = \sum m_i r_i^2$	$I = \int r^2 dm$	(12-3)
---------------------------------------------------------	----------------------------------	----------------------------------------	----------------------	-------------------	--------

A folytonos tömegeloszlás esetén a fenti integrál kiszámításához a dm elemi tömeget úgy kell felvenni, hogy az egész elemi tömeg a forgástengelytől azonos r távolságra legyen.² Ezért az adott test szimmetria viszonyai alapján célszerű az elemi tömeget megválasztani. A 12-3 ábra különböző, homogén szimmetrikus testek tehetlenségi nyomatékát foglalja össze.

12-2 PÉLDA

Határozzuk meg a homogén ρ sűrűségű, l hosszúságú, R sugarú, M tömegű tömör henger tengelyére vonatkozó tehetlenségi nyomatékot!

MEGOLDÁS

Amint a 12-4 ábra mutatja, a dm elemi tömegnek az r sugarú, dr vastagságú és l hosszúságú dV elemi térfogatú hengergyűrű tömegét tekintjük. Mivel ennek az elemi hengergyűrűnek valamennyi pontja közelítőleg azonos távolságra van a forgástengelytől (a dr vastagság ugyanis elhanyagolhatóan tekinthető az r távolsághoz képest), ezért a dV térfogatot a

$$dV = (2\pi r l) dr \quad (12-4)$$

képlet szerint számíthatjuk. Az dm elemi tömeget megkapjuk, ha dV térfogatot megszorozzuk a ρ sűrűséggel:

$$dm = \rho dV \quad (12-5)$$

A 12-4 egyenlet behelyettesítésével

$$dm = \rho 2\pi r l dr.$$

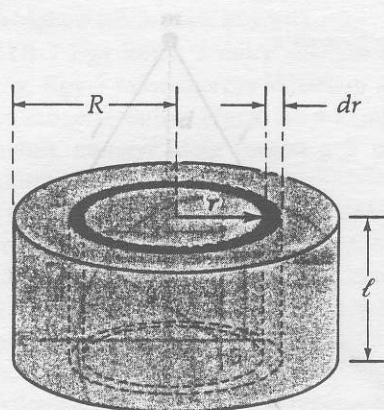
adódik. Ezt behelyettesítve a tehetlenségi nyomaték kiszámítására vonatkozó 12-3 képletbe, látható, hogy az r változó tekinthető integrálási változónak. Ha figyelembe vesszük, hogy a teljes körhenger tehetlenségi nyomatékát úgy kapjuk meg, hogy az r integrálási változó zérustól R -ig változik, a tehetlenségi nyomatékot az alábbi határozott integrál adja meg:

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R \rho 2\pi r^3 l dr.$$

Mivel a henger állandó ρ sűrűségű és l is állandó ezeket kiemelve és az integrálást elvégezve (lásd a G-II és a G-III függelék) adódik:

$$I = 2\pi \rho l \int_0^R r^3 dr = \left[\frac{2\pi \rho l r^4}{4} \right]_0^R = \frac{2\pi \rho l R^4}{4}.$$

Az eredmény tovább egyszerűsíthető, ha figyelembe vesszük, hogy a henger teljes M tömege kifejezhető:



12-4 ábra

A 12-2 példához.

²Többváltozós függvények integrálás esetén dm megválasztására kevesebb megszorítást kell tenni. Az egyváltozós függvények integrálásakor azonban a fenti szabályt kell követni.

$$M = (\text{sűrűség})(\text{térfogat}) = (\rho)(\pi R^2 l).$$

alakban. Ezt behelyettesítve, a homogén tömör henger tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 \quad (12-6)$$

12-3 PÉLDA

Ez a példa megmutatja, hogy egy merev test tehetlenségi nyomatéka gyakran meghatározható úgy is, hogy a test ismert tehetlenségi nyomatékú egyszerűbb testekből van felépítve. Példaként határozzuk meg a homogén, R sugarú, M tömegű tömör gömb tehetlenségi nyomatékát a középpontján átmenő tengelyre.

MEGOLDÁS

A 12-5 ábrán bemutatott módon a gömböt úgy kezeljük, mintha vékony tárcsák sorozatából lenne felépítve. Kiválasztunk egy dz vastagságú x sugarú elemi tárcsát. Ennek tömege $dm = \rho dV = \rho \pi x^2 dz = \rho \pi (R^2 - z^2) dz$. A vékony tárcsa tehetlenségi nyomatéka a 12-2 példa alapján:

$$dI = \frac{1}{2} dm x^2 = \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - z^2)^2 dz.$$

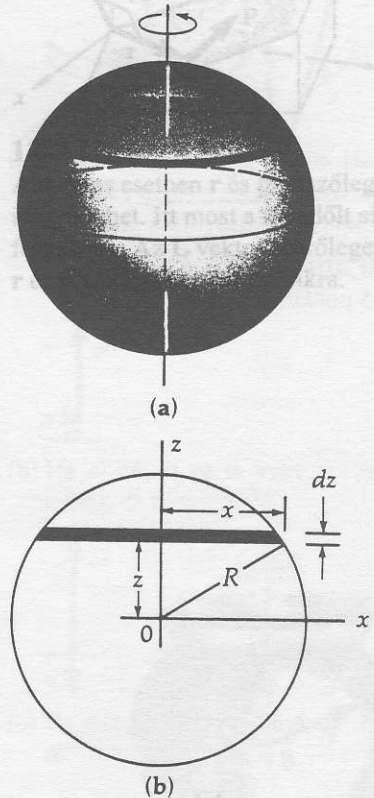
A teljes gömb tehetlenségi nyomatéka tehát

$$I = \int dI = \int_{-R}^{+R} \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - z^2)^2 dz = (2) \frac{1}{2} \rho \pi \int_0^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz$$

$$I = \rho \pi \left[R^4 z - \frac{2R^2 z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right]_0^R = \frac{8}{15} \rho \pi R^5.$$

Figyelembe véve, hogy a gömb tömege $M = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$, a gömb tehetlenségi nyomatéka:

$$I = \frac{2}{5} \left[\rho \frac{4}{3} \pi R^3 \right] R^2 = \frac{2}{5} MR^2$$



12-5 ábra

A 12-3 példához.

12.4 Az inerciasugár

Számos gyakorlati jelentőségű, forgó mozgást végző test fizikailag annyira bonyolult, hogy tehetlenségi nyomatéka nem határozható meg számítással. Jó példa erre egy mesterséges bolygó. Ebben az esetben a számítások elvégzéséhez nagy szükség van a tehetlenségi nyomatéknak a test méreteivel való kifejezésére. Az eljárás a következő: A test tömegét és I tehetlenségi nyomatékát kísérleti úton meghatározzuk. (Például úgy, hogy ismert forgatónyomatékot alkalmazunk és mérjük az okozott α szöggyorsulást. Lásd a 12.6 fejezetet.) Az ily módon meghatározott I érték kifejezhető a test tömegének és a k inerciasugár négyzetének szorzataként. Az inerciasugár tehát úgy tekinthető, mintha a test teljes tömege a forgástengelytől mérve ilyen távolságban egy pontban lenne koncentrálna. (Megjegyezzük, hogy az a pont, ahova a tömeget ilyenkor gondolatban egyesítjük, nem a test tömegközéppontja.)

12-9 ábra

Az r sugarú körpályán v sebességgel (és ω szögsebességgel) mozgó m tömegű részecske impulzusmomentuma $L = mvr = m r^2 \omega$. Az L vektor merőleges a kör síkjára az $L = r \times p$ vektorszorzatra érvényes jobbkéz-szabálynak megfelelően.

12-8 ábra
A $p = mv$ impulzusát az xy síkban mozgó m tömegpontnak L impulzusmomentuma van (az O pont), ha a p vektor iránya nem megy át az O ponton. Ilyen példában a $*$ tengely az O pontban a papírsíkban merőlegesen áll.

A k inerciasugar $I = Mk^2$ (12-7)

ahol I a M tömegű test tehetetlenségi nyomatéka.

12-4 PÉLDA

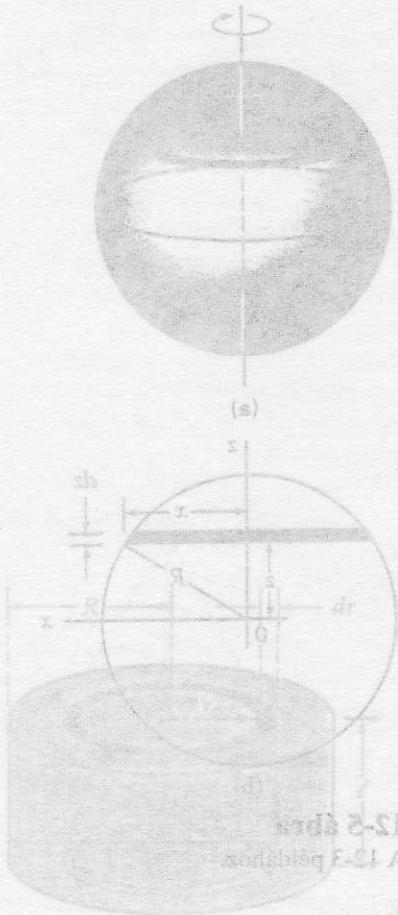
Határozzuk meg az R sugarú M tömegű tömör gömb inerciasugarát a tömegközéppontján átmenő tengelyre!

MEGOLDÁS

A tömör gömbnek a tömegközéppontján átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $I = \frac{2}{5}MR^2$. Ezért:

$$Mk^2 = \frac{2}{5}MR^2$$

$$k = \sqrt{\frac{2}{5}}R$$



12-4 ábra
A 12-2 példához.

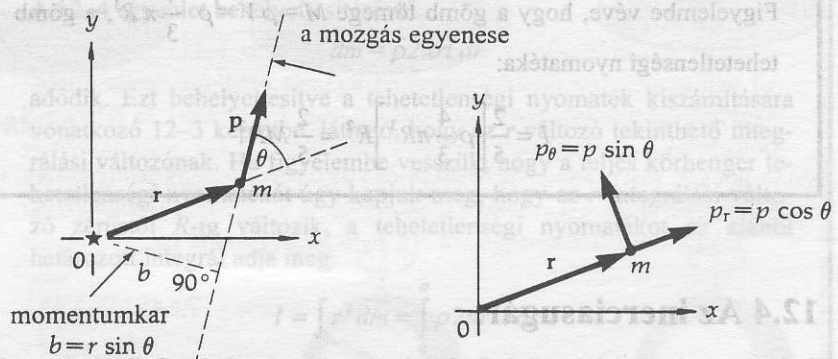
12.5 Az impulzusmomentum (perdület)

Tovább fejlesztjük a haladó és a forgó mozgás közötti analógiát:

a forgatónyomaték: $M = (\text{erő})(\text{erőkar})$

$$M = (F)(r \sin \theta)$$

Vektoriális alakban: $M = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

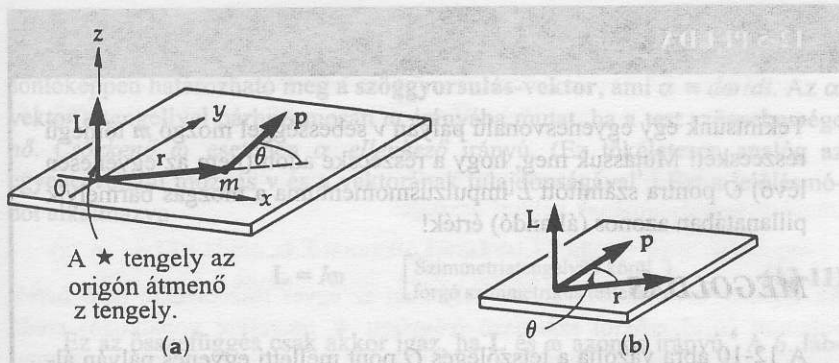


12-6 ábra

A $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ impulzussal az xy síkban mozgó m tömegpontnak L impulzusmomentuma van (az O pontra), ha a \mathbf{p} vektor iránya nem megy át az O ponton. Jelen példában a \star tengely az O pontban a papír síkjára merőlegesen áll.

(a) Az xy síkban $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ impulzussal rendelkező m tömegpontnak (O -ra vonatkozó) L impulzusmomentuma van, amelynek a nagysága: $L = (m\mathbf{v})(\text{nyomaték-kar}) = mvr \sin \theta$. Az O -nál lévő \star tengely a z tengely, és L iránya a pozitív z tengely irányával egyezik meg, merőleges az \mathbf{r} és a \mathbf{p} vektorokat tartalmazó síkra.

(b) Az impulzus $p_r = p \cos \theta$ sugár irányú komponensének nincs impulzusmomentuma az origóra, (mert momentumkarja zérus). Csak a merőleges $p_\theta = p \sin \theta$ komponensnek van az O -ra impulzusmomentuma, ennek nagysága $L = mvr \sin \theta$.



A \star tengely az origón átmenő z tengely.

12-8 ábra

Az xy síkban fekvő r helyzetvektorrú pontban lévő m tömegpont impulzusa p . A jobbkézsabállyal képzett az (O -ra vonatkozó) $L = r \times p$ impulzusmomentum – ahogyan az (a) ábra mutatja – merőleges az xy síkra. Célszerű, ha az r és a p vektorokat irányai

megtartása mellett azonos pontból felmérjük a (b) ábra szerint. Az r vektor p -be forgatása megadja azt a forgásirányt, amit a jobbkézsabályban kell használni. (Az elforgatás θ szöge a két vektor irányja által meghatározott szög.)

Tekintsünk most egy m tömegpontot, amely $p = mv$ impulzussal mozog. (12-6 ábra) A p impulzus \star tengelyre vonatkozó nyomatékát L impulzusmomentumnak nevezzük:

Az L impulzusmomentum (\star tengelyre)

$$L = (\text{impulzus})(\text{momentum karja})$$

$$L = (mv)(r \sin\theta)$$

Vektoriális alakban $L = r \times p$. (12-8)

Egy, az xy síkban mozgó m tömegpont L impulzusmomentumának iránya a z tengely pozitív vagy negatív irányába mutat a jobbkézsabálynak megfelelően. Mint a többi jobbkézsabály esetében is, itt sem halad semmilyen fizikai objektum ebben az irányban; a jobbkézsabály csak egy megállapodás, amelynek révén egyetlen vektorral forgási irányt tudunk kifejezni. (12-8 ábra.) L egysége a $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$. (Jegyezzük meg, hogy az impulzus és az impulzusmomentum egységei nem azonosak!)

Gyakran előforduló jelenség az r sugarú körpályán v sebességgel (és ω szögsebességgel) mozgó m tömegű részecske. Minthogy ebben az esetben a momentumkar a kör sugara és $v = r\omega$, azért

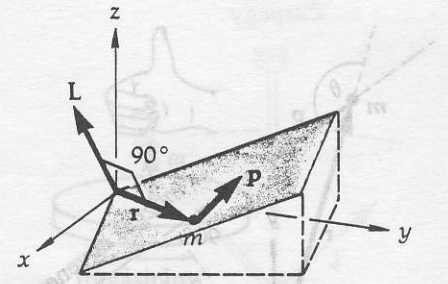
A körmozgást végző részecske impulzusmomentuma (a pálya középpontjára)

$$L = mvr = mr^2\omega$$

(12-9)

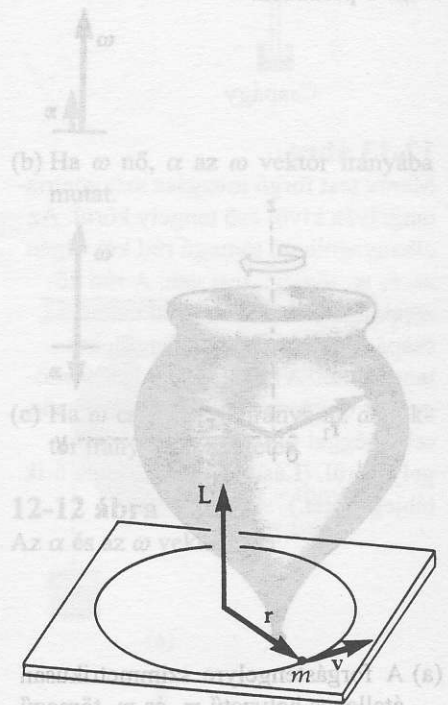
Az L vektor a jobbkézsabálynak megfelelően. (12-9 ábra.) merőleges a kör síkjára, és célszerű a kör középpontjában felvenni.

Ismét meg kell jegyezni, hogy az $r \times p$ impulzusmomentum nem tengelyre, hanem pontra vonatkoztatott mennyiség. (lásd a 234. oldali fordítói megjegyzést) A szerzők azonban most is elsősorban olyan tengely körüli forgásokkal foglalkoznak, ahol a vizsgált test pontjai egy a tengelyre merőleges síkban mozognak. Ebben az esetben az impulzusmomentum egyetlen, a tengely irányába mutató összetevővel rendelkezik. Így a pontra és a tengelyre vonatkoztatott impulzusmomentum azonosítható. A 3. lábjegyzet éppen ettől eltérő esetekre utal kissé félreérthető módon. (A fordító megjegyzése) A tömegpont tetszőleges mozgásának sokkal általánosabb esetét a 12-7 ábra vázolja. Vegyük észre, hogy az $L = r \times p$ vektoregyenlet helyes marad annak ellenére, hogy a koordinátatengelyek nem illeszkednek az r és a p vektorokat tartalmazó síkra.



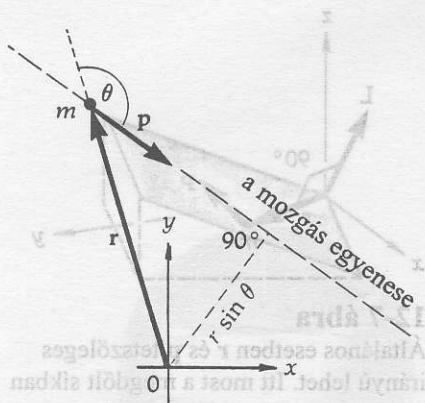
12-7 ábra

Általános esetben r és p tetszőleges irányú lehet. Itt most a megdőlt síkban fekszenek. Az L vektor merőleges az r és p vektort tartalmazó síkra.



12-9 ábra

Az r sugarú körpályán v sebességgel (és ω szögsebességgel) mozgó m tömegű részecske impulzusmomentuma $L = mvr = mr^2\omega$. Az L vektor merőleges a kör síkjára az $L = r \times p$ vektorsorzatra érvényes jobbkézsabálynak megfelelően.



12-10 ábra
A 12-5 példához.

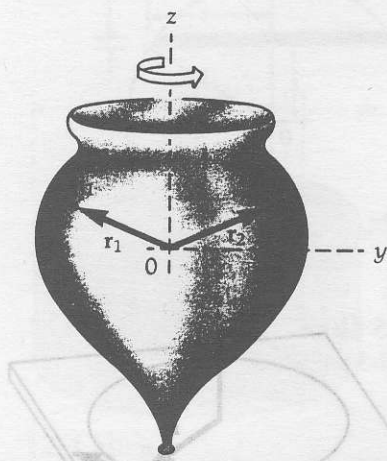
12-5 PÉLDA

Tekintsünk egy egyenesvonalú pályán v sebességgel mozgó m tömegű részecskét! Mutassuk meg, hogy a részecske adott (nem az egyenesen lévő) O pontra számított L impulzusmomentuma a mozgás bármelyik pillanatában azonos (állandó) érték!

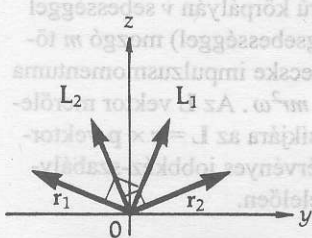
MEGOLDÁS

A 12-10 ábra vázolja a tetszőleges O pont melletti egyenes pályán állandó $p = mv$ impulzussal haladó részecskét. Meg kell mutatnunk, hogy a részecske mozgása során a θ szög és az r radiális távolság ugyan folytonosan változik, de az L impulzusmomentum állandó marad. Az $L = rp \cdot \sin\theta$ összefüggésben a tényezőket átcsoportosítjuk: $p(r \cdot \sin\theta)$, és figyelembe vesszük, hogy $r \cdot \sin\theta$ az O pont és az egyenes pálya közötti távolsággal egyenlő. Minthogy mind p , mind pedig $r \cdot \sin\theta$ a részecske mozgása során állandó, ezért az O pontra vonatkoztatott L impulzusmomentum is változatlan a részecske egyenesmenti mozgása során.

$L =$ időben állandó (óramutató járásának irányában)



(a) A forgástengelyre szimmetrikusan átellenes helyzetű m_1 és m_2 tömegű részecskék.



(b) Figyeljük meg, hogy L_1 merőleges r_1 -re, és L_2 merőleges r_2 -re.

12-11 ábra

Egy szimmetrikus pörgettyű szimmetriatengelye (itt a z tengely) körül forog.

12.6 Rögzített szimmetriatengelye körül forgó merev test mozgása

A továbbiakban a *szimmetrikus merev testnek a rögzített szimmetriatengelyére vonatkozó* impulzusmomentumát számítjuk ki. Tekintsük a 12-11a ábrán látható szimmetrikus pörgettyűt, amint tengelye, a z tengely körül forog. A forgástengely egyik oldalán található minden m_1 tömegű részecskéhez tartozik egy, a tengelyre szimmetrikus helyzetű m_2 tömegű részecske. A szimmetria következtében az egész pörgettyű ilyen szimmetrikus részecskékből van felépítve. Az egyes részecskék $L_i = r_i \times p_i$ impulzus-momentumának vektorábráját a 12-11b ábra mutatja. (A szokásos módon, minden egyes L_i vektor merőleges az r_i és a p_i vektorokat tartalmazó síkra a jobbkéz-szabálynak megfelelően.) Az L_1 és L_2 vektor z tengely irányú komponensei megegyeznek. A z tengelyre merőleges komponenseik nagysága szintén azonos, de irányuk ellentétes, így összegük zérus. Ezért e két részecske eredő impulzusmomentumának csak z tengely irányú komponense van. Tehát az L és a \hat{z} vektor csak azért párhuzamos, mert az L_i vektorok tengelyre merőleges komponensei a szimmetria miatt kiejtik egymást.

Ezután összegezzünk minden szimmetrikus részecskepárra mindaddig, amíg ezt az egész testre el nem végezzük. Így a teljes impulzusmomentum a z tengelyre vonatkozóan:

$$L_z = \sum(m_i r_i^2 \omega) = (\sum m_i r_i^2) \omega.$$

A második zárójelben lévő mennyiség az (ugyancsak a z tengelyre vonatkozó) I tehetetlenségi nyomaték. Ezért a z tengely körüli forgásra⁴ felírható, hogy

$$L_z = I\omega. \tag{12-10}$$

⁴Feltéve, hogy a test a z tengely körül forog, a (12-10) egyenlet érvényes marad aszimmetrikus tárgyak esetében is.

Az egyenletet vektoriális alakban is felírhatjuk, ha az ω szögsebességvektort a jobbkéz-szabálynak megfelelően definiáljuk. (12-12 ábra.) Hasonlóképpen határozható meg a szöggyorsulás-vektor, ami $\alpha \equiv d\omega/dt$. Az α vektor a tengellyel párhuzamosan ω irányába mutat, ha a test szögsebessége nő. Csökkenő ω esetében α ellenkező irányú. (Ez tökéletesen analóg az egyenesvonalú mozgás v és a vektorának tulajdonságával⁵.) Ezt a jelölésmódot alkalmazzva

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Szimmetriatengelyük körül} \\ \text{forgó szimmetrikus testekre} \end{array} \right] \quad (12-11)$$

Ez az összefüggés csak akkor igaz, ha \mathbf{L} és $\boldsymbol{\omega}$ azonos irányú.⁶ A 6. lábjegyzetben említettek elkerülésére ebben a fejezetben a merev testek forgásával kapcsolatos problémák vizsgálata csak szimmetrikus testek szimmetriatengely körüli forgására szorítkozik. (Valamivel általánosabb eseteket majd a következő fejezetben tárgyalunk.)

12.7 A forgó mozgás alapegyenlete

A haladó és a forgó mozgás további analógiáit tárgyalva idézzük fel a haladó mozgás esetére Newton második törvényét: $\Sigma \mathbf{F}_{\text{külső}} = d\mathbf{p}/dt$. A forgó mozgásra vonatkozó megfelelő egyenlet meghatározásához kiszámítjuk egy részecske rögzített \star tengelyre vonatkozó $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ impulzusmomentumának idő szerinti deriváltját. A vektoriális szorzat deriválásánál gondosan ügyelnünk kell a vektorok és deriváltjaik sorrendjére. (Ha a tényezők sorrendjét felcseréljük, akkor a szorzatvektor iránya ellentétes lesz.) A vektoriális szorzat deriválási szabálya hasonló a közönséges szorzat ismert szabályához (G-I függelék). Azaz

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} \right) + \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right), \quad (12-12)$$

Most figyelembe vesszünk két tény: azt, hogy $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, és $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Ezeket a fenti egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = (\mathbf{v} \times m\mathbf{v}) + \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right). \quad (12-13)$$

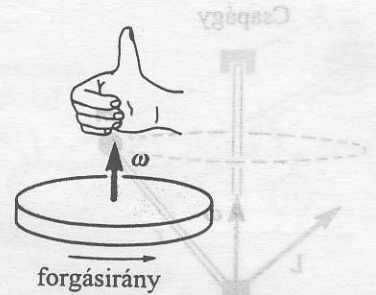
De minthogy a \mathbf{v} vektor ugyanabba az irányba mutat mint az $m\mathbf{v}$ vektor, azért e két vektor vektoriális szorzata zérus. (Emlékeztetbe idézzük, hogy a vektoriális szorzat definíciója tartalmazza a két vektor által bezárt szög szinuszát. Ha a vektorok párhuzamosak, akkor ez a szög 0° , és $\sin 0^\circ = 0$.) Figyelembe vesszük azt is, hogy $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$, így a (12-13) egyenlet felírható mint

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (12-14)$$

MEGOLDÁS

⁵ Az egyenesvonalú mozgás esetén alkalmazott vektorokkal (\mathbf{s} , \mathbf{v} , \mathbf{a}) analóg módon úgy tűnik, hogy a θ szögelfordulás is vektornak tekinthető. Ez azonban nem áll fenn, amint azt a H függelékben kifejthetjük.)

⁶ Egy nem a szimmetriatengelye körül forgó merev testre az \mathbf{L} és az $\boldsymbol{\omega}$ vektor iránya nem azonos. Hogy ezt belássuk, tekintsük a 12-13 ábrán látható „dobverő” alakú tárgyat. Mind-egyik részének van (O -ra vonatkozó) \mathbf{L} impulzusmomentuma az $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ vektoriális szorzatra érvényes jobbkéz-szabálynak megfelelően. Igazolnunk kellene, hogy erre az esetre mind \mathbf{L}_1 , mind \mathbf{L}_2 (az O pontból húzva) iránya azonos. Összegük, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ az ábrán látható. Vegyük észre, hogy \mathbf{L} és $\boldsymbol{\omega}$ nem azonos irányúak. Lásd még: 12.10 fejezet, dinamikai kiegyensúlyozatlanság.



(a) Az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor. Ha a jobbkéz ujjait a forgás irányába hajlítjuk, a kinyújtott hüvelykujj a forgástengely irányába mutató $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektort jelzi.



(b) Ha ω nő, α az $\boldsymbol{\omega}$ vektor irányába mutat.



(c) Ha ω csökken, α iránya az $\boldsymbol{\omega}$ vektor irányával ellentétes.

12-12 ábra

Az α és az $\boldsymbol{\omega}$ vektorok.

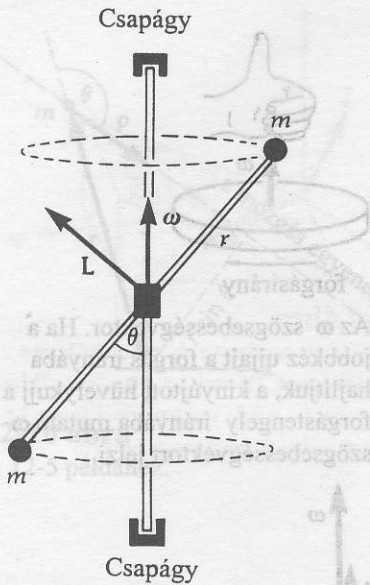


12-15 ábra

A 12-7 példához.

12-16 ábra

A 12-6 példához.



12-13 ábra

Merev test forgó mozgása szimmetriatengelyén kívül eső tengely körül. Az elhanyagolható tömegű rúd két végén m_1 és m_2 tömegű test van. A rúd középpontja szilárdan csatlakozik a csapágyakkal rögzített függőleges tengelyhez. A tengely a rúddal θ szöget zár be. A rendszer állandó ω szögsebességgel forog a függőleges tengely körül. (Lásd a 277 oldalon a 6-ik lábjegyzetet.)

Az $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ összefüggés a részecskére ható (\star -ra vonatkozó) eredő \mathbf{M} forgatónyomaték, ezért a (12-14) egyenlet:

$$M = \frac{dL}{dt} \quad (12-15)$$

Részecskékből álló rendszer eredő impulzusmomentuma a részecskék impulzusmomentumának vektori összege:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots = \Sigma L_i$$

Az impulzusmomentumok az idő folyamán az egyes részecskékre ható *belső*, valamint *külső* erőkől származó (rögzített \star tengelyre vonatkozó) eredő forgatónyomatékok hatására megváltoznak. De az összes *belső* erőtől származó forgatónyomaték összege zérus, mert Newton harmadik törvénye értelmében az összes *belső* erő páronként egyenlő és ellentétes; így minden egyes erőpár karja zérus. Ezért a *belső* erők forgatónyomatékainak összege zérus. A rendszer impulzusmomentuma csupán a *külső* forgatónyomatékok eredőjének következtében változik:

Az impulzusmomentum tétel (Newton második törvényének analogonja)

$$\Sigma M_{\text{külső}} = \frac{dL}{dt} \quad (12-16)$$

(\star tengelyre)

Mind \mathbf{M} , mind \mathbf{L} ugyanarra a tengelyre (pontra) vonatkoztatva számítható. Ha az I tehetetlenségi nyomaték állandó, és ha szimmetrikus test forog a szimmetriatengelye körül, akkor $L = I\omega$, és így $dL/dt = Id\omega/dt = I\alpha$.

A forgó mozgás alapegyenlete (forgási analógia az $F_{\text{külső}} = Ma_{\text{TKP}}$ törvényre)

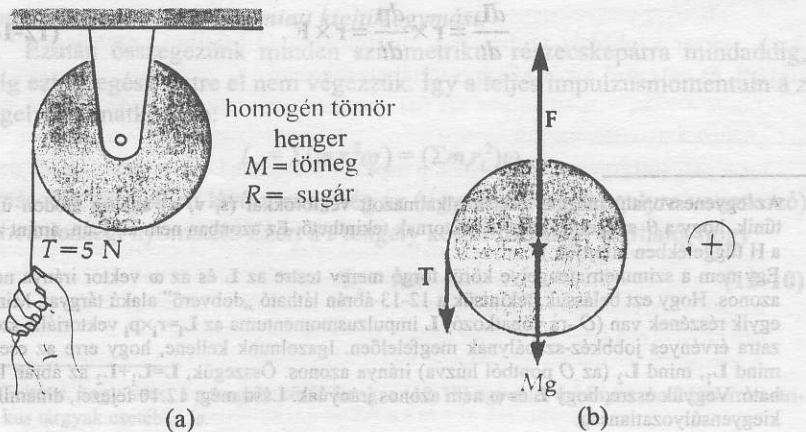
$$\Sigma M_{\text{külső}} = I\alpha$$

[szimmetriatengely körül forgo szimmetrikus testre ($I = \text{állandó}$)] (12-16)

Mínt hogy ebben a fejezetben a szimmetriatengelyük körül forgó szimmetrikus testek tárgyalására szorítkozunk, ezért a most következő példákban a (12-16) és a (12-17) egyenleteket fogjuk alkalmazni.

12-6 PÉLDA

Egy M tömegű, R sugarú tömör, homogén anyagú hengert úgy szereltek fel a 12-14a ábrán vázolt vízszintes tengelyre, hogy a tengelyen elhanyagolható súrlódással foroghasson. A hengerre vékony kótel van csavarva. A kótel szabad végét állandó T erő feszíti, így ez az erő a



12-14 ábra

A 12-6 példához.

(a) A forgástengelyre szimmetrikusan elhelyezett m_1 és m_2 tömegű részecskék.

(b) Figyeljük meg, hogy L_1 merőleges r_1 -re, és L_2 merőleges r_2 -re.

12-11 ábra

Egy szimmetrikus porgettű szimmetriatengelye (itt a z tengely) körül forog.

(nyugalomból induló) hengernek szöggyorsulást ad. Határozzuk meg (a) a henger α szöggyorsulását és (b) ω szögsebességét, miután a kötél d hosszúságnyira letekeredett. (c) Határozzuk meg a fenti mennyiségek értékét, ha $M = 2 \text{ kg}$, $R = 10 \text{ cm}$, $T = 5 \text{ N}$ és $d = 40 \text{ cm}$!

MEGOLDÁS

(a) A 12-14b ábrán az óramutató járásával ellentétes forgásirány pozitív. A 12-3 ábrából látjuk, hogy I értéke $\frac{1}{2}MR^2$.

$$\Sigma M = I\alpha.$$

(* tengelyre)

$$TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha.$$

Az α szöggyorsulás:
$$\alpha = \frac{2T}{MR}.$$

Az α szöggyorsulás forgási iránya ugyanúgy az óramutató járásával ellentétes, mint az M forgatónyomatéké.

(b) Amint a d hosszúságú kötéldarab letekeredik, a henger nyugalmi helyzetéből $\theta = d/R$ szöggel elfordul. A henger e pillanathoz tartozó szögsebességét a (11-14) kinematikai egyenletből számítjuk:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\omega^2 = (0)^2 + 2\left(\frac{2T}{MR}\right)\left(\frac{d}{R} - 0\right)$$

$$\omega = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{Td}{M}}$$

Mint hogy a henger gyorsul, ω ugyanúgy, az óramutató járásával ellentétes forgási irányú, mint α .

(c) A numerikus értékek behelyettesítésével következőket kapjuk:

$$\alpha = \frac{2T}{MR} = \frac{(2)(5\text{N})}{(2\text{kg})(0,10\text{m})} = 50,0 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

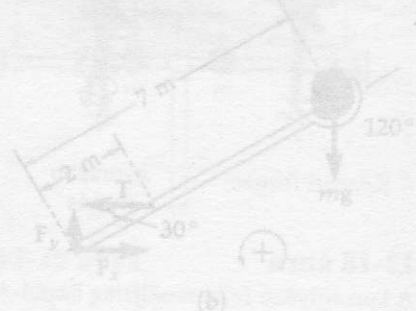
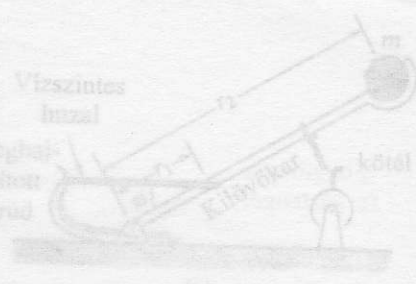
$$\omega = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{Td}{M}} = \left(\frac{2}{0,10\text{m}}\right)\sqrt{\frac{(5\text{N})(0,40\text{m})}{(2\text{kg})}} = 20,0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

12-7 PÉLDA

Tegyük fel, hogy az előző példában ahelyett, hogy a kötél végét húzánk $T = 5 \text{ N}$ erővel, a kötél végére egy $W = 5 \text{ N}$ súlyú testet akasztunk. (12-15a ábra.) (a) Ugyanakkora marad-e a henger α szöggyorsulása, mint az előző esetben volt? (b) Ha nem, akkor számítsuk ki ennek értékét ugyanarra az $M = 2 \text{ kg}$, $R = 10 \text{ cm}$ adatokkal rendelkező hengerre, de $W = mg = 5 \text{ N}$ esetére! (c) Határozzuk meg a kötélt feszítő T erőt az m tömeg süllyedése folyamán!

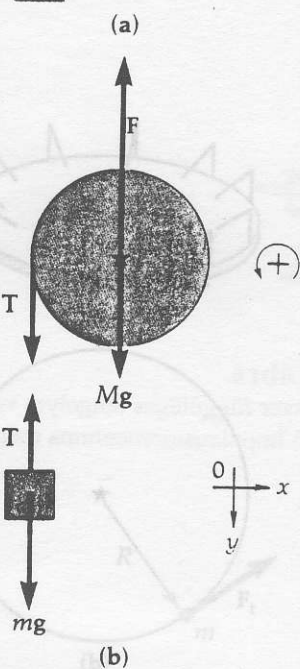
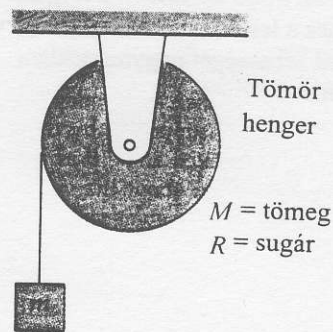
MEGOLDÁS

(a) A 12-15b ábra a henger és a ráakasztott tömeg vektorábráját mutatja. Arra következtethetünk, hogy a T feszítőerőnek kisebbnek kell lennie, mint az előző példában. Ez azzal indokolható, hogy ha a feszítőerő egyenlő lenne mg -vel, akkor a kötélre akasztott testre ható eredő erő zérus lenne, és ezért nem gyorsulna. Tehát T kisebb mint mg , következésképpen a henger szöggyorsulásának kisebbnek kell lennie, mint előzőleg volt.



12-16 ábra

A 12-8 példához.



12-15 ábra

A 12-7 példához.

$$\begin{aligned} \Sigma M &= (T)(T \text{ erőkarja}) - (mg)(mg \text{ erőkarja}) \\ (\star \text{ tengelyre}) \\ &= Tr_1 \sin 30^\circ - mgr_2 \sin 60^\circ \\ &= (2 \times 10^4 \text{ N})(2 \text{ m})(0,500) - (100 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(7 \text{ m})(0,866) \\ \Sigma M &= 1,4 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Az m tömeg tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $I = mr^2 = (100 \text{ kg})(7 \text{ m})^2 = 4,90 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. A szöggyorsulást a

$$\Sigma M = I\alpha$$

(\star tengely körül)

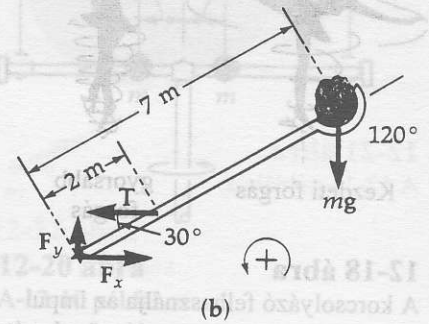
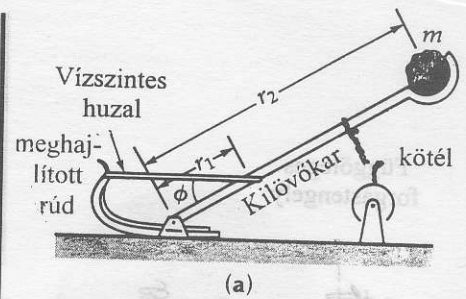
egyenletből nyerjük.

Ebből kifejezve az α szöggyorsulást, felírható, hogy

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{1,41 \times 10^4 \text{ Nm}}{4,90 \times 10^3 \text{ kg m}^2} = 2,88 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Megjegyezzük, hogy a szöggyorsulásra adott válaszban szükséges a „radián” egység beírása (hogy megkülönböztessük a „fordulat per másodperc négyzet” egységben megadható értéktől).

Azt a sebességet, amelyre a kő szert tesz, akkor tudjuk megbecsülni, ha feltételezzük, hogy a szöggyorsulás mindaddig állandó, amíg a kő a katapultot – a kar 90° -os szögelfordulásáig – elhagyja. (Ez nem irreális feltételezés, mert annak ellenére, hogy a huzal feszítőereje csökken, erőkarja nő, így szorzatuk nem sokat változik.) E közelítés szerint a kő több mint 20 m/s sebességre tesz szert.



12-16 ábra

A 12-8 példához.

12-9 PÉLDA

Egy 32 kg-os fiú a 3 m átmérőjű ringlispil alapdeszkájának peremén ül, (12-17a ábra). (a) Határozzuk meg a fiú tehetetlenségi nyomatékát a középponti tengelyre. (b) Ha valaki úgy kezdi forgatni a körhintát, hogy ez a fiúra érintő irányú 30 N erőt fejt ki, akkor mekkora szöggyorsulással fog a körhinta forogni?

MEGOLDÁS

(a) Ha a fiút m tömegű tömegpontként kezeljük, akkor I tehetetlenségi nyomatéka a \star tengelyre

$$I = mR^2 = (32 \text{ kg})(1,5 \text{ m})^2 = 72 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

(\star tengely körül)

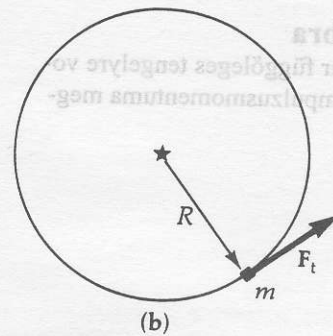
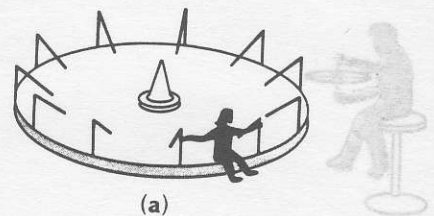
(b) A szöggyorsulás kiszámítására a

$$\Sigma M = I\alpha$$

(\star tengely körül)

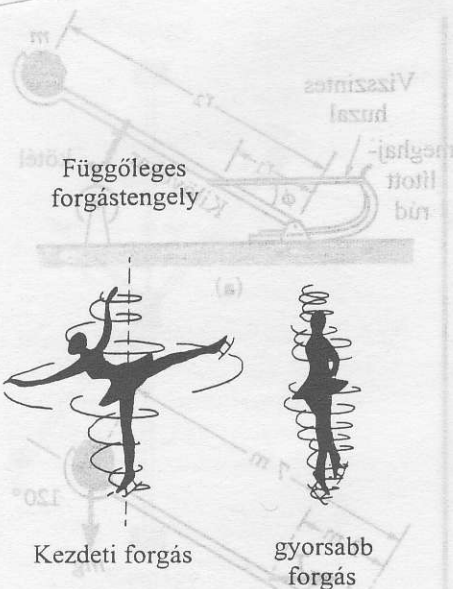
egyenletet alkalmazzuk. Innen az α szöggyorsulás

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{FR \sin \phi}{I} = \frac{(30 \text{ N})(1,5 \text{ m})(\sin 90^\circ)}{72 \text{ kg m}^2} = 0,625 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$



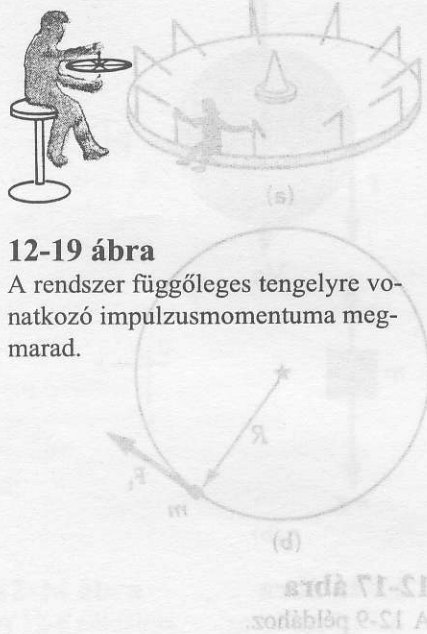
12-17 ábra

A 12-9 példához.



12-18 ábra

A korcsolyázó felhasználja az impulzusmomentum megmaradás törvényét. A forgást nyújtott karral és lábbal kezdi el. Majd testrészeit a forgástengelyhez a lehető legközelebbre húzva forgási sebességét nagymértékben növeli.



12-19 ábra

A rendszer függőleges tengelyre vonatkozó impulzusmomentuma megmarad.

12.8 Az impulzusmomentum (perdület) megmaradása

Láttuk, hogy az eredő külső forgatónyomaték az impulzusmomentum változási sebességével (idő szerinti deriváltjával) egyenlő: $\Sigma \mathbf{M}_{\text{külső}} = d\mathbf{L}/dt$. Ha a rendszer zárt, azaz a (\star tengelyre vonatkozó) külső forgatónyomatékok eredője zérus, akkor a (\star tengelyre vonatkozó) impulzusmomentum az időben állandó:

A (\star tengelyre vonatkozó) impulzusmomentum megmaradása

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L} \quad (12-18)$$

zárt rendszerre*

Ha egy z tengely körül forgó testre ható forgatónyomatékok eredője (a z tengelyre) zérus, akkor impulzusmomentumának z irányú komponense $L_z = I\omega$, ahol I a test z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka. Erre az esetre⁷ az impulzusmomentum megmaradása a következőképpen írható fel:

Az impulzusmomentum megmaradása rögzített tengely körül

$$I_0\omega_0 = I\omega \quad (12-19)$$

(vagy egy, a tömegközépponton átmenő, önmagával párhuzamosan mozgó tengelyre)

Tegyük fel, hogy a zárt rendszer forgás közben a *belső* erők hatására oly módon változtatja meg a tömegeloszlását, hogy egyes részeit a tengelytől távolabb (vagy közelebb) hozza.⁸ Ilyen esetben, ha például I csökken, akkor ω növekszik. Így tehát akkor is felléphet szöggyorsulás ($\alpha \neq 0$), ha a rendszerre ható külső forgatónyomatékok eredője zérus, (ha tehát $\Sigma \mathbf{M}_{\text{külső}} = 0$).

KÍSÉRLETEK BEMUTATÁSA

Az előadás során bemutatott alábbi kísérletek az impulzusmomentum megmaradását illusztrálják rögzített tengely esetén. Egy diák olyan széken ül, amelyik függőleges tengely körül szabadon foroghat. A diák mindkét kezében vízszintesen kinyújtott karral egy-egy nehéz testet tart. A tanár lassan forgásba hozza a széket, majd felszólítja a diákot, hogy húzza be a két karját a mellkasához, így a két nehéz test a forgástengelyhez közelebb kerül. Minthogy a testek forgástengelyhez közelítése csökkenti a zárt rendszer I tehetetlenségi nyomatékát, ezért az ω szögsebesség erőteljesen megnő, illusztrálva az $I\omega$ impulzusmomentum megmaradását.

A következő kísérlet során a forgószéken ülő, eredetileg nyugalomban (forgásmentes állapotban) lévő diák forgó biciklikereket ($L_0 = I_0\omega_0$) tart tengelyével függőlegesen (a z tengely irányában, 12-19 ábra). (A forgási tehetetlenség növelésére a gumitömlőt rendszerint a peremre erősített nehéz fémabronccsal helyettesítik.) Ha a diák a forgó kerék tengelyét 180° -kal elfordítja, akkor a diák-plusz-szék rendszer $2 I_0 \omega_0$

* A megmaradási törvény akkor is igaz, ha nem a tengely körüli forgásokra mondjuk ki. (A fordító megjegyzése)

⁷ Fontos tulajdonsága a (12-19) egyenletnek, hogy nemcsak rögzített forgástengely esetére érvényes, (mint ebben a fejezetben tárgyaljuk), hanem a tömegközépponton átmenő, olyan forgástengely esetében is, amely a térben úgy tologódik el, hogy *önmagával mindig párhuzamosan marad*. (Erről majd a következő fejezetben lesz szó.)

⁸ A tömegeloszlás megváltoztatásának más módja olyan külső erők alkalmazásán alapul, amelyek hatásvonala a tengelyen megy át – tehát ún. *centrális* erők –, úgyhogy ezek eredő forgatónyomatéka, $\Sigma \mathbf{M}_{\text{külső}}$ zérus marad.

impulzusmomentumot nyer, a kerék végső forgási irányával *ellentételesen*, úgyhogy a rendszer teljes impulzusmomentuma az eredeti $I_0\omega_0$ marad. Ebben a kísérletben az impulzusmomentum z irányú L_z komponense megmarad. A forgó kerék tengelyének más irányba való elfordítása esetén az impulzusmomentumnak csak a z irányú komponense az, ami megmarad, mivel a szék *nem* zárt rendszer az x és az y tengelyre vonatkozó külső forgatónyomatékokkal szemben.

12-10 PÉLDA

Vízszintes súrlódásmentes rúdon két kisméretű golyó van rögzítve a tengelytől $0,10\text{ m}$ távolságban szimmetrikus helyzetben, ahogyan a 12-20 ábra mutatja. A golyók tömege $m = 0,20\text{ kg}$. A golyók elég kicsinyek ahhoz, hogy pontszerűnek legyenek tekinthetők. A rúdnak a középpontján átmenő függőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $0,070\text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Miközben az eszköz a függőleges tengely körül percnként 80 fordulatot tesz meg, a golyókat rögzítő retesz kikapcsol. A golyók kifelé csúsznak, és a rúd két végén lévő ütközőnél megállnak. Határozzuk meg a rendszer végső szögsebességét.

MEGOLDÁS

Mint ahogy a tengelyre külső forgatónyomaték nem hat, alkalmazhatjuk az impulzusmomentum megmaradásának a törvényét. Először átszámítjuk a forgási sebességet radián per másodpercre:

$$\omega = 80 \frac{\text{ford.}}{\text{perc}} \left[\frac{1 \text{ perc}}{60 \text{ s}} \right] \left[\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ ford.}} \right] = 8,37 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

átszámítási tényező

Továbbá mivel

$$L_0 = L$$

$$\left[(I_{\text{rúd}})_0 + (I_{\text{golyók}})_0 \right] \omega_0 = \left[(I_{\text{rúd}}) + (I_{\text{golyók}}) \right] \omega$$

$$\omega = \omega_0 \frac{(I_{\text{rúd}})_0 + (I_{\text{golyók}})_0}{(I_{\text{rúd}}) + (I_{\text{golyók}})}$$

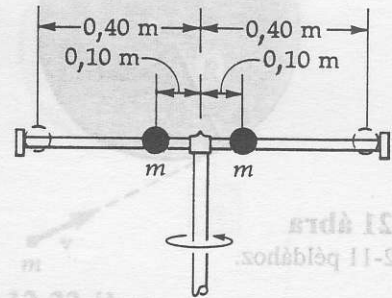
Behelyettesítés után

$$\omega = \left(8,37 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \frac{(0,070 \text{ kg m}^2) + (2)(0,20 \text{ kg})(0,10 \text{ m})^2}{(0,070 \text{ kg m}^2) + (2)(0,20 \text{ kg})(0,40 \text{ m})^2}$$

azaz

$$\omega = \left(8,37 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \frac{(0,074 \text{ kg m}^2)}{(0,13 \text{ kg m}^2)} = 4,76 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

adódik.



12-20 ábra
A 12-10 példához.

Impulzusmomentummal együtt járó ütközések

Olyan ütközések esetén, amelyeknél valamely tengelyre vonatkozó impulzusmomentum fellép, az ütközésben résztvevő testekre érvényes az impulzusmomentum megmaradása, ha ezen tengelyre a külső forgatónyomatékok eredője az ütközés alatt zérus. A következő két példa ezt az esetet illusztrálja.

12-12 PÉLDA

Ez a példa azt mutatja be, hogy az impulzusmomentum fogalma nem kötődik a forgó mozgáshoz. Tegyük fel, hogy a 12-8 példában szereplő 32 kg tömegű gyermek a (3 m átmérőjű) ringliszil kerületét érintő egyenes mentén 1,8 m/s sebességgel fut a földön, és a deszkázatra ugrik. (12-22 ábra.) (a) Határozzuk meg a gyermek L impulzusmomentumát a ringliszil \star tengelyére vonatkozóan a felugrás előtt! (b) Ha a ringliszil kezdetben nyugalomban van, határozzuk meg az ω szögsebességét, miután a fiú a deszkázatra ugrott és ott megkapaszkodott! A ringliszil tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka $720 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

MEGOLDÁS

(a) A fiú impulzusa $p = mv = (32 \text{ kg})(1,8 \text{ m/s}) = 57,6 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$. Így impulzusmomentuma a \star tengelyre:

$$L = (p)(\text{momentumkar}) = (57,6 \text{ kg}\cdot\text{m/s})(1,5 \text{ m}) = 86,4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$

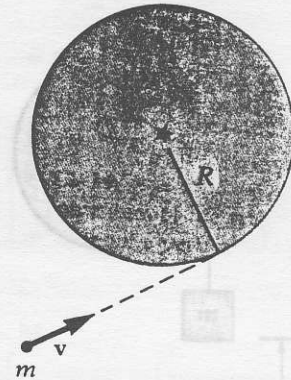
(b) Miután a fiú elrugaszkodott a földről, hogy a ringliszilre az érintő irányából ráugorjon, a ringliszilből és a fiúból álló rendszerre a tengelyre vonatkozóan külső forgatónyomaték már nem hat, a rendszer zárt. Így a \star tengelyre vonatkozó impulzusmomentum megmarad a „befogási” ütközés során. Mint minden rugalmatlan ütközéskor, az energia nem marad meg. Az ütközés alatt a tartó csapágyak vízszintes irányú erő lökést fejtenek ki a ringliszilre (azért, hogy azt rögzítsék), így az összimpulzus sem marad meg. Azonban ha a csapágyak súrlódásmentesek, akkor forgatónyomatékot nem fejtenek ki, így a \star tengelyre vonatkozó impulzusmomentum az ütközéskor megmarad.

$$L_0 = L$$

$$(L_{\text{fiú}})_0 + (L_{\text{rsp}})_0 = [I_{\text{fiú}} + I_{\text{rsp}}]\omega$$

$$86,4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} + 0 = [(72 + 720)\text{kg}\cdot\text{m}^2]\omega.$$

$$\text{Tehát az } \omega \text{ szögsebesség } \omega = \frac{86,4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}{792 \text{ kg}\cdot\text{m}^2} = 0,109 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$



12-22 ábra
A12-12 példához.

Rugalmatlan ütközések alkalmával a mechanikai energia egy része hővé alakul, ill. maradandó deformáció létrehozására fordítódik. A következő példa ezt illusztrálja forgó mozgással együttjáró ütközés esetére.

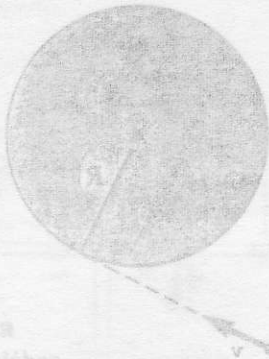
12-13 PÉLDA

Számítsuk ki az előző példa esetén az ütközés során bekövetkezett ΔK mechanikai energiaváltozást

MEGOLDÁS

A kezdeti mechanikai energia a fiú kinetikus energiája: az egyenesvonallú mozgása során: $K_0 = \frac{1}{2}mv^2$. Az ütközés után a végső forgási kinetikus energia $K = \frac{1}{2}I_{\text{rsp}}\omega^2 + \frac{1}{2}I_{\text{fiú}}\omega^2$. Így:

$$\Delta K = K - K_0$$



12-21 ábra
A 12-11 példához

$$\Delta K = \frac{1}{2} [I_{\text{rtp}} + I_{\text{fü}}] \omega^2 - \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} [(720 + 72) \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2] (0,109 \text{ rad/s})^2 - \frac{1}{2} (32 \text{ kg}) (1,8 \text{ m/s})^2$$

$$\Delta K = -32,7 \text{ J}$$

A negatív előjel arra utal, hogy ennyi kezdeti mechanikai energia elveszett (átalakult) hő- vagy egyéb energiává.

12.9 A forgó testen végzett munka és a forgási energia

A haladó- és a forgó mozgás analógiájának további kiterjesztéséhez tekintsük most azt a ΔW munkát, amelyet a rögzített tengelyre szerelt tárcsán egy külső F erő végez. (12-23 ábra.) Az erő a tárcsa síkjában hat. Amint a tárcsa egy kicsiny $\Delta\theta$ szöggel elfordul, az F_t tangenciális erőkomponens egy kicsiny $\Delta S = r\Delta\theta$ ívhosszal elmozdul, így az erő $\Delta W = F_t \Delta S = F_t r \Delta\theta = M \Delta\theta$ munkát végez.

	Elemi munka	Összes munka	
Munkavégzés forgó mozgás esetén	$\Delta W = M \Delta\theta$	$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$	(12-20)

A munka egysége N·m [J]. (A szöggel kapcsolatos dimenzió nélküli „radián” egységet szokás szerint elhagyjuk.)

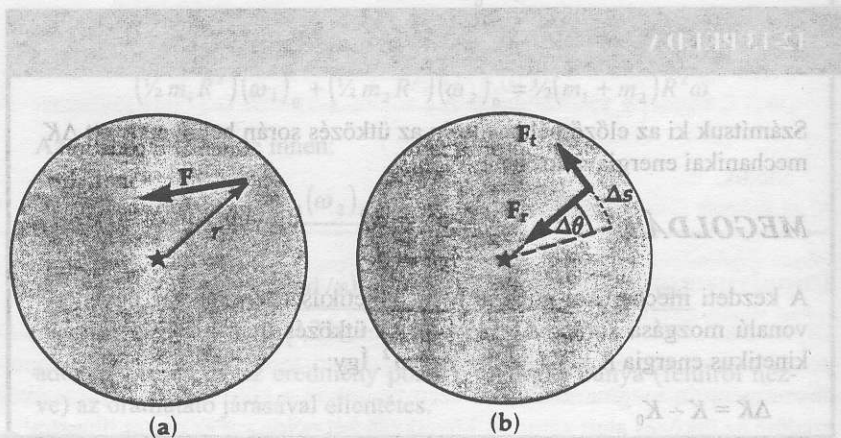
A (12-2) egyenletből azt kapjuk, hogy

Forgási kinetikus energia $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$ (12-21)

Konzervatív rendszerben, amelyben a külső erők és nyomatékok eredője zérus, mind a haladó-, mind a forgó mozgásra érvényes a mechanikai energia megmaradása:

A mechanikai energia megmaradása $E_0 = E$
 $U_0 + K_0 = U + K$ (12-22)

Hasonlóképpen a munkatétel is alkalmazható forgó mozgás esetén



12-23 ábra

A rögzített tengelyre szerelt tárcsára a külső F erő hat. A (b) ábrán az erő tangenciális és radiális komponensre van bontva.

A munkatétel rögzített tengely körüli forgásra

$$\left[\begin{array}{l} \text{A forgatónyomatékok} \\ \text{összes munkája} \end{array} \right] = \Delta K_{rot} \quad (12-23)$$

12-14 PÉLDA

Egy homogén, tömör hengerre felcsavart kötel végére m tömegű test van erősítve a 12-24 ábra szerint. A henger tömege $M = 4m$, sugara R , és súrlódásmentes csapágy tartja. Alkalmazzuk a mechanikai energia megmaradásának elvét az m tömeg gyorsulásának meghatározására. (Ez a 12-6 példában tárgyalt feladat más megoldása. Ez a megközelítés rendszerint egyszerűbb, mint a Newton törvények alkalmazása.)

MEGOLDÁS

Célszerű azt feltételezni, hogy az m tömegű test nyugalomból indul, és h távolságra mozdul lefelé. (Ez a távolság a számítás során ki fog esni.) A rendszer konzervatív, és az energia megmaradás elve alapján könnyen kiszámíthatjuk a test sebességét, ha h magassággal lejjebb kerül. A gravitációs potenciális energia $U_g \equiv 0$ referencia szintjeként az m tömeg végső helyzetét választjuk.

$$E_0 = E$$

$$(U_g)_0 + (K_{trans})_0 + (K_{rot})_0 = U_g + K_{trans} + K_{rot}$$

$$(mgh)_0 + (\frac{1}{2}mv^2)_0 + (\frac{1}{2}I\omega^2)_0 = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$mgh + (0) + (0) = (0) + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(4m)R^2]\omega^2.$$

Mint hogy a kötel az R sugarú hengerről csúszás nélkül tekeredik le, ezért $v = R\omega$. Ezt behelyettesítve

$$2gh = v^2 + \frac{1}{2}(4)v^2 = 3v^2.$$

innen

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}gh}.$$

Az m tömegű test függőleges gyorsulását a kinematikai egyenletből nyerjük:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0)$$

Behelyettesítés után

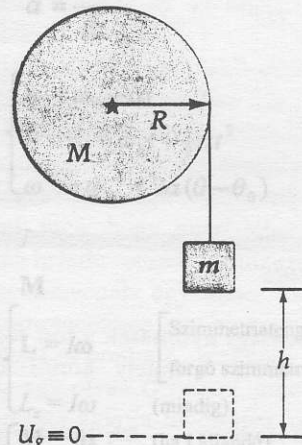
$$\frac{2}{3}gh = 0 + 2ah$$

adódik, ahonnan

$$a = \frac{1}{3}g.$$

12-15 PÉLDA

Miután egy spirálrugót hossz tengelye körül egyensúlyi helyzetéből 60° -kal elcsavartunk, $0,30 \text{ N}\cdot\text{m}$ forgatónyomaték szükséges ahhoz, hogy ebben a megfeszített helyzetben nyugalomban maradjon. Feltételezve a Hooke törvény érvényességét, amely szerint a visszatérítő forgatónyomaték a szögelfordulással arányos, határozzuk meg (a) a



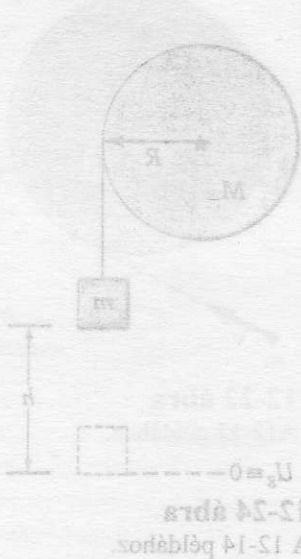
12-24 ábra

A 12-14 példához.



12-25 ábra

A dobverőhöz hasonló idom merev rúdra szerelt két m tömegű testből áll. A rúd a forgástengelyre rögzítve van, a becsúszott szög θ . A rendszer forgása során minél előbb $L = r \times p$ impulzusmomentuma egyirányú. A két vektor $L = L_1 + L_2$ összege az ábra mutatja. Az L vektor a rendszer ω szögsebességű forgása során a függőleges forgástengely körül körforgást. Mivel L és ω nem párhuzamosak egymással.



rugó κ un. torziós rugóállandóját, és (b) a megcsavart rugóban tárolt potenciális energiát!

MEGOLDÁS

Az egyszerű rugóra vonatkozó Hooke törvény $F = -kx$, ahol k a rugóállandó. Ezzel analóg módon felírható az ideális spirálrugóra vonatkozó Hooke törvény: $M = -\kappa\theta$, ahol M a forgatónyomaték, k pedig az un. csavarási vagy torziós rugóállandó.

(a) A θ szög $\theta = 60^\circ \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} \right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$.

$M = -\kappa\theta$ -ből $\kappa = \frac{M}{\theta} = \frac{(0,30 \text{ Nm})}{\left(\frac{\pi}{3} \text{ rad} \right)} = 0,287 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$.

(b) A megfeszített rugóban a potenciális energia

$$U_{\text{rugó}} = \frac{1}{2} \kappa \theta^2 = \frac{1}{2} \left(0,287 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right) \left(\frac{\pi}{3} \text{ rad} \right)^2 = 0,157 \text{ Nm} = 0,157 \text{ J}.$$

12-16 PÉLDA

Egy $0,13 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ tehetetlenségi nyomatékú köszörűkőre $25 \text{ N} \cdot \text{m}$ állandó forgatónyomaték hat. Határozzuk meg energetikai megfontolásokkal a szögsebességet (fordulat per másodpercben) a köszörűkő 15 fordulata után. (A súrlódás elhanyagolásával.)

MEGOLDÁS

A forgó mozgásra felírt munkatételről megállapítottuk, hogy

$$[\text{Az eredő forgatónyomaték munkája}] = \Delta K_{\text{rot}}$$

$$(25 \text{ Nm})(15 \text{ ford.}) \underbrace{\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ ford.}} \right)}_{\text{átszámítási tényező}} = \frac{1}{2} (0,13 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) \omega^2 - 0 \quad (12-24)$$

Innen ω értéke:

$$\omega = \sqrt{\frac{(25)(15)(2\pi)(2)}{(0,13)}} = 190 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Fordulat per másodperce átszámítva:

$$190 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \underbrace{\left(\frac{1 \text{ ford.}}{2\pi \text{ rad}} \right)}_{\text{átszámítási tényező}} = 30,3 \frac{\text{ford.}}{\text{s}}$$

12-23 Ábra

A rögzített tengelyre szerelt tárcsára a külső F erő hat. A (b) ábrán az erő tangenciális és radiális komponense van bontva.

A fenti példa egy, a forgási problémákkal kapcsolatos megszívlelendő figyelmeztetést tartalmaz arra az esetre, ha a feltett kérdésre a választ radián helyett fordulatszámmal kell megadni. A munka $M\theta$ kifejezésében a θ szö-

12-1 táblázat

haladó mozgás		forgó mozgás	
elmozdulás	x	szögelfordulás	θ
sebesség	$v = \frac{dx}{dt}$	szögsebesség	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
gyorsulás	$a = \frac{dv}{dt}$	szöggyorsulás	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Kinematikai egyenletek			
(állandó gyorsulás esetén)	$\begin{cases} v = v_0 + at \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \\ v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \end{cases}$	(állandó szöggyorsulás esetén)	$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$
tömeg	m	tehetlenségi nyomaték	I
erő	F	forgatónyomaték	M
impulzus	$p = mv$	impulzusnyomaték (perdület)	$\begin{cases} L = I\omega \\ L_z = I\omega_z \end{cases}$ <div style="font-size: small; margin-left: 20px;"> [Szimmetriatengelyük körül] [forgó szimmetrikus testekre] (mindig) (ha I állandó) </div>
Newton II. törvénye	$\begin{cases} F = ma & (\text{állandó } m \text{ mellett}) \\ F = \frac{dp}{dt} \end{cases}$	A forgó mozgás alapegyenlete	$\begin{cases} M = I\alpha \\ M = \frac{dL}{dt} \end{cases}$
erőimpulzus	$F\Delta t = \Delta p$	forgatónyomaték-impulzus	$M\Delta t = \Delta L$
munka	$\Delta W = F\Delta x$	munka	$\Delta W = M\Delta\theta$
mozgási energia	$K = \frac{1}{2}mv^2$	mozgási energia	$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$
teljesítmény	$P = Fv$	teljesítmény	$P = M\omega$
Hooke-törvény	$F = -kx$	Hooke-féle forgatónyomaték-törvény	$M = -k\theta$

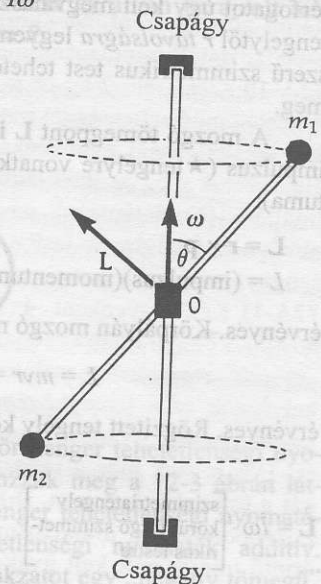
get mindig radiánban kell kifejezni. Helytelen tehát úgy okoskodni, hogy azért, mert a végeredményt fordulat per percben keressük, a feladat megoldása során mellőzhetjük a 15 fordulat radián egységre való átszámítását. Az átszámítás elhagyása helytelen eredményre vezet. Minden forgással kapcsolatos összefüggésben a szögelfordulást radiánban kell megadni.⁹

A 12-1 táblázatban összefoglaltuk és párhuzamba állítottuk a haladó és a forgómozgás egyenleteit.

12.10 Dinamikai kiegyensúlyozatlanság

Minden merev testnek, még a legszabálytalanabbnak is, van három, egymásra merőleges, ún. *fő tehetlenségi tengelye*. (Szimmetrikus testek esetében mindegyik szimmetriatengely fő tehetlenségi tengely.) Jóllehet a fő tehetlenségi tengelyek definiálása meghaladja e könyv kereteit, de jelentőségük miatt mégis említést teszünk róluk. Ugyanis a fő tehetlenségi tengelyek körül végzett forgás esetében az L impulzusmomentum-vektor párhuzamos az ω vektorral, és ekkor a (12-11) egyenlet érvényes. Az ilyen esetek vizsgálata egyszerű, itt csak ezekkel foglalkozunk.

Ha az L és ω vektor – mint pl. a 12-25 ábrán – nem párhuzamos, akkor a vizsgálat bonyolult. Ilyenkor a rendszer dinamikailag kiegyensúlyozatlan,



12-25 ábra

A dobverőhöz hasonló idom merev rúdra szerelt két m tömegű testből áll. A rúd a forgástengelyre rögzítve van; a bezárt szög θ . A rendszer forgása során mindkét test $L = r \times p$ impulzusmomentuma egyirányú. A két vektor $L = L_1 + L_2$ összegét az ábra mutatja. Az L vektor a rendszer ω szögsebességű forgása során a függőleges forgástengely körül körbejár. Tehát L és ω nem párhuzamosak egymással.

⁹ Az egyetlen kivételt a kinematikai egyenletek képezik. Azokban megengedhető, hogy „fordulatot” használjunk radián helyett, mivel ott ugyanaz az átszámítási tényező szerepel az egyenletek két oldalán minden tagjában.

és a forgás alatt oldalirányban „ütni” kezd. Az L impulzusmomentum-vektor a rendszer forgása során körbejárja a függőleges tengelyt és a csapágyaknak forgatónyomatékot kell gyakorolniuk a rendszerre, hogy létrehozzák az impulzusmomentum irányváltozását. A rúd is úgy mozogna, hogy a θ szög 90° -ra álljon be, hogy így a rajta lévő tömegekkel egyetlen, a forgástengellyel párhuzamos síkba kerülne. A rúd ferde helyzetének fenntartása a függőleges befogócsapágyakra nagy feszültséget gyakorol. Nagy fordulatszám mellett emiatt túlzott csapágykopás vagy a tartószerkezet törése következhet be, ha csak a forgó rendszert a szimmetriát helyreállító tömegek hozzáadásával „dinamikailag ki nem egyensúlyozzák.”¹⁰ Szokásos a gépjárművek kiegyensúlyozatlan kerekének peremére kicsiny ólom „súlyokat” erősíteni a nagy sebességnél jelentkező ütés és berezgés csökkentésére.

Összefoglalás

Az I tehetetlenségi nyomaték a test forgási tehetetlenségét fejezi ki a \star tengely körüli szöggyorsulással szemben:

tömegpont-rendszerre $I = \sum_i m_i r_i^2$ folytonos tömegeloszlásra $I = \int r^2 dm$
 (az egész testre)

A dm elemi tömeg ρdV -vel egyenlő (ahol ρ a sűrűség és dV a térfogatelem). Megjegyezzük, hogy a dV elemi térfogatot úgy kell megválasztani, hogy a dm a forgástengelytől r távolságra legyen. A 12-3 ábra néhány egyszerű szimmetrikus test tehetetlenségi nyomatékát adja meg.

A mozgó tömegpont L impulzusmomentuma a p impulzus (\star tengelyre vonatkozó) nyomatéka (momentuma):

$L = r \times p$
 $L = (\text{impulzus})(\text{momentumkar}) = (mv)(r \sin \theta)$

érvényes. Körpályán mozgó részecskére,

$L = mvr = mr^2\omega$

érvényes. Rögzített tengely körül forgó testre

$L = I\omega$ [szimmetriatengely körül forgó szimmetrikus testre] $L_z = I\omega$ [mindig, ha I a z tengelyre vonatkozik és a test z körül forog]

A forgó mozgás alapegyenlete:

$\Sigma M_{\text{külső}} = I\alpha$ [szimmetriatengelye körül forgó szimmetrikus testre (I állandó)]
 $\Sigma M_{\text{külső}} = dL/dt$ [általános alak]

Az I tehetetlenségi nyomatékot a (diagramokon feltüntetendő) \star tengelyre kell számítani. A helyes vektorábrára, amelyben az erővektorokat a támadási pontból kiindulva rajzoljuk fel; ez a támadáspont, sokat segít az erőkarok kiszámításánál és a forgatónyomatékok forgási irányának meghatározásánál.

Az olyan rendszerek esetében, amelyekre (a \star tengelyre vonatkozóan) külső forgatónyomaték nem hat, érvényes az **impulzusmomentum megmaradása**:

$L_0 = L$ [Rögzített z tengelyre vonatkoztatva, amikor I is a z tengelyre vonatkozik, (vagy egy a tömegközéppont) átmenő, önmagával párhuzamosan haladó tengelyre.]
 $I_0\omega_0 = I\omega$

A forgatónyomaték munkája θ szögelfordulás során:

$\Delta W = M \Delta\theta$ és $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$

A forgási (kinetikus) energia: $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$

A munkatétel forgó mozgásra:

[A forgatónyomatékok összes munkája] $= \Delta K_{\text{rot}}$

A haladó és a forgó mozgást leíró mennyiségekre vonatkozó analógiák a 12-1 táblázatban találhatók.

¹⁰ Megjegyezzük, hogy statikus egyensúlyban ez a probléma nem jelentkezik. A dobverő a tömegközéppontjára vonatkozóan minden rúdállásban statikus egyensúlyban van. A dinamikai kiegyensúlyozatlanság csak akkor lép fel, ha a rendszer forog.

Kérdések

1. Súrlódásmentesen csapágyazott függőleges tengelyre tárcsát erősítettek. A forgásban lévő tárcsa külső peremén egy egér ül. Az egér most megindul a tengely felé a tárcsára festett sugárirányú vonal mentén. Mi történik a tárcsa szögsebességével? Ha csak a tárcsára ható erőket vesszük figyelembe, mi okozhatja a tárcsa szögsebességét megváltoztató forgatónyomatékat?
2. Két egyforma műhold, A és B kering a Föld körül R , illetve $2R$ sugarú körpályán. Egyenlő-e az érintő irányú sebességük? Ha nem, melyiküké nagyobb? Mit mondhatunk a szögsebességükről, impulzusmomentumukról, forgási kinetikus energiájukról?
3. Magyarazzuk meg, hogyan képes az egyenletesen fújó szél a szélmalom lapátjaira forgatónyomatékat gyakorolva a szélkereket forgásba hozni?
4. Tegyük fel, hogy ismeretlen sűrűségű anyagból gömböt készítettek. Anélkül, hogy lyukat fúránk a gömbbe, meg tudjuk-e határozni, hogy a gömb tömör, vagy üreges?
5. Egy ember a forgó zsámolyon ülve kinyújtott karral két egyenlő tömegű testet tart. A zsámoly forgása

Feladatok

12.2 A tehetetlenségi nyomaték

12A-1 Négy darab l hosszúságú súlytalan rúdból készített négyzet sarkaiban egy-egy m tömegű tömegpont van. Határozzuk meg a rendszer tehetetlenségi nyomatékát, ha (a) a négyzet síkjára merőleges, középponton átmenő tengely körül, (b) a négyzet síkjában lévő, az egyik oldal felezőpontján és a középponton átmenő tengely körül, (c) az egyik oldalon átmenő tengely körül, (d) az egyik csúcsból az átlósan szemközti csúcson átmenő tengely körül forog.

12A-2 A nitrogén molekula (N_2) atomjai között a kötéstávolság $1,10 \times 10^{-10}$ m. Az egyes nitrogén atomok tömege $1,661 \times 10^{-27}$ kg. Határozzuk meg a tehetetlenségi nyomatékat az atomokat összekötő egyenesre merőleges, a tömegközépponton átmenő tengelyre.

12B-3 Elhanyagolható tömegű rudakkal összekötött egy síkba eső hat egyenlő nagyságú tömegpont szabályos hatszöget alkot. A rendszer teljes tömege M , és az egyes tömegpontok a hatszög középpontjától R távolságra vannak. Számítsuk ki a rendszer tehetetlenségi nyomatékát két szemközti tömegponton átmenő tengelyre! A megoldás $\frac{1}{2}MR^2$ úgy tűnik, hogy a tehetetlenségi nyomaték négy-nél több tömegpont esetében a tömegpontok számától független (ha a szabályos sokszög csúcsainak a száma páros).

12.3 A tehetetlenségi nyomaték számítása folytonos tömegeloszlás esetében

12A-4 Egy M tömegű huzalt két félkörből álló „S” alakra hajlítottak a 12-26 ábrán látható módon. Határozzuk

közben elejti a testeket. Megváltozik-e az impulzusmomentuma? Alkalmazható-e erre az esetre az impulzusmomentum megmaradása?

6. Mi történik a gépkocsi kerekeinek impulzusmomentumával, amikor a mozgó kocsit megállítják? Sérül-e ebben az esetben az impulzusmomentum megmaradásának az elve?
7. Miért indítják a Cape Canaveralban kilőtt műbolygókat inkább nyugati, mint keleti irányba?
8. A legtöbb helikopter farába a helikopter hossztengeleyére merőleges vízszintes tengely körül forgó kisméretű légcsavart szerelnek. Miért?
9. Magyarazzuk meg, hogy miért lehet egy egyenes vonal mentén haladó testnek impulzusmomentuma!
10. Egy test egyenesvonalú egyenletes mozgást végez. Ha impulzusmomentuma egy bizonyos (az egyenesen kívül lévő) O pontra L , mekkora az impulzusmomentuma egy olyan O pontra, amelyik az egyenestől háromszor akkora távolságra van? Mekkora az impulzusmomentuma az egyenesen lévő pontra?

meg tehetlenségi nyomatékát az ábrán berajzolt tengelyre! A félkörívek sugara R .

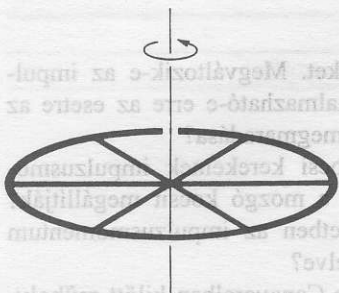


12-26 ábra

A 12A-4 feladathoz.

12B-5 Felhasználva a tömör henger tehetlenségi nyomatékának képletét, határozzuk meg a 12-3 ábrán láthatóhoz hasonló üreges henger tehetlenségi nyomatékát. (Útmutatás: a tehetlenségi nyomaték additív. Próbáljuk meg a kívánt alakzatot egy „negatív tömegű” tömör henger és egy nagyobb tömör henger összegzésével kialakítani! A negatív tömeg tárgyalásához lásd a 10-6 példát!)

12A-6 Számítsuk ki a 12-27 ábrán látható kerék tengelyére vonatkoztatott tehetlenségi nyomatékot. Az abroncs tömege M , és a hat küllő mindegyikének tömege is M . Tekintsük az abroncsot R sugarú vékony karikának, a küllőket vékony rudaknak! [Az l hosszúságú rúd egyik végén átmenő (a rúdra merőleges) tengelyre számított tehetlenségi nyomatéka $\frac{1}{3}Ml^2$.]

**12-27 ábra**

A 12A-6 feladathoz.

12.4 Az inerciasugár

12A-7 40 kg tömegű üreges henger belső és külső sugara 2 cm, illetve 4 cm. Határozzuk meg a henger tengelyére vonatkozó inerciasugarat.

12A-8 Egy lendkerék egy homogén, tömör 30 cm sugarú 5 kg-os tárcsából áll, amelyet körülvesz egy koncentrikusan elhelyezett 40 kg tömegű homogén üreges henger. Utóbbi belső sugara 30 cm, külső sugara 40 cm. Határozzuk meg az inerciasugarát.

12.5 Az impulzusmomentum (perdület)

12A-9 Az $1,7 \times 10^{-27}$ kg tömegű proton 5×10^6 m/s sebességű egyenes vonalú mozgással a nyugalomban lévő neutronhoz közelít. A proton pályája 1×10^{-11} méterrel kerüli el a neutront. Mekkora a protonnak a neutronra vonatkoztatott impulzusmomentuma?

12A-10 Kisméretű 2 kg-os test 3 m átmérőjű körpályán 4 m/s állandó sebességgel mozog. (a) Határozzuk meg a test tehetetlenségi nyomatékát a kör középpontjára. (b) Határozzuk meg az impulzusmomentumot a kör középpontjára. (c) Határozzuk meg azt az érintőirányú erőt, amelynek hatására a test a középpont körül 5 rad/s^2 szöggyorsulással mozog.

12A-11 Két, egyenként 4 kg-os tömegpont 0,40 m hosszú, könnyű merev rúddal van összekapcsolva. Ezt a „súlyzó” rendszert vízszintes, súrlódásmentes felületre helyezük és a tömegközépponton átmenő függőleges tengely körül 3 rad/s szögsebességű forgásba hozzuk. (a) Határozzuk meg a rendszer tehetetlenségi nyomatékát a tömegközéppontra. (b) Határozzuk meg a tömegközéppontra az impulzusmomentumot. (c) Mekkora érintő irányú erőt kell gyakorolni mindegyik testre ahhoz, hogy a szöggyorsulás 6 rad/s^2 legyen?

12B-12 Az $\mathbf{F} = 4\hat{x} + 3\hat{y} + 0\hat{z}$ (newtonban mért) erő 4 m/s sebességgel tolik el az x tengely irányában. (a) Mekkora az impulzusmomentuma az origóra vonatkozóan a 0 időpontban (a mozgás kezdetén)? Mekkora lesz az erőnek az origóra vonatkozó impulzusmomentuma 1 másodperc múlva?

12B-13 Az $(5\text{m}, 12\text{m}, 0)$ koordinátákkal megadott pontban $\mathbf{F} = 4\hat{x} + 3\hat{y} + 0\hat{z}$ (newtonban kifejezett) erő hat. Határozzuk meg a koordináta-rendszer origójára vonatkoztatott forgatónyomaték nagyságát és irányát.

12.7 Newton második törvénye forgó mozgás esetében (A forgó mozgás alapegyenlete)

12A-14 Tömör, homogén, henger alakú köszörűkő tömege 2 kg, átmérője 20 cm. Nyugalmi helyzetből indítva a köszörűkő állandó szöggyorsulással 3 s alatt 3300 fordulat per perc forgási sebességet ér el. (a) Határozzuk meg, hányat fordul a köszörűkő a gyorsulás folyamán. (b) Határozzuk meg azt a forgatónyomatékot, amellyel a köszörűkőnek ekkora szöggyorsulást lehetett adni!

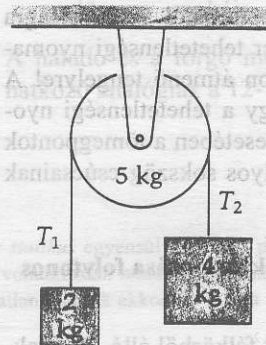
12A-15 Egy 0,40 kg-os gyöngyszem súrlódásmentesen csúszik egy huzalból hajlított 0,60 m átmérőjű vízszintes síkú körön. Milyen nagy érintő irányú erő hatására lesz a gyöngyszemnek 4 rad/s^2 szöggyorsulása?

12A-16 Egy lendkerék tömege 500 kg, inerciasugara 60 cm. (a) Mekkora állandó nagyságú forgatónyomaték hatására lesz a nyugalomból induló lendkeréknek 20 s alatt 600 fordulat per perc a fordulatszám? (b) Ha a lendkerék sugara 80 cm, mekkora állandó tangenciális erő hoz létre ekkora forgatónyomatékot?

12B-17 Egy 0,75 kg tömegű repülőgép-modell huzalon kipányvázva 30 m sugarú körpályán repül. A repülőgép motorja 0,80 N erőt fejt ki, a huzalra merőlegesen. (a) Határozzuk meg a kör középpontjára vonatkoztatva a motor által kifejtett forgatónyomatékot! (b) Határozzuk meg a repülőgép szöggyorsulását a repülés folyamán. (c) Határozzuk meg a repülőgép pályaérintő irányú gyorsulását!

12A-18 Egy tárcsa alakú homogén tömör köszörűkő sugara 7 cm, tömege 2 kg. Nyugalomból indul és egyenletesen gyorsul annak az állandó, 0,6 N·m forgatónyomatéknak hatására, amelyet a motor fejt ki a kerékre. (a) Mennyi ideig tart, amíg a kerék eléri 1200 fordulat per perc végső üzemi fordulatszámát? Hány fordulatot tesz meg a kerék a gyorsulás időtartama alatt?

12B-19 A 12-28 ábrán látható homogén tömör henger sugara 10 cm, tömege 5 kg, és vízszintes súrlódásmentes tengelyre van szerelve. A 2 kg-os és a 4 kg-os hasábokat nyugalmi helyzetből elengedjük. A kötélt és a henger között csúszás nem lép fel. Newton törvényeinek alkalmazásával a két hasábra és a hengerre határozzuk meg (a) a T_1 és a T_2 kötélerőt a hasábok gyorsulásának

**12-28 ábra**

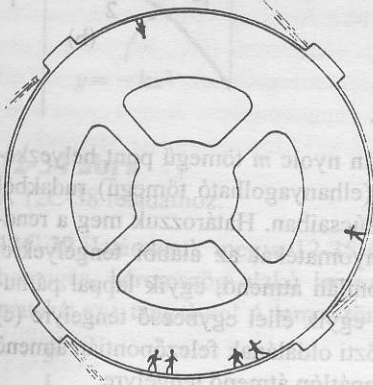
A 12B-19 és a 12B-20 feladathoz.

ideje alatt, és (b) a 4 kg-os hasáb sebességét a nyugalmi helyzetétől mért 4 m távolságu süllyedés után!

12B-20 Oldjuk meg a 12B-19 feladat (b) kérdését az energia megmaradásának elvét alkalmazva.

12B-21 Egy M tömegű, k inerciasugarú, nagy, kerék alakú űrállomást konstruáltak olyan térben, ahol a gravitáció elhanyagolható. Annak érdekében, hogy az űrhajósok számára mesterséges gravitációt biztosítsanak, a forgástengelytől R távolságra lévő külső perem közelében a kereket a 19-29 ábrán bemutatott szimmetrikus helyzetű négy rakétamotorral forgásba hozzák. (a) Határozzuk meg azt az ω szögsebességet, amely a peremen a földi gravitációval egyenlő nagyságú mesterséges gravitációs gyorsulást okoz! Mennyi ideig kell működtetni a négy, egyenként F érintőirányú erőt kifejtő rakétamotort, hogy (a nyugalomból induló) rakéta az ehhez szükséges szögsebességet elérje?

12B-22 Tegyük fel, hogy az előző példában szereplő rakéták egyikét valamilyen valószerűtlen hiba folytán ellenkező irányban szerelték fel. A négy rakétát az előző példában szereplőnél sokkal rövidebb Δt időre bekapcsolják, majd kikapcsolják. Így a rakéták még a kerek észrevehető megmozdulása előtt leállnak. A kerek azonban impulzusmomentumhoz jut. Feltéve, hogy a kerek nyugalmi helyzetből indul, fejezzük ki a haladási és forgási sebességet a megadott mennyiségek függvényében, valamilyen inerciarendszerre vonatkoztatva.



12-29 ábra

A 12B-21 és a 12B-22 feladathoz.

12B-23 Elhanyagolható tömegű, 1 m hosszú merev rúd egyik vége függőleges tengelyhez van csapágyazva úgy, hogy a vízszintes síkban szabadon foroghat. Szabad végére 0,4 kg-os testet erősítettek. A rúd középpontjára a rúdra merőlegesen vízszintes irányú 5 N erőt alkalmaznak. (a) Határozzuk meg a rúdnak a csapágy körüli szöggyorsulását! (b) Nyugalomból indulva hány radiánnal fordul el 4 s alatt? (Az erő a mozgás folyamán merőleges marad a rúdra.)

12B-24 Homogén, tömör, hengerformájú, 50 cm átmérőjű, 60 kg tömegű köszörűkő nyugalmi állapotból 20 s alatt 800 fordulat per perc szögsebességre tesz szert. (a) Mekkora állandó forgatónyomaték hatott a köszörűkőre? (b) A köszörűkőhöz egy fém szerszámot szorítunk.

A szorító erő radiálisan befelé mutató komponense 20 N. A szerszám és a köszörűkő között a mozgási súrlódási együttható 0,50. Mekkora teljesítményt kell a motornak a köszörűkő számára átadnia, hogy a forgás sebessége 800 fordulat per perc maradjon? Tegyük fel, hogy a csapágy súrlódás elhanyagolható.

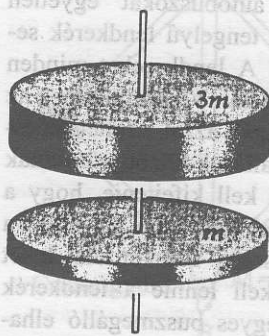
12.8 Az impulzusmomentum (perdület) megmaradása

12B-25 Tekintsünk egy olyan körbe forgó vidámparki járatot, amelyet egy súrlódásmentes csapágyakon nyugvó, vízszintes kör alakú tárcsára szereltek. A tárcsa sugara 3 m, tömege 1000 kg és inerciasugara 2 m. A befékezett tárcsa szélén egy 80 kg-os ember 2 m/s sebességgel körben fut. Ekkor a tárcsa fékjét kiengedik, az ember abbahagyja a futást és a tárcsa szélére leül. Határozzuk meg, hogy ekkor a tárcsa mekkora szögsebességgel fog forogni. (Útmutatás: Megváltozik-e a rendszer teljes impulzusmomentuma?)

12B-26 Az előző feladatban szereplő 80 kg-os ember a szabadon forgó tárcsa közepén van. A tárcsa 3 s alatt tesz meg egy fordulatot. Az ember a mozgó tárcsán sugárirányban kifelé mászik egészen a külső peremig és ott leül. Határozzuk meg a forgó tárcsa végsebességét!

12B-27 Egy téglalap alakú tömör, homogén anyagú ajtó tömege 13 kg, szélessége 1 m, magassága 2 m. Egyik oldalán zsanérozás úgy van felerősítve, hogy a függőleges tengely körül elfordulhat. Egy 380 m/s sebességű 12 g tömegű lövedék merőlegesen az ajtó közepébe ütközik és ott beágyazódik. Határozzuk meg (radián per másodpercben) az ajtó szögsebességét közvetlenül a lövedék becsapódása után. Az ajtó zsanérra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka $I = Mb^2/3$, ahol b az ajtó szélessége; az ajtó magassága nem játszik szerepet. Miért? (Útmutatás: Megmarad-e a zsanérra vonatkoztatott impulzusmomentum az ütközés folyamán? Megmarad-e az energia?)

12B-28 A 12-30 ábrán látható két tömör tárcsa sugara R , egyik tömege m , a másiké $3m$. A bemutatott módon súrlódásmentes csapágyazással közös tengelyre vannak szerelve. A felső tárcsának ω_0 kezdő szögsebességet adunk, majd ráejtjük az eredetileg nyugalomban lévő alsó tárcsára.



12-30 ábra

A 12B-28 feladathoz.

ra. A tárcsák – a közöttük fellépő súrlódás hatására – végül közös ω szögsebességgel együtt forognak. A megadott mennyiségek alapján határozzuk meg (a) a végső ω szögsebességet és (b) a tárcsák egymáson való csúszásakor keletkező teljes súrlódási hőenergia mennyiségét! (Feltételezzük, hogy a felső korongot olyan kis magasságból ejtjük le, hogy a gravitációs potenciális energia változása elhanyagolható.) (c) Mi lenne az egyenesvonalú analógja ennek a forgási „ütközésnek”?

12.9 Munka és energia forgó mozgás esetén

12A-29 Egy m tömegű műbolygó R sugarú körpályán kering a Föld körül. Impulzusmomentuma L . Mekkora a kinetikus energiája m , L és R függvényében?

12A-30 Fonál végén lévő m tömegű testet függőleges síkban mozgásba hozunk úgy, hogy folytonosan körbe mozog. Amikor a test a tetőpontra van, akkor a középpontra vonatkoztatott impulzusmomentuma kisebb, mint amikor az alsó ponton halad át. Magyarazzuk meg az impulzusmomentum csökkenését és növekedését okozó forgatónyomaték eredetét!

12B-31 80 cm átmérőjű és $11 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ tehetetlenségi nyomatékú kereket vízszintes súrlódásmentes tengelyre szereltek. A kerék peremére tekert zsinór 6 N nagyságú állandó feszítőereje a kereket adott szöggyorsulással forgatja. Ha a kerék nyugalmi helyzetből indul, mekkora lesz az ω szögsebesség három fordulat után? Oldjuk meg a feladatot kétféleképpen: keressük meg a szöggyorsulást (a) kinematikai egyenletek felhasználásával és (b) a forgó mozgásra alkalmazott munkatétel felhasználásával!

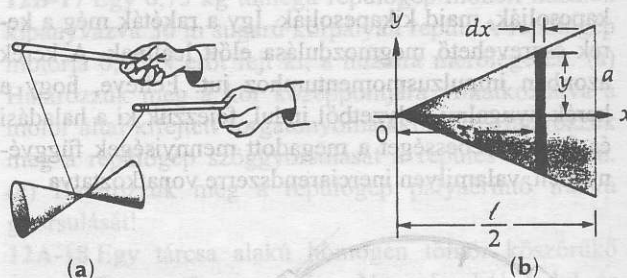
12B-32 Egy kis játszótéri ringlispil sugara 2 m, tehetlenségi nyomatéka $600 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Egy 30 kg-os gyermek a középpontban ül, mialatt a ringlispil elhanyagolható súrlódású csapágyon 0,2 ford/s fordulatszámmal forog. A gyermek ezután az alaplap pereméig kimászik és leül. A gyermeket tömegpontnak tekintve (a) határozzuk meg a ringlispil végső szögsebességét (fordulat per másodpercben), (b) a rendszer kezdeti forgási kinetikus energiáját és (c) a rendszer végső forgási kinetikus energiáját! (d) Ha az (a) és a (b) kérdésre adott válasz különböző, magyarázzuk meg, mi történt az energiakülönbséggel!

12B-33 Javasolták, hogy az autóbuszokat egyetlen nagy, alulra szerelt, függőleges tengelyű lendkerék segítségével lássák el energiával. A lendkereket minden buszmegállóban fel kellene pörgetni. Vizsgáljuk meg az ilyen rendszer megvalósíthatóságát, azzal a feltételezéssel, hogy a 15 percenkénti megállások között a busznak átlagosan 75 kW teljesítményt kell kifejtenie, hogy a lendkerék 2 tonnánál nem lehet nehezebb és, hogy a lendkerék maximális szögsebessége 100 fordulat lehet percenként. (a) Mekkora kell lennie a lendkerék forgási energiájának minden egyes buszmegálló elhagyásakor? (b) Mekkora kell lennie a lendkerék inerciasugarának? (c) Mit gondolunk, megvalósítható ez a javaslat?

12B-34 Egy $163 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ tehetlenségi nyomatékú lendkerék 1280 fordulat per perc szögsebességgel forog, majd 2 perc alatt állandó nagyságú (negatív) szöggyorsulással leállítják. (a) Mekkora a lendkerék kezdeti kinetikus energiája? (b) Mekkora forgatónyomatékkal kell a lendkerékre hatni, hogy ez a lassulás létrejöhessen? (c) Ha a fékező mechanizmus a tengely (23 cm átmérőjű) peremére ható súrlódás, mekkora a csúszó súrlódási erő? (d) Számítsuk ki a súrlódási erő által végzett $f_k \Delta s$ munkát, és igazoljuk hogy a keletkezett hő megegyezik a lendkerék kezdeti forgási kinetikus energiájával!

További feladatok

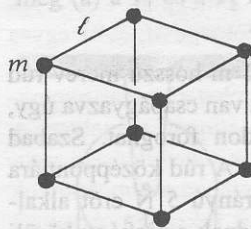
12C-35 A *diabolo* egy homogén, tömör, kettős kúp alakú játékszer, amit két pálcára kötözött zsineggel pörgetnek és dobálnak. (12-31 ábra.) Számítsuk ki az M tömegű, a alapkör sugarú, l teljes hosszúságú diabolo tehetlenségi nyomatékát a középponti tengelyre! (Útmutatás: Osszuk fel a kúpot változó y sugarú dx vastagságú tárcsákra, a 12-31b ábra szerint.)



12-31 ábra

A 12C-35 feladathoz.

12C-36 A 12-32 ábrán nyolc m tömegű pont helyezkedik el l hosszúságú (elhanyagolható tömegű) rudakból összeállított kocka csúcsaiban. Határozzuk meg a rendszer tehetlenségi nyomatékát az alábbi tengelyekre: (a) a kocka középpontján átmenő, egyik lappal párhuzamos tengelyre (b) egyik éllel egybeeső tengelyre (c) egyik lap két szemközti oldalának felezőpontján átmenő tengelyre (d) egyik lapátlón átmenő tengelyre.

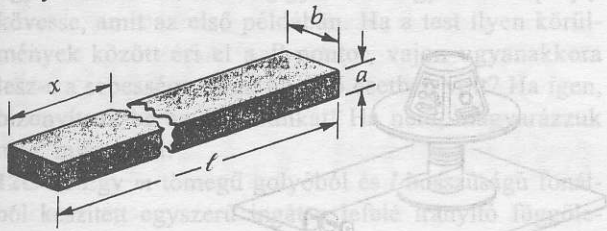


12-32 ábra

A 12C-36 feladathoz.

12C-37 A 12-33 ábrán bemutatott vékony, $a \times b \times l$ méretű hasáb inhomogén anyagból készült. A hasáb ρ sűrűsége az x távolság függvényében a $\rho = kx^3$ összefüggés szerint változik. (Megjegyzés: a és b elhanyagolható l mellett.) (a) Mi a k együttható dimenziója? (b) Integ-

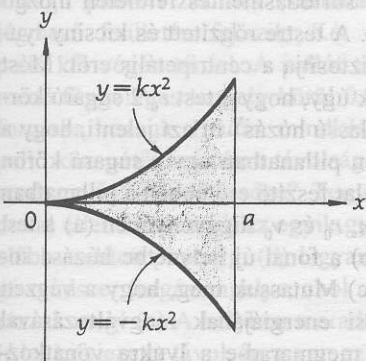
rálással határozzuk meg, hogy a vékony hasáb tömege $M = abk^2/4$. (c) Fejezzük ki az $x = 0$ helyen a hasáb keresztmetszetének középpontján átmenő vízszintes (a hasáb hossz tengelyére merőleges) y tengelyre vonatkoztatva a hasáb tehetetlenségi nyomatékát M és I függvényében.



12-33 ábra

A 12C-37 feladathoz.

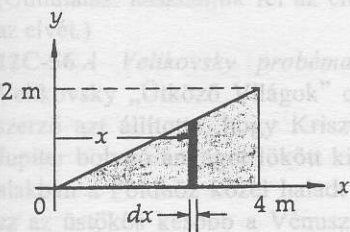
12C-38 A 12-34 ábrán látható alakra vágott vékony fémlémez tömege M . Határozzuk meg az y tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát M és a függvényében!



12-34 ábra

A 12C-38 feladathoz.

12C-39 Határozzuk meg a 12-35 ábrán látható vékony homogén, háromszög alakú lemez tehetetlenségi nyomatékát az y tengelyre! A lemez tömege 47 kg.



12-35 ábra

A 12C-39 feladathoz.

12C-40 Az m tömegű részecskét az $(x_1, 0, 0)$ pontban elengedik. Ezt követően a (lefelé irányított) pozitív y tengely irányában szabadon esik, a gravitáció hatása alatt. (a) Határozzuk meg az m tömegre ható $(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ forgatónyomatékot az O origóra, és mutassuk meg, hogy ez a mennyiség időben állandó! (b) Keressünk formulát az O origóra vonatkoztatott $(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$ impulzusmomentumra az idő függvényében!

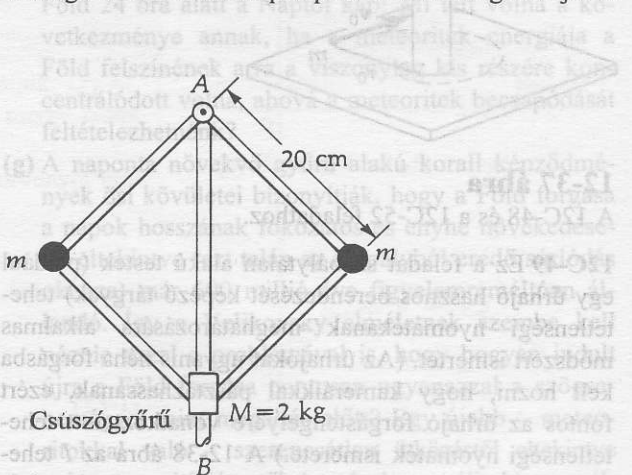
12C-41 Két, nem egyenlő M és m tömegű csillag ket-tőscsillag-rendszert képez. A gravitáció a két csillagot egymástól D távolságban tartja, mialatt a csillagok a közös tömegközéppontjuk körüli körpályán mozognak, azonos ω szögsebességgel. (a) A csillagokat tömegpontként tekintve, határozzuk meg (az adott szimbólumok függvényében) impulzusmomentumaik tömegközéppontra számított L_M/L_m arányát. (b) Fejezzük ki a rendszer teljes K_{rot} forgási kinetikus energiáját M, m, D , és ω függvényében.

12C-42 Egy origó középpontú kör két szemközti (diagramétrális helyzetű) pontjában két azonos tömegű test helyezkedik el. Mindkettő azonos és állandó szögsebességgel mozog az origó körül az xy síkban. Mutassuk meg, hogy a testek impulzusmomentuma az xy sík minden pontjára ugyanaz!

12C-43 A bolygómozgás második Kepler törvénye a következőképpen fejezhető ki: bármely bolygót a Nappal összekötő egyenes egyenlő idők alatt egyenlő területeket sűrol. Mutassuk meg, hogy $dA/dt = L/(2m)$, ahol dA/dt az a sebesség, amellyel az egyenes a területet sűrolja (az ún. területi sebesség), L a bolygó Nap körüli impulzusmomentuma és m a bolygó tömege. (Útmutatás: Tekintsük a rádiusz $d\theta$ szögű elfordulása során közelítőleg sűrolt, háromszög alakú területet.)

12C-44 Kisméretű műbolygó saját tengelyére vett tehetetlenségi nyomatéka $21,7 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. A műbolygóba, forgástengelyével párhuzamos tengelyű kis elektromotort szereltek. A műszakiak – a motor bekapcsolásával – a műbolygót 24° -kal el akarják fordítani. (a) Ha a motor forgó részének tehetetlenségi nyomatéka $8 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, hány teljes fordulatot kell megtenni a motornak a műbolygóhoz rögzített koordinátarendszerben? (b) Szükséges-e, hogy a motor és a műbolygó tengelyei egybeessenek, vagy elég, ha a két tengely egymással párhuzamos?

12C-45 A 12-36 ábrán bemutatott forgó függőleges AB rúdra szerelt csuklós centrifugáregulátort arra tervezték, hogy elzárja az üzemanyagot, ha az AB rúd szögsebessége a 300 fordulat per perc értéket meghaladja. A



12-36 ábra

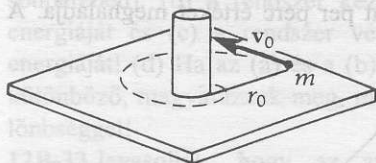
A 12C-45 feladathoz.

szabályozónak négy (súrlódásmentes csuklókkal) összekapcsolt csatlakozója van, mindegyik 20 cm hosszú, és tömegük elhanyagolható. A rúdon az $M = 2$ kg tömegű gallér súrlódásmentesen csúszhat. A szabályozó mechanizmus akkor zárja el az üzemanyagot, amikor a gallér tömegközéppontja a csúcshoz 10 cm-nél közelebb kerül. (a) Mekkora a két test (azonos) m tömege? Mekkora húzóerő ébred a maximális szögsebesség esetén a két felső csatlakozóban? Készítsünk megfelelő vektorábrát.

12C-46 Egy 5 tonna súlyú műbolygó körpályán kering a Föld körül. Kismértékű légellenállás hatása alá kerülve spirálpályán közelít lassan a Földhöz. 805 km-rel a Föld fölött keringési ideje 101,5 perc. Miután a műbolygó spirálpályán a Föld felszínéhez közelítve már csak 644 kilométer magasan kering, keringési ideje 98,1 perc. (a) Mekkora a műbolygó impulzusmomentuma a Föld középpontjára vonatkoztatva a kezdeti és a végső állapotban? Tegyük fel, hogy a Föld sugara 6440 km. (b) Feltéve, hogy a spirál meredeksége annyira kicsi, hogy a pálya minden körülfordulásnál körnek tekinthető, mekkora a kezdeti és a végső állapothoz tartozó sebesség? (Vegyük észre: annak ellenére, hogy a légellenállás a sebességgel ellentétes irányú, a műbolygó sebessége nő!)

12C-47 Az előbbi példában szereplő műbolygó pályasugarának ismertetett csökkenése 500 nap alatt ment végbe. Becsüljük meg a súrlódási erő nagyságát!

12C-48 A 12-37 ábrán az m tömegű test v_0 sebességgel vízszintes súrlódásmentes felületen mozog. A testhez erősített fonál a test mozgása során egy rögzített henger alakú pecekre tekeredik, így módon a test szűkülő spirálpályára kényszerül. Ha v_0 a sebesség akkor, amikor a fonál hossza r_0 , mekkora lesz a sebesség, amikor a sugár $r_0/2$ -re csökken? Fejtsük ki részletesen a választ! (Útmutatás: a test pillanatnyi sebessége mindig merőleges a fonálra. Megmarad-e a pecek középpontjára vonatkozó impulzusmomentum? Megmarad-e az energia?)

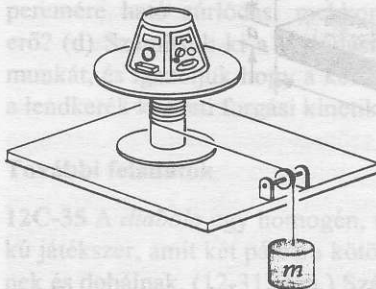


12-37 ábra

A 12C-48 és a 12C-52 feladathoz.

12C-49 Ez a feladat szabálytalan alakú testek (például egy úrhajó hasznos berendezését képező tárgyak) tehetetlenségi nyomatékának meghatározására alkalmas módszert ismertet. (Az úrhajókat ugyanis néha forgásba kell hozni, hogy kamerákkal pásztázhassanak, ezért fontos az úrhajó forgástengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték ismerete.) A 12-38 ábra az I tehetetlenségi nyomaték kísérleti úton való meghatározásának egyik módját mutatja. Forgó tárcsa r sugarú tengelyére csavart, csigán átvetett zsinór végén m töme-

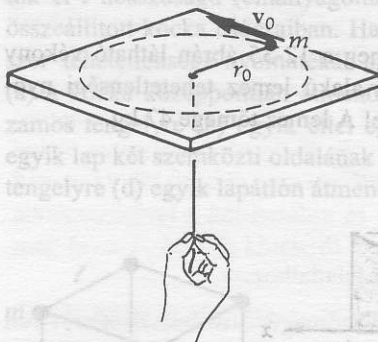
gű test függ. A vizsgált tárgyat a forgó tárcsára helyezik. Ha az m tömegű testet elengedik, akkor az, egyenes gyorsulással süllyedve h távolság megtétele után v sebességre tesz szert. Mutassuk meg, hogy a berendezés I tehetetlenségi nyomatéka (a forgótárcsa tehetetlenségi nyomatékát is beleértve) $mr^2(2gh/v^2 - 1)$.



12-38 ábra

A 12C-49 feladathoz.

12C-50 A 12-39 ábra egy r_0 sugarú körpályán v_0 kezdősebességgel vízszintes súrlódásmentes felületen mozgó m tömegű testet mutat. A testre rögzített és kicsiny lyukon átvezetett fonál biztosítja a centripetális erőt. Most a fonalat lassan húzzuk úgy, hogy a test $r_0/2$ sugarú körpályára kerüljön. (A „lassú húzás” itt azt jelenti, hogy a test közelítőleg minden pillanatban egy r sugarú körön mozog, és hogy a fonalat feszítő erő ebben a pillanatban mv^2/r .) Számítsuk ki m , r_0 és v_0 függvényében (a) a test végső sebességét és (b) a fonál új helyzetbe húzása során végzett munkát! (c) Mutassuk meg, hogy a végzett munka a test mozgási energiájának megváltozásával egyenlő! (Útmutatás: megmarad-e a lyukra vonatkoztatott impulzusmomentum? Megmarad-e az energia?)



12-39 ábra

A 12C-50 és a 12C-52 feladathoz.

12C-51 Egy 2 kg tömegű test 5 m sugarú körpályán mozog. A nyugalomból induló testnek a kör középpontjára számított L impulzusmomentuma az idő függvényében az $L = 3t^2$ összefüggés szerint növekszik. (a) Mekkora a kör középpontjára vonatkozó $M(t)$ forgatónyomaték (b) Határozzuk meg az $\omega(t)$ szögsebesség változását az idő függvényében.

12C-52 A 12-37 ábrán a kezdeti feltételek a következők: az m tömegű test v_0 sebességgel mozog, amikor a fonál hossza r_0 . Egy későbbi időpontban a test a spirál-

pálya valamely P pontjába érkezik ahol sebessége v (ez a pont nem szerepel az ábrán). Most tekintsük a 12-39 ábrát. Tegyük fel, hogy itt a testet *ugyanabból a pontból* és *ugyanazzal a v_0 kezdősebességgel* indítjuk, mint az iménti példában szereplő testet. De most ügyesen úgy húzzuk a fonalat, hogy a test ugyanazt a pályát kövesse, amit az első példában. Ha a test ilyen körülmények között éri el a P pontot, vajon ugyanakkora lesz-e a sebessége, mint az első esetben volt? Ha igen, bizonyítsuk be az állításunkat! Ha nem, magyarázzuk meg, miért nem!

12C-53 Egy m tömegű golyóból és l hosszúságú fonálból készített egyszerű ingát a lefelé irányító függőlegessel bezárt θ ($< 90^\circ$) szögű kezdőhelyzetben elengedünk. A forgatónyomaték segítségével számítsuk ki azt a munkát, amit a gravitáció végez amíg az inga golyója a legmélyebb pontját eléri. Mutassuk meg, hogy az eredmény megegyezik a golyó súlyának és a mozgás függőleges vetületének szorzatával.

12C-54 Egy 70 kg tömegű, l hosszúságú homogén anyagú palló vízszintes (súrlódásmentesnek tekintett) jégmező felületén fekszik. Két 40 kg-os gyermek a palló két végén térdel. A pallót tömegközéppontján átmenő függőleges tengely körül 0,9 rad/s szögsebességű forgásba hozzuk. Ezután mindkét gyermek bemászik a palló közepétől számított távolság feléig. (a) Mekkora a rendszer új szögsebessége? Tegyük fel, hogy a mondottal ellentétben csak az egyik gyermek mászik a palló előbb említett pontjára. (b) Ugyanott van-e a jégen forgó rendszer forgástengelye, ahol az előbb volt? Magyarázzuk meg! (c) A helyben maradt gyermektől mekkora (l -lel kifejezett) távolságra van az új forgástengely? (d) Határozzuk meg a rendszer végső szögsebességét!

12C-55 Egy D hosszúságú vékony rúd egyik vége vízszintes tengellyel a padlóra van erősítve. Szabad végét felemelve a rúd a vízszintessel θ szöget zár be. Ekkor – nyugalmi helyzetből – elengedjük. Határozzuk meg azt a sebességet, amellyel a rúd vége a padlóhoz csapódik! (Útmutatás: használjuk fel az energia megmaradásának az elvét.)

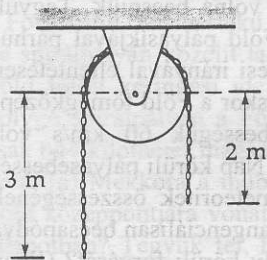
12C-56 A *Velikovsky probléma*. 1950-ben adták ki Velikovsky „Ütköző Világok” című könyvét. Ebben a szerző azt állította, hogy Krisztus előtt 1500 körül a Jupiter bolygó anyagot lökött ki magából, ami üstökös alakban a Földhöz közel haladt el. (Bizonygatta, hogy ez az üstökös később a Vénusz bolygóvá alakult.) Az ezzel járó meteorit záporról feltételezte, hogy a Föld forgását – legalábbis egy kis időre – megállította. Velikovsky azt is állította, hogy később, Krisztus előtt 747-ben, majd 687-ben a Mars hatására a korábbi katasztrófa kisebb mértékben megismétlődött.

Vizsgáljuk meg ezt az elméletet a fizika szempontjából, hogy lássuk, vajon lehetségesek-e az állításai? Durva becsléseket fogunk alkalmazni, minden paraméterre csupán egyetlen jellemző adatot használva. A feladat megoldásához SI egységekben a következő paraméterekre lesz szükségünk:

A Föld tömege	6×10^{24} kg	} Ezek közelítő értékek.
A Föld sugara:	6×10^6 m	
Szögsebessége:	7×10^{-5} rad/s	

- (a) Homogén tömör gömbnek tekintve a Földet, számítsuk ki SI egységekben impulzusmomentumát! Ez az, aminek az ellen kellett volna hatnia, hogy a Föld forgása leálljon (és mellesleg, amit majd később valahonnan pótolni kellett volna, hogy a Föld újra forogni kezdjen).
- (b) A legkedvezőbb esetben a meteoriteknek az egyenlítőre érintőlegesen kellett volna becsapniuk. Tegyük fel, hogy a meteoritek a Föld pályasíkjával párhuzamosan, de a Föld keringési irányával ellentétesen mozogtak, hogy becsapódáskor a Föld tömegközéppontjához viszonyított sebességük 60 km/s volt (mintegy kétszerese a Föld Nap körüli pályasebességének). Mekkora volt a meteoritek összességének tömege, ha az egyenlítőre tangenciálisan becsapódva megállították a Föld tengely körüli forgását? (Ilyen ütközésekre nincs semmilyen geológiai bizonyíték.)
- (c) Mekkora lett volna a meteoritek összes térfogata, ha feltételezzük, hogy olyan kőzet típusú anyagból álltak, aminek sűrűsége lényegében a földkéreg sűrűségével megegyező: 2700 kg/m^3 . (A meteoritek mintegy 94 %-a kőzet típusú anyag. Összehasonlítsuk: a Föld térfogata kb. $22 \times 10^{18} \text{ m}^3$.)
- (d) Tegyük fel, hogy a (b) részben mondott becsapódás után a Föld tömegközéppontja folytatta Nap körüli pályáját. Mekkora lett volna az a teljes kinetikus energia, amely a Föld tengely körüli forgásának leállításához és a befogott meteoritek sebességváltozásához következtében másfajta energiává alakult?
- (e) Hogyan változott volna valójában a Föld tömegközéppontjának mozgása a meteoritokkal való (b) pontban leírt ütközés következtében?
- (f) A földi légkör egységnyi felületére egységnyi idő alatt merőlegesen beeső szoláris energia 1370 W/m^2 . A (d) pontra adott válasszal való összehasonlíthatóság érdekében számítsuk ki azt az energiát, amit a Föld 24 óra alatt a Naptól kap! Mi lett volna a következménye annak, ha a meteoritek energiája a Föld felszínének arra a viszonylag kis részére koncentráldott volna, ahová a meteoritek becsapódását feltételezhetnénk?
- (g) A naponta növekvő gyűrű alakú korall képződmények ősi kőületei bizonyítják, hogy a Föld forgása a napok hosszának fokozatos és enyhe növekedésétől eltekintve (ezt talán az árapályból eredő súrlódás okozza) már 600 millió éve figyelemreméltóan állandó. Így a Velikovsky elméletnek szembe kell néznie azzal a problémával is, hogy hogyan indult újra a Föld forgása pontosan ugyanazzal a szögsebességgel mint megállás előtt? Egy újabb – meteoritokkal való – szerencsétlen ütközéstől eltekintve vajon a gravitációs erők (amelyek centrálisak) megváltoztathatják-e a Föld forgásállapotát?

(h) Velikovsky kritikusan rámutatott arra, hogy mi történhet volna az óceánokkal, a légkörrel, az emberekkel és egyéb, a Föld felszínén lévő laza tárgyakkal, ha a Föld forgása rövid időre leállt volna. Próbáljuk meg körüljárni ezt az ellenvetést azzal a feltételezéssel, hogy a földforgás leállási folyamata elég hosszú ideig (mondjuk, egy vagy két óráig) tartott. Becsüljük meg azt az oldalirányú gyorsulást, ami a földi egyenlítőn fellépett volna, és röviden fejtjük ki, túlélhető lett volna-e egy ilyen esemény, vagy nem!



12-40 ábra

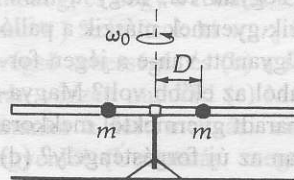
A 12C-57 feladathoz.

12C-57 Egy hajlékony lánc tömeg/hosszúság aránya $\lambda = 2 \text{ kg/m}$. A lánc nyugvó állapotban egy csigán a 12-40 ábrán látható módon helyezkedik el. A csiga henger alakú, homogén, tömör, tömege 10 kg, sugara 20 cm. A rendszert nyugalmi helyzetéből elengedjük. Számítsuk ki az energia megmaradásának elvét felhasználva a lánc alsó pontjának sebességét 1 m süllyedés után, ha a lánc a csiga forgása során nem csúszik meg.

12C-58 Képzeld el, hogy egymillió, egyenként 1000 kg tömegű versenykocsi a 45° -ik szélességi körön nyu-

gati irányban hajt. A kocsik úgy mozognak, hogy róluk a Nap az égboltnak mindig ugyanazon fix pontján látható. (Ehhez kb. 1150 km/óra sebesség lenne szükséges.) A nyugalomból történő indulás és a szükséges gyorsulás következtében a Föld szögsebessége ω_0 -ról ω -ra változik. (a) Ha a kocsik 24 órán át folytatnák mozgásukat, mekkora lenne a megváltozott nap hossza? Rövidülne, vagy hosszabbodna? Adjuk meg a választ relatív változásként: $\Delta\omega/\omega_0 = (\omega - \omega_0)/\omega_0$. (b) Az atomórák pontossága 1 a 10^{11} -hez. Ki tudná-e mutatni az atomóra ezt a változást?

12C-59 Ahogyan a 12-41 ábra mutatja, két kisméretű egyenlő tömegű test elhanyagolható tömegű vízszintes rúdon szabadon, súrlódásmentesen csúszhat. Kezdetben a testek a középpontja körül ω_0 szögsebességgel szabadon forgó rúd forgástengelyére szimmetrikus D távolságban rögzítve vannak. Ezután a testek rögzítése kioldódik, s ezt követően azok a rúdon kifelé csúszva csökkentik a rúd szögsebességét. Számítsuk ki a testek rúd menti v sebességét abban a pillanatban, amikor a rúd középpontjától $2D$ távolságra vannak! Fejezzük ki az eredményt D és ω_0 függvényében! (Útmutatás: tekintjük külön a mozgás radiális komponensétől és külön a forgástól származó energiát.)



12-41 ábra

A 12C-59 feladathoz.

gati irányban hajt. A kocsik úgy mozognak, hogy róluk a Nap az égboltnak mindig ugyanazon fix pontján látható. (Ehhez kb. 1150 km/óra sebesség lenne szükséges.) A nyugalomból történő indulás és a szükséges gyorsulás következtében a Föld szögsebessége ω_0 -ról ω -ra változik. (a) Ha a kocsik 24 órán át folytatnák mozgásukat, mekkora lenne a megváltozott nap hossza? Rövidülne, vagy hosszabbodna? Adjuk meg a választ relatív változásként: $\Delta\omega/\omega_0 = (\omega - \omega_0)/\omega_0$. (b) Az atomórák pontossága 1 a 10^{11} -hez. Ki tudná-e mutatni az atomóra ezt a változást?

12C-59 Ahogyan a 12-41 ábra mutatja, két kisméretű egyenlő tömegű test elhanyagolható tömegű vízszintes rúdon szabadon, súrlódásmentesen csúszhat. Kezdetben a testek a középpontja körül ω_0 szögsebességgel szabadon forgó rúd forgástengelyére szimmetrikus D távolságban rögzítve vannak. Ezután a testek rögzítése kioldódik, s ezt követően azok a rúdon kifelé csúszva csökkentik a rúd szögsebességét. Számítsuk ki a testek rúd menti v sebességét abban a pillanatban, amikor a rúd középpontjától $2D$ távolságra vannak! Fejezzük ki az eredményt D és ω_0 függvényében! (Útmutatás: tekintjük külön a mozgás radiális komponensétől és külön a forgástól származó energiát.)

- 10A-15 a) 200 N b) 173 N jobbra, 100 N felfelé
 10A-17 0,94 m
 10A-19 A válasz adott.
 10B-21 A válasz adott.
 10B-23 $\theta = \arctg(f/m_s)$
 10B-25 a) 1011 N b) 854 N, 14,2° a vízszintes felett
 10B-27 a) 214 N b) 369 N, 54,5° a vízszintes felett
 10B-29 $b(1+\sqrt{3})$
 10B-31 515 N
 10B-33 a) 1386 N b) 1297 N, 67,7° a vízszinteshez
 10B-35 A válasz adott.
 10B-37 $\theta = \arctg \mu_k$
 10B-39 a) $N_a = N_b = 60$ N b) 16,4 N
 10C-41 15,9°
 10C-43 2230 N
 10C-45 A válasz adott.
 10C-47 A válasz adott.
 10C-49 a) 17,6 N b) 42,9 N
 c) 13,3 N, 41,0° a függőlegetől
 10C-51 A válasz adott.
 10C-53 A válasz adott.
 10C-55 $(0,3a/4)$
 10C-57 A válasz adott.
 10C-59 1,04T

XI. Fejezet

- 11A-1 a) $3,14 \times 10^{-4}$ m/s b) $1,75 \times 10^{-3}$ rad/s
 11A-3 kismutató $\frac{1}{45} \times 10^{-4}$ rad/s; asztronauta
 $1,05 \times 10^{-3}$ rad/s; nagymutató $1,75 \times 10^{-3}$ rad/s;
 köszörűkő 628 rad/s
 11A-5 a) 17,4 s b) 4,85 rev
 11B-7 13,5 s
 11B-9 A válasz adott.
 11A-11 43,4 rad/s
 11B-13 $\frac{v}{\pi D} \sqrt{\frac{2h}{g}}$
 11C-15 $\delta = (R-r)\theta / r$

XII. Fejezet

- 12A-1 a) $2m\ell^2$ b) $m\ell^2$ c) $2m\ell^2$ d) $m\ell^2$
 12B-3 A válasz adott.
 12B-5 A válasz adott.
 12A-7 3,16 cm
 12A-9 $8,50 \times 10^{-32}$ kg·m²/s
 12A-11 a) 0,320 kg·m² b) 0,960 kg·m²/s c) 4,80 N
 12B-13 32,9 N·m $-\hat{z}$ irányban
 12A-15 0,480 N
 12B-17 a) 24,0 N·m b) $3,56 \times 10^{-2}$ rad/s²
 c) 1,07 m/s²
 12B-19 a) $T_1 = 24,2$ N, $T_2 = 30,0$ N b) 4,30 m/s

- 12B-21 a) $\sqrt{g/R}$ b) $\frac{Mk^2}{4F} \sqrt{\frac{g}{R^3}}$
 12B-23 a) 6,25 rad/s² b) 50 rad
 12B-25 0,103 rad/s
 12B-27 0,526 rad/s
 12A-29 $L^2/2mR^2$
 12B-31 2,87 rad/s²
 12B-33 a) 67500 kJ b) 24 m
 12C-35 $\frac{3}{5} Ma^2$
 12C-37 c) $2M\ell^2/3$
 12C-39 376 kg·m²
 12C-41 a) m/M b) $\frac{1}{2} [mM/(m+M)] D^2 \omega^2$
 12C-43 A válasz adott.
 12C-45 a) 0,506 kg b) 60,4 N
 12C-47 $1,97 \times 10^{-3}$ N
 12C-49 A válasz adott.
 12C-51 a) 6t Newton méterben, ha t másodpercben adott
 b) $0,060t^2$ radiánban ha t másodpercben adott
 12C-53 A válasz adott.
 12C-55 $\sqrt{3gD \sin \theta}$
 12C-57 2,20 m/s
 12C-59 $D\omega_0 \sqrt{\frac{3}{2}}$

XIII. Fejezet

- 13A-1 a) 4,00 J b) 2,00 J c) 6,00 J
 13A-3 5,96 m/s
 13B-5 $\theta = \arctg(7\mu_s/2)$
 13B-7 A válasz adott.
 13B-9 A válasz adott.
 13B-11 a) 66,7 rad/s b) 8,84 rad/s
 13A-13 $M\ell^2/3$
 13B-15 $g \sin \theta / (1+k_0^2/R^2)$
 13B-17 35,3°
 13B-19 a) 7,48 m/s b) 55,0°
 13B-21 a) 0,741 rad/s b) az óramutató járásával azonos
 irányban
 13C-23 $[11(R-r)]/4$
 13C-25 $h = \frac{7}{5} R$
 13C-27 $a = F / (M + m/3)$
 13C-29 b) $\frac{4T}{11}$
 13C-31 $\arcsin(r/R)$
 13C-33 A válasz adott.
 13C-35 $\frac{2}{3} \ell$
 13C-37 a) $5v_0/7$ b) $12mv_0^2/49f$
 13C-39 a) $2Mg/3$, lefelé b) $R/2$ a TKP-től
 13C-41 A válasz adott.
 13C-43 a) $v_0/3$ b) 0,500
 13C-45 a) $F_1 = 197$ N, $F_2 = 131$ N
 13C-47 jobbra