MUNKA, ENERGIA, TELJESÍTMÉNY

„Szeretem a munkát, csak ülök, s nézem órákon át."

ISMERETLEN BÖLCS

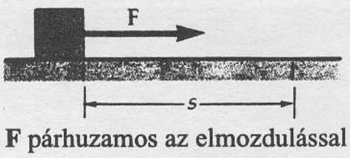
6.1 Bevezetés

Az energia a fizika egyik legfontosabb fogalma. Bár igen sok különböző alakban jelenhet meg, mégsem fizikai szubsztancia, hanem *definícióval bevezetett mennyiség.* Mindenütt ott van azonban, s a fizika különböző ágaiban rendkívüli változatossággal bukkan elő. Éppen amiatt, mert az energia ily sokféle alakban jelenik meg, a fogalmat is sok szempontból kell taglalnunk. Legáltalánosabban egy test *energiája* a test munkavégző képességét mutatja meg, ugyanakkor a *munka* az egyik rendszerről a másikra átvitt energia mértéke.

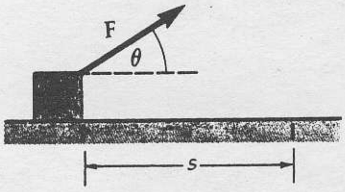
Noha gyakran beszélünk arról, hogy egy testnek meghatározott energiája van, és meghatározzuk, hogy az energia hogyan kerül át az egyik testről a másikra, a testek energiája függ a koordinátarendszer megválasztásától is. Különböző koordinátarendszerből szemlélve, adott test energiája különböző lehet. Ha például egy test az általunk választott koordinátarendszerben mozog, akkor véges kinetikus energiát rendelhetünk hozzá. A testhez rögzített koordinátarendszerben (ehhez képest a test nyugalomban van) a test kinetikus energiája zérus. Így az energia nem olyan fizikai fogalom, amelyből egy test abszolút értelemben többel vagy kevesebbel rendelkezhet, hanem olyan mennyiség, amelyet adott koordinátarendszerben végzett mérések alapján számíthatunk ki.

Az energia azért játszik olyan fontos szerepet a fizikában, mert megmaradó mennyiség. Amennyiben egy *zárt* (környezetétől elszigetelt) rendszer energiáját ismerjük, akkor biztosak lehetünk benne, hogy bármiképp is változzék a rendszer a továbbiakban; *összenergiája mindig ugyanannyi marad.* Így legfeljebb egyik energiaforma alakulhat át a másikba, de energia nem *keletkezhet* és nem *tűnhet* el. Ezt a tapasztalatilag felismert tényt nevezzük az *energiamegmaradás* törvényének. (Erre a 7. fejezetben még visszatérünk.)

A *megmaradó* mennyiségek, tehát azok, amelyek értéke a rendszerben végbemenő különböző fizikai változások ellenére változatlan marad, nagyon fontosak a fizikusok számára. Bár a megmaradási törvények semmit sem mondanak arról, hogy *hogyan* megy végbe egy folyamat, minden esetben biztosítják azonban, hogy ha a megmaradó mennyiség értékét ismerjük egy folyamat előtt, akkor ez a mennyiség ugyanakkora a folyamat lezajlása után is. Ez a megállapítás a fizikai jelenségek analizisében gyakran önmagában is



a) **F** párhuzamos az elmozdulással



b) Az **F** erő állandó θ szöget alkot az elmozdulással

6-l ábra
Egyenes vonalon s távolságba elmozduló **F** állandó erő

jelentős lehet. Energetikai megfontolásokkal gyakran könnyebben oldhatunk meg pl. dinamikai feladatokat, mint a Newton-törvényekkel. Alapvetően az energia fogalma a testek kölcsönhatásának vizsgálatában is segít.

6.2 A munka

A *munka* szó a fizikában jóval szűkebb jelentéssel bír, mint a hétköznapi életben. A fizikában a munka *az energiának egyik testről a másikra való átvitelét* jelenti. A legegyszerűbb esetben, amikor egy test **F** erő hatására s távolságra mozdul el egyenes vonal mentén (6-1a ábra), a W munkavégzés:

$$W = F s \tag{6-1}$$

Ha az **F** erő θ szöget zár be az elmozdulással (6-1b ábra), akkor csak az erőnek az elmozdulás irányába eső összetevője végez munkát:

$$W = (F \cos\theta)\, s \tag{6-2}$$

Szavakkal a **munka** a következőképpen definiálható:

Munka **Az F erő W munkája az erő elmozdulás irányába eső összetevőjének és az elmozdulás nagyságának a szorzatával egyenlő.**

A munka SI-egysége a *newton-méter* (Nm), amit Sir James Joule tiszteletére *joule* (J)-nak is nevezünk.

A $\cos\theta$ tényező előjelétől függően a munka pozitív és negatív értéket is felvehet. Ha az elmozdulás irányába eső erőkomponens a *mozgás irányába* mutat, akkor a munka pozitív, ha azzal *ellentétes*, akkor a munka negatív. Vegyünk a kezünkbe például egy könyvet és emeljük függőlegesen felfelé egyenletesen y távolságra. Ekkor kezünkkel a könyv mg súlyával egyenlő nagyságú erőt fejtünk ki felfelé. Az általunk kifejtett erő a mozgás irányába mutat, azaz a munkavégzés $(F\cdot\cos 0°)\, y = mg\, y$. Ha a könyvet egyenletes sebességgel, y távolságnyira lefelé engedjük, akkor az elmozdulás lefelé mutat, az általunk kifejtett erő azonban változatlanul felfelé irányul. Ebben az esetben $\theta = 180°$ és $\cos\theta = -1$, s emiatt az általunk végzett munka negatív. $(F \cos 180°)y = -mg\, y$. Érdekes, hogy ha a könyvet vízszintesen mozgatjuk egyenletes sebességgel, akkor a munkavégzés zérus, mert a felfelé mutató erő és a vízszintes irányú elmozdulás szöge 90° és $\cos 90° = 0$.

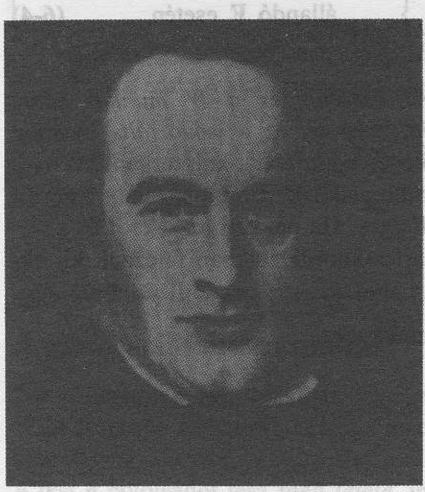
Bármilyen nagy erővel nyomunk például egy falat, mechanikai értelemben mégsem végzünk munkát, ha a fal mozdulatlan marad. Meg kell jegyeznünk azonban, hogy izmaink megfeszítésekor biológiai értelemben fellép energiaátvitel (a mikroszkópikus izomrostok és környezetük között), amikor a kémiai energiát az izomszövet feszítése során elhasználjuk. A kémiai folyamatokban felszabaduló, s elvesztegetett energia hatására izmaink elfáradnak, kimelegszünk, s verítékezni kezdünk. Mechanikai értelemben azonban csak akkor végzünk munkát, *ha az erő irányába eső elmozdulás nem zérus.*

A munkavégzéssel kapcsolatos feladatokban zavart okozhat, ha a súlyt az eddigi módon W-vel jelöljük. Ilyen esetekben célszerűbb a gravitációs erőt F_g-vel vagy mg-vel jelölni.

6-2 ábra
A 6-1 példához.

6-1 PÉLDA

Egy fiú a vízszintessel 40°-os szöget bezáró irányban állandó, 20 N erővel húz egy szánkót (6-3 ábra). Mekkora munkát végez a fiú, míg a szánkót vízszintesen 3 m távolságnyira húzza?



6-3 ábra

Sir James Joule (1818-1889) – akinek tiszteletére a munka és energia mértékegységét elnevezték – gazdag angol sörfőzde-tulajdonos gyermeke volt. Nevét az Egyesült Államokban „dzsaul"-nak ejtik, a mértékegység kiejtése azonban többnyire „zsúl". James Joule gerinc-rendellenességgel és ráadásul vérzékenységi hajlammal született. Bár félénk és ideges természetü volt, igen éles logikával rendelkezett, ügyesen tervezett gépeket és nagyon szeretett kísérletezni. Széleskörű érdeklődése nagy képzelőerővel párosult. Egyszer, amikor a visszhang tanulmányozásához pisztolylövéssel akart éles hangot adni, véletlenül ellőtte szemöldökét. Talán azért, hogy apja sörgyárában olcsóbb energiaforráshoz jusson, vagy egyszerűen a kísérletezés gyönyörűségéért, 19 éves korában Joule hosszú kísérletsorba kezdett az elektromos generátorok működtetéséhez szükséges munka és az áram hatására fejlődő hő közötti kapcsolat tanulmányozására. Vizsgálataihoz kétszázad Fahrenheit-fok pontosságú hőmérőt készített. Ez Joule korában rendkívüli pontosság volt! Öt éves sokoldalú kísérletezés után eredményeit az Angol Természettudományos Társaság elé tárta. A kísérletek – közöttük a vízben forgatott lapátkerék által fejlesztett hő mérése – alapján megállapította a mechanikai munka hőegyenértékét. Munkája nem talált visszhangra. A témáról szóló dolgozatának közlését a Királyi Társaság (az Angol Tudományos Akadémia) a következő évben elutasította. Újabb öt évnek kellett eltelnie, míg „A hő mechanikai egyenértéke" című munkáját a *„Philosophical Transactions"* leközölte. A dolgozatot lektoráló bizottság azonban még ekkor is törölte Joule (egyébként helyes) következtetését, mely szerint a mechanikai munka a súrlódás következtében alakul át termikus energiává.

A nehézségek egyike az volt, hogy a kísérleti berendezésekből a hő egy része ellenőrizhetetlenül „megszökött", ezért a különböző mérésekből különböző számértékű eredmény adódott a hő és a mechanikai munka közötti egyenértékre. Robert Mayer német természettudós (1814-1878) már korábban helyes elméleti következtetésekre jutott, gondolatai közzétételével azonban neki is nehézségei voltak, mert a tudományos folyóiratok nem fogadták el a gyökeresen új elméletet, amit nem támasztottak alá meggyőző bizonyítékok. A döntő lépést egy másik német fizikus, Hermann von Helmholtz (1821-1894) tette meg. Helmholtz Joule kísérleti eredményeit tanulmányozva a fizika sok területén alkalmazott matematikai módszerek felhasználásával általános energiamegmaradási elv kimondását javasolta. A munka és a hő közötti kapcsolat és az energiamegmaradási törvény mély megértéséhez meglepően nehéz út vezetett. A történet sokkal tekervényesebb, mint amit itt felvázoltunk, végső eredménye az energiamegmaradás kimondásával járó nagy egységesítés – Dampier, XX. századi tudománytörténész szavaival élve – „az emberi elme egyik legnagyobb eredménye" (W.C.Dampier, A természettudomány története, Cambridge University Press 4. kiadás 1948.).

MEGOLDÁS

Az x tengely pozitív irányát célszerű a mozgás irányában felvenni.

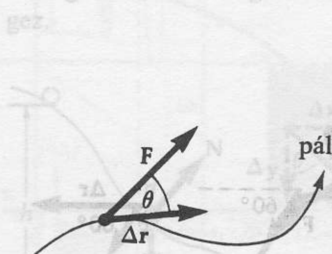
$$W = (F\cos\theta)x = (20\text{ N})(\cos 40^\circ)(3\text{ m}) = 46{,}0\text{ Nm} = 46{,}0\text{ J}$$

A munka és a vektorok skaláris szorzata

A következőkben az **F** erő által $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulás során végzett W munka meghatározására általánosabb módszert vezetünk be. A $\Delta\mathbf{r}$ jelölés *tetszőleges* irányú elmozdulásnövekményt jelöl. A következőkben a vektoralgebra felhasználásával bevezetjük a vektorok skaláris szorzatát. Az **A** és **B** vektorok $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ skaláris szorzatát a következőképpen definiáljuk:

Skaláris szorzat $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta = AB\cos\theta \qquad (6\text{-}3)$$

ahol θ az **A** és **B** vektor által bezárt szög. Az **F** erő munkája definíció szerint az erő és a $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulásvektor skaláris szorzatával egyenlő (6-4 ábra).



6-4 ábra

A kicsiny $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulás mentén ható **F** erő $\Delta W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}$ munkát végez. A $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulás iránya mindig a pálya érintőjének irányába mutat.

MUNKA (W) $\left.\begin{aligned} W &= \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} \\ W &= (F\cos\theta)\,\Delta r \end{aligned}\right\}$ állandó **F** esetén **(6-4)**

Az eredmény skaláris mennyiség. *Az összefüggés a W munkát koordinátarendszertől függetlenül definiálja*, s éppen ez a *vektoriális* írásmód nagy előnye. A vektoregyenletek tetszőleges koordinátarendszerben érvényesek, s általában tömörebbek és egyszerűbb alakúak, mint a speciális koordinátarendszerben felírt megfelelő összefüggés. Ha például az **F** erőt és a $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulásvektort két dimenziós Descartes-koordinátákban fejezzük ki, akkor $\mathbf{F} = F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}}$ és $\Delta\mathbf{r} = \Delta x\,\hat{\mathbf{x}} + \Delta y\hat{\mathbf{y}}$, ahol $\hat{\mathbf{x}}$ és $\hat{\mathbf{y}}$ az x ill y irányú egységvektorokat jelöli, és a $\Delta W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}$ munkavégzés:

Két dimenzióban

$$W = F_x\Delta x + F_y\Delta y$$

Három dimenzióban

$$W = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z$$

Ezek az összefüggések a vektorok skaláris szorzatának tulajdonságaiból következnek. Ezeket a szabályokat foglaljuk össze a következőkben:

A SKALÁRIS SZORZAT

A skaláris szorzat definíció szerint

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta \qquad \textbf{(6-5)}$$

ahol θ a vektorok által bezárt szög.

A skaláris szorzatra érvényes a

***kommutatív* törvény:** $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

és a

***disztributív* törvény:** $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$

Az egységvektorok skaláris szorzatára fennállnak az

$$\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 1$$

és

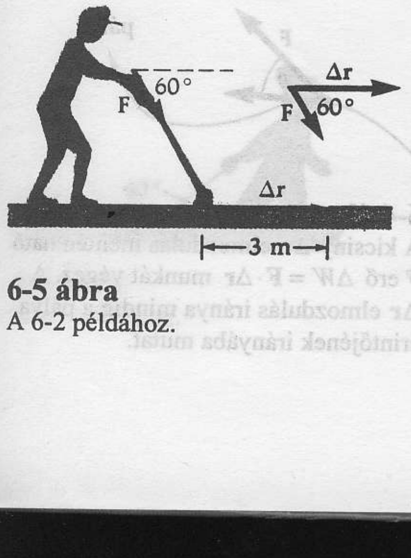
$$\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 0$$

összefüggések és emiatt az

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}})(B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}})$$

szorzat kilenc tagja háromra redukálódik:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad \textbf{(6-6)}$$



6-5 ábra
A 6-2 példához.

6-2 PÉLDA

Egy seprűt a 6-5 ábrának megfelelően a vízszinteshez 60°-os szögben álló nyelénél fogva 50 N állandó erővel tolunk. Határozzuk meg, hogy mekkora munkát végzünk, míg a seprű 3 m-t csúszik előre a padlón.

MEGOLDÁS

Minthogy az erő nagysága és iránya is állandó, a munka $W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$. A skaláris szorzat definiciója értelmében:

$$W = \mathbf{F}\,\Delta\mathbf{r} = F\cos\theta\,\Delta r = (50\ \text{N})(\cos 60°)(3\ \text{m}) = 75{,}0\ \text{Nm}$$

$$W = 75{,}0\ \text{J}$$

A gravitációs erő munkája

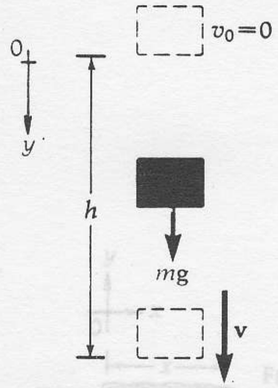
Tekintsünk egy nyugalomban lévő m tömegű testet, amely h magasságból szabadon esik (6-6 ábra). Mivel a részecskére mozgása során egyetlen erő, az állandó mg gravitációs erő hat, munkát is csak ez az erő végezhet rajta. A test h távolságot tesz meg *lefelé*, irányítsuk tehát az y tengely pozitív irányát is lefelé. A munkavégzés tehát:

$$\Delta W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{y} = F\left(\cos 0°\right)h = mgh \tag{6-7}$$

Amennyiben a testet függőlegesen *felfelé* emeljük h távolságnyira, akkor a gravitációs erő munkája:

$$\Delta W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{y} = F\left(\cos 180°\right)h = -mgh \tag{6-8}$$

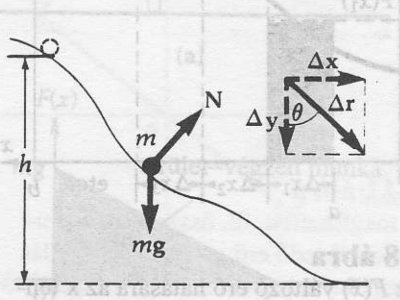
További például szolgálhat arra az esetre, amikor egy testen csak a gravitációs erő végez munkát, a súrlódásmentes lejtőn lecsúszó m tömegű test mozgása (6-7 ábra). Miközben a test lefelé csúszik, akármilyen görbült alakja is legyen a lejtőnek, a lejtő által kifejtett normális irányú $\mathbf{N}$ erő merőleges a pályára, s így a mozgás irányára is. Emiatt az $\mathbf{N}$ erő nem végez munkát a testen[1]. A gravitációs erő azonban mindig függőlegesen lefelé mutat, ezért a lejtő mentén fekvő tetszőleges $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulásnövekmény mellett a munkavégzés $W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} = mg(\cos\theta)\Delta r$. A $\cos\theta\,\Delta r$ szorzat azonban minden esetben az elmozdulás Δy függőleges összetevőjével egyenlő. Ily módon minden olyan pályán, ahol a teljes elmozdulás *függőleges* összetevője h, a gravitációs erő munkája mgh. Amennyiben az elmozdulás függőleges összetevője *felfelé* mutat és nagysága h, akkor a gravitációs erő munkája $-mgh$, a negatív előjel azért lép fel, mert $\cos 180° = -1$.



6-6 ábra
A függőlegesen h távolságot eső testen a gravitációs erő mgh munkát végez.

6-3 PÉLDA

80 N súlyú gyerek 2,5 m magasból csúszik le egy játszótéri csúszdán. Mekkora munkát végez a gravitációs erő a gyereken?



6-7 ábra
A gravitációs erő munkáját tetszőleges pálya esetén is az elmozdulás *függőleges összetevője* szabja meg.

[1] **Kényszererők** Ha egy test mozgásának pályáját egy másik test szabja meg, akkor azt mondjuk, hogy *kényszererő* lép fel. Ha például egy pontszerű test súrlódásmentes pályán csúszik, akkor a pálya által kifejtett N normális irányú erő korlátozza a test mozgását, ill. arra „kényszeríti", hogy kövesse a pálya ívét. Hasonlóképpen a kötél végén pörgetett testet a kötélerő kényszeríti arra, hogy körpályán mozogjon. A billiárdasztalon guruló golyót az asztal normális irányú ereje tartja az asztal síkjában. A kényszererők általában az anyag rugalmas tulajdonságai miatt jönnek létre, s úgy keletkeznek, hogy egy test erőt fejt ki a másikra, enyhén deformálja azt, s a másik test Newton harmadik törvénye értelmében ugyanakkora kényszererővel hat vissza az első testre. Emiatt ez a test csak a kényszererőre merőlegesen mozdulhat el. Ilymódon a **kényszererők sohasem végeznek munkát a testen.**

MEGOLDÁS

A gravitációs erő és a függőleges elmozdulás ugyanabba az irányba mutat, így a munkavégzés

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{y} = (80\ \mathrm{N})(\cos 0^\circ)(2{,}5\ \mathrm{m}) = 200\ \mathrm{J}$$

6.3 Változó erő munkája

A természetben fellépő erők között vannak olyanok, amelyek időben és térben vagy mindkettőben változnak. Most olyan erőkkel foglalkozunk, amelyek egy egyenes mentén a hely függvényében változnak. Általában $W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$. Egyenesvonalú mozgás esetén válasszuk x tengely pozitív irányát az $\mathbf{F}$ vektor irányának megfelelően:

$$\Delta W = F(x)\Delta x$$

ahol $F(x)$ az erőt változását jelenti az x koordináta függvényében. Ábrázoljuk az $F(x)$ függvényt a Descartes-féle koordinátarendszerben (6-8 ábra).

A változó erő hatására az $x = a$ helyről az $x = b$ helyre mozgó részecskén végzett munka meghatározásához az elmozdulás kicsiny megváltozásaihoz tartozó ΔW elemi munkákat kell összegeznünk. Első közelítésként oszszuk fel a teljes elmozdulást N intervallumra: Δx_1, Δx_2 ... Δx_N (6-8 ábra). Az első lépésben a részecske az $x = a$ helyről az $x = a + \Delta x_1$ helyre mozdul el. Bár ezen elmozdulás közben az F erő változik, jó közelítésnek tekinthető, ha a teljes intervallum során az $F(x_1)$ állandó értékkel helyettesítjük, ahol x_1 a Δx_1 intervallum valamelyik közbülső helye. Így az első elmozdulásnövekményhez tartozó ΔW_1 munka közelítőleg az $F(x_1)$ *magasságú* téglalap $F(x_1)\Delta x_1$ területével egyenlő. Hasonló módon a második intervallumon végzett munka az $F(x_2)\Delta x_2$ területtel közelíthető és így tovább.

A teljes [a, b] szakaszon végzett W munka a fenti területdarabkák öszszegével közelíthető, azaz

$$\Delta W = \sum_{i=1}^{i=N} F(x_i)\Delta x_i \qquad \textbf{(6-9)}$$

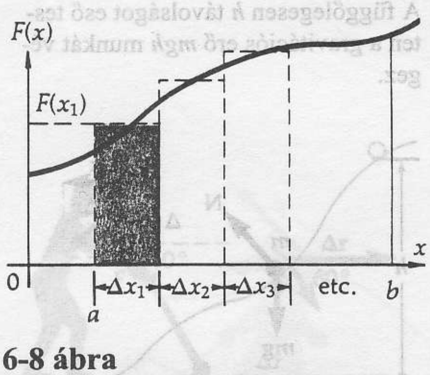
ahol $F(x_i)$ az i-ik intervallumban kiválasztott függvényérték. A közelítés javítására egyre rövidebb és rövidebb intervallumokat választunk. Határesetben $\Delta x \to 0$ és az intervallumok száma $N \to \infty$, s az így kapott eredményt tekintjük a munka pontos értékének.

$$W = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F(x_i)\Delta x_i \qquad \textbf{(6-10)}$$

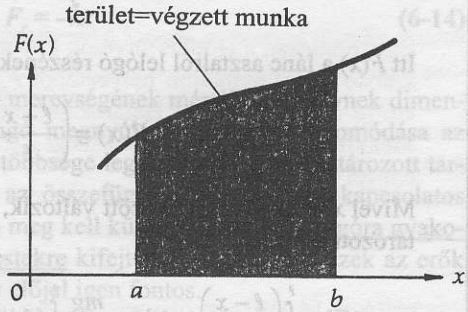
Ezt a határértéket az $F(x)$ függvény [a,b] intervallumra vonatkozó **határozott integráljának** nevezzük.

A változó erő munkája $\quad W = \int_a^b F(x)\,dx \qquad$ **(6-11)**

A 6-11 határozott integrál geometriai jelentése $F(x)$ függvénygörbe alatti terület, melyet az a és b határokhoz tartozó ordináták határolnak (6-9 ábra).



6-8 ábra
Az $F(x)$ változó erő hatására az x tengelyen a-tól b-ig mozog a részecske. Az erő a Δx_1 szakaszon $F(x_1)\Delta x_1$ munkát végez, ami a satírozott téglalap területével egyenlő.



6-9 ábra
Az $F(x)$ erő által végzett munka egyenlő az $F(x)$ függvénygörbe alatti területtel.

Tehát

$$\text{munka} = \text{az } F(x) \text{ görbe alatti terület.} \qquad (6\text{-}12)$$

A terület könnyen kiszámítható, ha $F(x)$ lineáris függvény. Bonyolultabb esetekben az integrálszámítási szabályokat kell alkalmazni. (A G-II és G-III függelékben minden, ebben a könyvben használt függvény integrálja megtalálható.)

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy amikor a fizikai mennyiségeket, most pl. a munkát összekapcsoljuk az erőt ábrázoló függvénygörbe alatti területtel, akkor a számítások során *a tengelyeken felvett mennyiségek mértékegységét is figyelembe kell venni.* Ebben az esetben a terület dimenziója *erő* szorozva *távolsággal* (mértékegysége *newton-méter*) és nem a szokásos hosszúság négyzetével megadott terület dimenziója (mértékegysége *méter*^{2}).

6-4 PÉLDA

Az eredetileg az asztal mellett lógó ℓ hosszúságú, m tömegű, hajlékony láncot állandó sebességgel húzzuk fel az asztal szélén. A láncot a végénél fogva a 6-10 ábrán látható módon az asztal lapjával párhuzamosan $F(x)$ erővel húzzuk. Határozzuk meg, hogy mennyi munkát végzünk, míg a teljes lánc az asztalra kerül. A lánc és az asztal közötti súrlódás elhanyagolható.

MEGOLDÁS

A lánc felhúzásához szükséges erő változik a hely függvényében, hiszen minden helyzetben éppen az asztal széléről még lelógó láncdarab súlyával egyenlő. (A súly többi részét az asztal tartja.) Ha az $x = 0$ helyet az asztal szélénél választjuk, akkor

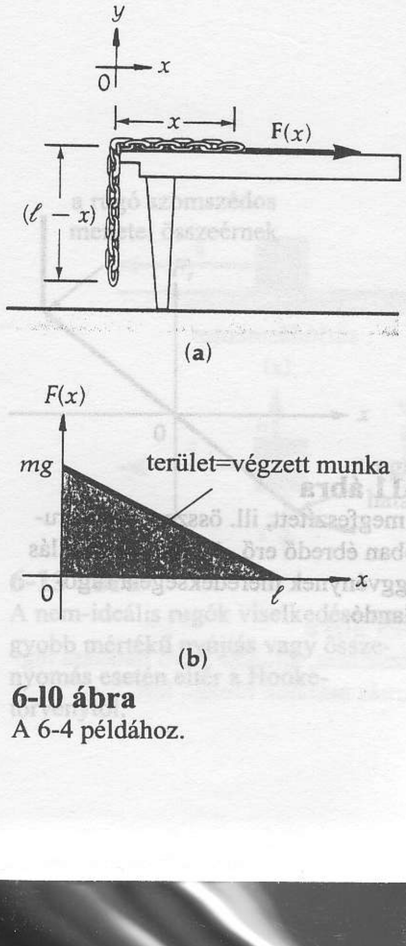
$$F(x) = \left(\frac{\ell - x}{\ell}\right) mg = \frac{mg}{\ell}(\ell - x) \qquad (6\text{-}13)$$

Az $F(x)$ függvény ábrája a 6-10b ábrán látható egyenes, így a teljes W munka, míg a láncvég az $x = 0$ helyről az $x = \ell$ helyre kerül, ezen egyenes alatti területtel egyenlő. Ez a terület egy háromszög, tehát $W = \frac{1}{2}\, mg\ell$. A teljes lánc felhúzásához szükséges munka tehát

$$W = \frac{mg\ell}{2}$$

Második megoldás az integrálszámítás alkalmazásával.

Mind az erő, mind az elmozdulás az x tengely pozitív irányába mutat, így az $F(x)$ erő munkája



6-10 ábra
A 6-4 példához.

$$W = \int_a^b F(x)\, dx$$

Itt $F(x)$ a lánc asztalról lelógó részének a súlya

$$F(x) = \left(\frac{\ell - x}{\ell}\right) mg$$

Mivel x értéke 0 és ℓ között változik, a G-II függelék szerint a határozott integrál

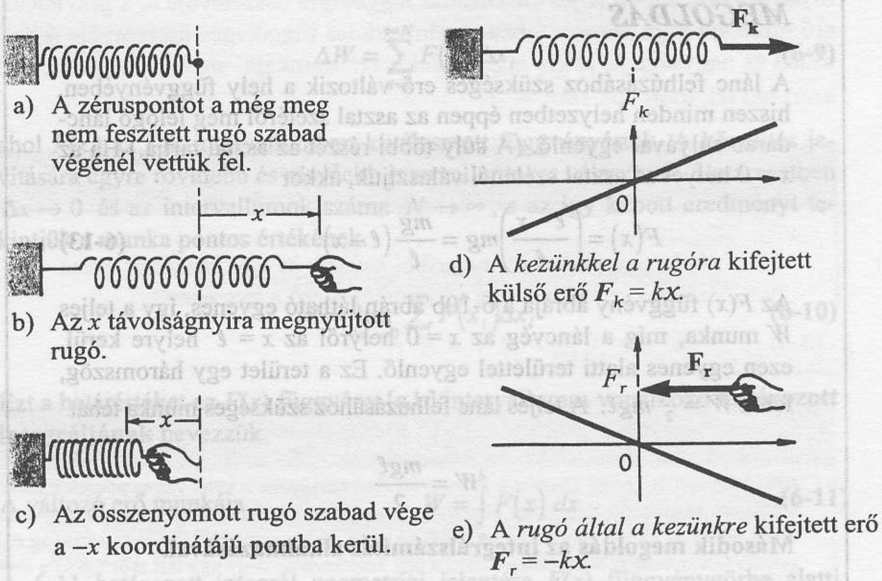
$$W = \int_0^\ell \left(\frac{\ell - x}{\ell}\right) mg\, dx = \frac{mg}{\ell}\int_0^\ell (\ell - x)\, dx = \frac{mg}{\ell}\left[\ell x - \frac{x^2}{2}\right]_0^\ell$$

Beírva x helyére a felső határ értékét ($x = \ell$) és kivonva az eredményből az $x = 0$ alsó határon felvett értéket, azt kapjuk, hogy

$$W = \frac{mg}{\ell}\left[\ell^2 - \frac{\ell^2}{2} - 0\right] = \frac{mg\ell}{2}$$

A rugóerő

Foglalkozzunk most egy elhanyagolható tömegű, egyik végénél falhoz erősített rugóval (6-11 ábra). Az x tengely kezdőpontja essen egybe a még meg nem feszített rugó szabad végével. Ha a rugó végét F_k erővel nyújtani kezdjük a szabad végénél fogva, akkor kísérletileg megállapíthatjuk, hogy a nyújtáshoz szükséges erő (igen jó közelítéssel) arányos a szabad végnek a nyugalmi helyzettől mért elmozdulásával, azaz $F_k = kx$. (Hasonló eredmény adódik a rugó összenyomásakor is.) Newton harmadik törvénye alapján ebből következik, hogy a *rugó* ugyanekkora, de ellentétes irányú erőt gyakorol a kezünkre. Tehát akár nyújtjuk, akár összenyomjuk a rugót, abban mindig az eredeti helyzet visszaállítására szolgáló *visszatérítő erő* ébred.



a) A zéruspontot a még meg nem feszített rugó szabad végénél vettük fel.

b) Az x távolságnyira megnyújtott rugó.

c) Az összenyomott rugó szabad vége a $-x$ koordinátájú pontba kerül.

d) A *kezünkkel a rugóra* kifejtett külső erő $F_k = kx$.

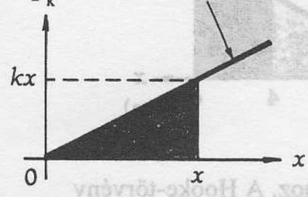
e) A *rugó által a kezünkre* kifejtett erő $F_r = -kx$.

6-11 ábra
A megfeszített, ill. összenyomott rugóban ébredő erő. Az erő-megnyúlás függvénynek meredeksége a rugóállandó.

Az ideális rugónak ezt a tulajdonságát fejezi ki a **Hooke-törvény**[2]:

Hooke-törvény (ideális rugó) $$F_r = -kx \tag{6-14}$$

ahol k az ún. **rugóállandó** (a rugó merevségének mértéke), amelynek dimenziója erő/hosszúság, x pedig a rugó megnyúlása vagy összenyomódása az eredeti hosszhoz képest. A rugók többsége legalábbis egy meghatározott tartományban[3] pontosan követi ezt az összefüggést. A rugókkal kapcsolatos feladatok megoldásában gondosan meg kell különböztetnünk a rugóra gyakorolt $F_k = kx$, és a rugó által más testekre kifejtett $F_r = -kx$ erőt. Ezek az erők ellentétes irányúak, ezért a negatív előjel igen fontos.



6-12 ábra
Amikor a munkavégzést az erő függvénygörbéje alatti területtel határozzuk meg, mindig figyelembe kell venni **F** és Δs irányát is. Amennyiben ellentétes irányúak, akkor a $W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{s}$ munka negatív.

A 6-12 ábrán a satírozott terület az F_k erő által végzett munkát mutatja, mialatt a rugó szabad végét nyugalmi helyzetéből x távolságura elmozdítjuk. A háromszög területe $\frac{1}{2}x\,kx = \frac{1}{2}kx^2$. Mivel a rugóerő ellentétes irányú az elmozdulással, ezért a *rugó által* végzett munka negatív: $W_r = -\frac{1}{2}kx^2$. A rugó ezt a munkát a kezünkön végzi.

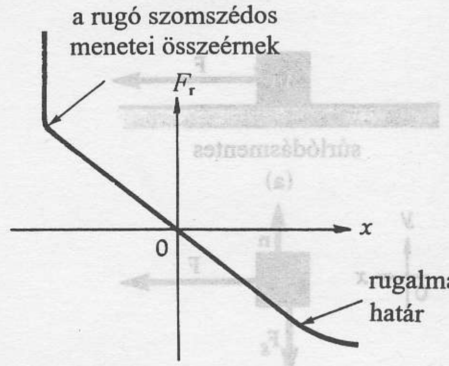
A rugó feszítése során végzett munka	A külső erő által a rugón végzett munka	$W_k = \dfrac{1}{2}kx^2 \qquad (6\text{-}15)$
	A rugó által egy külső testen végzett munka	$W_r = -\dfrac{1}{2}kx^2 \qquad (6\text{-}16)$

Az integrálszámítás segítségével a külső erő munkája a megfelelő határok behelyettesítésével az alábbi módon számítható ki:

$$W_k = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x (kx)dx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^x = \frac{1}{2}kx^2 - 0$$

$$W_k = \frac{1}{2}kx^2$$

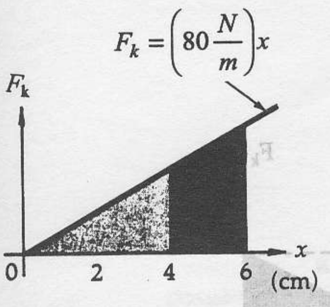
Megjegyzés a görbe alatti területtel kapcsolatban. Amikor a rugó összehúzódik, azaz a megnyújtott helyzetből ellentétes irányba mozog, akkor az F_k külső erő munkája *negatív*, bár a 6-12 ábrán látható satírozott terület az x tengely fölé esik. (Az integrálszámítás alkalmazásakor a negatív előjel automatikusan adódik, amikor az integrálás határait x-től 0-ig választjuk.) Így amikor a munkát geometriailag egy területtel interpretáljuk, akkor mindig ellenőriznünk kell az **erő** és az **elmozdulás** irányát, hogy eldönthessük, vajon a munka pozitív-e vagy negatív. (Ugyanez vonatkozik természetesen a 6-11c ábrán látható F_r rugóerő alatti területre is.)



6-13 ábra
A nem-ideális rugók viselkedése nagyobb mértékű nyújtás vagy összenyomás esetén eltér a Hooke-törvénytől.

[2] A formulát felfedezőjéről, Robert Hooke (1635-1703) angol fizikusról nevezték el, aki a törvényt a prioritást biztosítandó anagram formájában közölte (ceiiinosssttuv). Később közölte, hogy a betűszó az „ut tensio sic vis" latin mondat betűinek abc szerinti felsorolása. Jóllehet törvénynek nevezzük, mégsem fejez ki olyan alapvető természeti tényt, mint mondjuk a Newton-törvények. Inkább csak hasznos szabálynak tekinthető, amivel a valódi rugók viselkedése jól közelíthető.

[3] Ha egy rugót túlságosan összenyomunk, akkor szomszédos menetei összeérnek és további összenyomásához már igen nagy erő szükséges (6-13 ábra). Másrészt, ha a rugót erősen megnyújtjuk, akkor átléphetjük a rugó anyagának rugalmas határát és a rugó maradandóan deformálódik. Ekkor az erő megszüntével nem nyeri vissza eredeti hosszát és az erőhatás sem tesz eleget többé a Hooke-törvénynek.



6-14 ábra
A 6-5 példához. A Hooke-törvény szerint viselkedő rugó nyújtása.

6-5 PÉLDA

Egy, pontosan a Hooke-törvényt követő, egyik végén rögzített rugó szabad végét nyugalmi helyzetéből $F_k = (80\ \mathrm{N/m})x$ külső erővel 4 cm-re elmozdítjuk. a) Határozzuk meg a külső erő munkáját! b) Mekkora további munka szükséges ahhoz, hogy a rugót további 3 cm-rel megnyújtsuk?

MEGOLDÁS

a) A 6-14 ábrának megfelelően az origót vegyük fel a meg nem feszített rugó szabad végénél. A külső erő az $F_k = (80\ \mathrm{N/m})x$ törvény szerint változik. A külső erő által végzett munka megegyezik a [0,4] intervallum feletti háromszög területével.

$$W_k = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}\left(80\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(0{,}04\ \mathrm{m})^2 = 64\ \mathrm{mJ}$$

b) A rugó további, $x_1 = 0{,}04$ m és 0,07 m közötti nyújtása során végzett munkát az ábrán a sötétebben satírozott terület mutatja. Tehát a szükséges további munka:

$$W_k = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}\left(80\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)\left[(0{,}07\ \mathrm{m})^2 - (0{,}04\ \mathrm{m})^2\right]$$

$$W_k = 132\ \mathrm{mJ}$$

Ugyanez határozott integrállal:

$$W_k = \int_a^b F_k\,dx = \int_{0{,}04\mathrm{m}}^{0{,}07\mathrm{m}} \left(80\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(x)dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(80\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)\left[x^2\right]_{0{,}04}^{0{,}07}$$

$$W_k = \left(\frac{1}{2}\right)\left(80\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)\left[(0{,}07)^2 - (0{,}04)^2\right] = 132\ \mathrm{mJ}$$

6.4 A kinetikus energia és a munkatétel

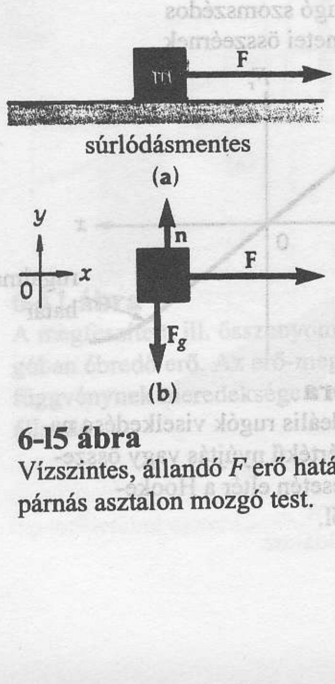
A következőkben azzal az esettel foglalkozunk, amikor egy test a munkavégzés hatására gyorsul. A 6-15 ábra egy súrlódásmentes felületen, pl. légpárnás sínen mozgó testet mutat. Fejtsünk ki a testre állandó **F** vízszintes erőt. A testre ható függőleges gravitációs erőt a felület kiegyensúlyozza, így a testre ható eredő erő megegyezik az **F** vízszintes erővel. Mivel **F** állandó, a test állandó gyorsulással mozog és teljesül a

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

kinematikai egyenlet. Megszorozva ezt az összefüggést *m*-mel, majd elosztva kettővel, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2 = ma(x - x_0) \tag{6-17}$$

Az $\frac{1}{2}mv^2$ tagot *K*-val jelöljük és a *v* sebességgel mozgó *m* tömegű test **mozgási vagy kinetikus energiájának** nevezzük. Az energiának ez a formája a *test mozgása következtében alakul ki.*



6-15 ábra
Vízszintes, állandó *F* erő hatására légpárnás asztalon mozgó test.

Kinetikus energia (K) $\qquad K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad$ (6-18)

Vegyük észre, hogy v irányától függetlenül a kinetikus energia mindig *pozitív értékű skalár* mennyiség. A mozgási energia és a munka mértékegysége azonos, az SI-rendszerben *newton-méter* (Nm), más néven *joule* (J).

A 6-17 egyenletben az ma tényező megegyezik az F eredő erővel, azaz a jobb oldal $F(x-x_0)$, $= W$, ami éppen az F erő által végzett munka. A külső erők eredője által egy m tömegű testen végzett munka azt az energiát jelenti, amelyet az erőt létrehozó rendszer a testnek átad. Az eredő erő gyorsítja a testet, s ennek eredményeként a test $\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2$ kinetikus energiához jut. Ez az összefüggés teljesen általánosan igaz, bár itt csak egydimenziós esetben, állandó erő hatására végbemenő mozgásra vonatkozóan mutattuk ki. A tétel tehát tetszőleges, változó erő hatására végbemenő mozgás esetén is érvényes. Ezt az általános elvet nevezzük **munkatételnek.**

Munkatétel	Az eredő erő munkája egy pontszerű testen	$\Delta W = \Delta K$	(6-19)

E rendkívül fontos tétel állításának lényege az, hogy az eredő erő munkája következtében a testre átvitt energia a test mozgási energiáját növeli. A tételt az energia és a munka definíciójának ismeretében Newton második törvényéből vezettük le. Bár a $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvény és a munkatétel lényegében az eredő erő egy pontszerű testre gyakorolt hatását fogalmazza meg, mégis különböző tartalmúak. A Newton második törvény *vektoregyenletre*, a munkatétel pedig *skaláris* relációra vezet. A skaláris egyenletek matematikai kezelése gyakran sokkal egyszerűbb, mint a vektoregyenleteké. Figyeljük meg ugyanakkor, hogy bár a munkatétel nem *bizonyítja*, hogy az energia minden körülmények között megmarad, a tétel eredménye összhangban van a megmaradási tétellel. (Az energiamegmaradás törvényével a következő fejezetben foglalkozunk.) Az az energia ugyanis, amit a munkavégzéssel átadunk egy pontszerű testnek, pontosan megegyezik a test mozgási energiájának növekedésével.

6-6 PÉLDA

4 kg tömegű test 2 m/s kezdeti sebességgel mozog egy súrlódásmentes, vízszintes felületen. a) Mekkora munkavégzéssel növelhető a test sebessége kétszeresére? b) Határozzuk meg az ehhez szükséges eredő erőt, ha a sebességváltozás 6 m-es úton következik be!

MEGOLDÁS

a) Induljunk ki az általános fizikai törvényből – a *munkatételből:*

$$\textit{Az eredő erő } \text{munkája} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Az adatok behelyettesítése után:

$$W = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}(4\text{kg})\left[\left(4\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2\right] =$$

$$= 24{,}0 \text{ Nm} = 24{,}0 \text{ J}$$

b) A munka $W = Fx$ definíciós egyenletéből F erőt kifejezve felírható, hogy

$$F = \frac{W}{x} = \frac{24\ \text{Nm}}{6\ \text{m}} = 4{,}00\ \text{N}$$

Az eredő erő a Newton-törvény és a kinematikai egyenletek felhasználásával is kiszámítható. Induljunk ki a

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

kinematikai egyenletből, és ebből fejezzük ki az a gyorsulást, majd helyettesítsük be az adatokat:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{\left(4\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2(6\text{m} - 0)} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ekkor a $\Sigma F = ma$ törvényből azt kapjuk, hogy

$$F = (4\text{kg})\left(1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 4\ \text{N}$$

6-7 PÉLDA

Kezdetben nyugalomban lévő induló m tömegű tégla pusztán a gravitációs erő hatására szabadon esik. Mekkora a tégla sebessége h távolság megtétele után?

MEGOLDÁS

Esés közben csak a gravitációs erő hat a téglára. A munkatétel szerint az eredő erő munkája megegyezik a tégla mozgási energiájának megváltozásával.

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Mivel $v_0 = 0$ $\quad \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - 0.$

Az egyenletet átrendezve, a v sebességre a következő összefüggés adódik:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Vegyük észre, hogy a sebesség nem függ a tömegtől, azaz (ha a légellenállás elhanyagolható) a szabadon eső testek nemcsak állandó gyorsulással esnek, hanem azonos távolságon, nyugalomból indulva azonos sebességre is gyorsulnak fel.

A mozgási energia következtében a mozgó testek más testeken munkát végezhetnek. Ennek megértésére gondoljuk végig azt az esetet, amikor egy test pl. a kezünk F erő kifejtésével megállít egy mozgó testet. Newton harmadik törvénye értelmében a mozgó test is F erővel hat a kezünkre. Amíg a test mozog, addig ez az erő munkát végez a kezünkön. Ez a munkavégzés pontosan egyenlő a test eredeti kinetikus energiájával. Így a mozgó testek kinetikus energiája éppen *azzal a munkával egyenlő, amit a test végezhet, míg nyugalomba jut.*

A most leírt folyamat jó példa két rendszer közötti energiacserére. Az a W munka, amelyet egy külső eredő erő egy testen akkor végez, midőn azt a nyugalmi helyzetből felgyorsítja, egyenlő a testnek átadott a $W = \frac{1}{2}mv^2$ kinetikus energiával. Megfordítva, a nyugalmi helyzetig lassuló test éppen $W = \frac{1}{2}mv^2$ munkát végez az őt lassító másik rendszeren. A következő fejezetben megmutatjuk, hogy a fenti folyamatok speciális esetei az általános energiamegmaradási törvénynek, amely a rendszerek között munkavégzéssel végbemenő energiacserét írja le.

A körpályán mozgó testek esetén a munkatételt érdemes külön is taglalni. Ha a test sebessége állandó nagyságú, akkor a rá ható eredő erő (a centripetális erő) a mozgás irányára merőlegesen, sugár irányban befelé mutat. Mivel a munkavégzés csak akkor nem zérus, ha az erőnek van a mozgás irányába eső összetevője, adódik, hogy a *centripetális erő nem végez munkát* a testen, és a tömegpont mozgási energiája és sebességének nagysága állandó marad. Amennyiben a körpályán mozgó részecske sebességének nagysága is változik, akkor léteznie kell tangenciális erőkomponensnek is. Kizárólag az erő tangenciális összetevőjének a munkája okozza a mozgási energia megváltozását. (Lásd még a kényszererőkre vonatkozó 1. lábjegyzetet!)

A mozgási energia megváltozása változó erő hatására

Térjünk vissza ismét a 6-15 ábrán vázolt egydimenziós esethez, tételezzük fel azonban, hogy az erő változik a távolság függvényében, azaz legyen $F = F(x)$. Osszuk fel a teljes elmozdulást olyan kicsiny részekre, hogy az egyes elmozdulásrészek mentén az erő és így a gyorsulás is közelítőleg állandó legyen. Alkalmazzuk ezután az előzőekben kapott összefüggéseket. A kicsiny Δx távolságon végzett ΔW munkát a

$$\Delta W = F(x)\Delta x$$

formulával számíthatjuk ki. Felhasználva, hogy $F = m\Delta v/\Delta t$, ahol Δv a mozgás során bekövetkező sebességnövekmény, azt kapjuk, hogy

$$\Delta W = m\frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta x = m\Delta v\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

azaz
$$\Delta W = m\Delta v\frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{6-20}$$

A $\Delta x/\Delta t$ mennyiség éppen a mozgó test Δt időtartam alatti átlagsebessége. Ha a sebesség egyenletesen változik v_0-ról v-re, akkor átlagértéke:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(v + v_0)}{2}$$

Behelyettesítve ezt és $\Delta v = v - v_0$ kifejezést a 6-20 egyenletbe, a ΔW elemi munka a következőképpen fejezhető ki:

$$\Delta W = \frac{1}{2}m(v - v_0)(v + v_0) = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

Az a helyről b helyre elmozduló testen végzett teljes munka a kicsiny Δx szakaszokon végzett elemi munkák összege

$$W = \sum_{i=a}^{b}(\Delta W)_i$$

A kifejezés jobb oldalát kifejtve azt kapjuk, hogy

$$W = \frac{1}{2}m\left[(v_1^2 - v_a^2) + (v_2^2 - v_1^2) + \ldots + (v_b^2 - v_{b-1}^2)\right]$$

ami mutatja, hogy az eredményből a kezdeti és végsebességet tartalmazó tagok kivételével minden más tag kiesik, azaz

$$W = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

Tehát az eredő erő által egy tömegponton végzett munka egyenlő a test mozgási energiájának megváltozásával akár változik az erő, akár nem.

A munkatétel levezetése integrálszámítással

Tekintsük a hely függvényében változó $F(x)$ erőt. Az ilyen eredő erő hatására $x = a$-tól $x = b$-ig elmozduló testen a munka végzés:

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

Tudjuk, hogy $F(x) = mdv/dt$. Alkalmazzuk a dv/dt deriváltra a *láncszabályt* (G-I függelék ll. szabály)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

és helyettesítsük be az eredményt az $F(x) = mdv/dt$ egyenletbe. (Felhasználtuk, hogy $v = dx/dt$.) Azt kapjuk, hogy

$$F(x) = m\frac{dv}{dt} = mv\frac{dv}{dx}$$

Így a munkára alkalmazva a G-II függelék 5. szabályát az adódik, hogy

$$W = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b mv\frac{dv}{dx}\,dx = \int_a^b mv\,dv = \left[m\frac{v^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

6-8 PÉLDA

A 6-16 ábrának megfelelően egy 500 kg tömegű hullámvasúti kocsi elhanyagolható súrlódású, görbevonalú pályán mozog. Sebessége az A pontban 3 m/s. Mekkora sebességgel érkezik a kocsi a pálya C tetőpontjára?

MEGOLDÁS

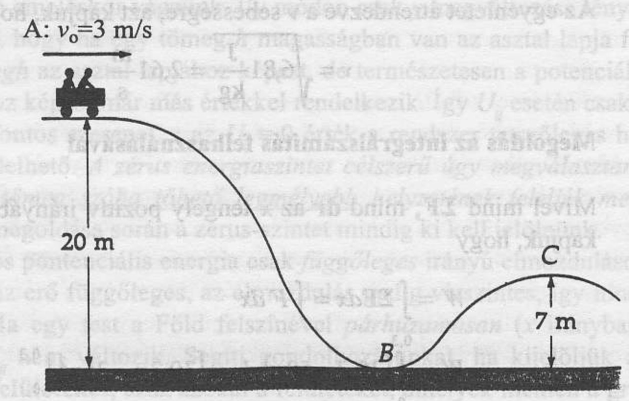
A kocsin csak a gravitációs erő végez munkát. (A pályától kifejtett normális irányú N erő – amint azt az 1. lábjegyzetben kifejtettük – *kényszererő*. Minthogy N merőleges a mozgás irányára, munkát nem végez.) Alkalmazzuk a munkatételt a gravitációs erő munkájára:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}(v^2 - v_0^2)$$

A teljes függőleges elmozdulás $h = 20\text{m} - 7\text{m} = 13\text{m}$. Az egyenletből kifejezve a v sebességet felírható, hogy

$$v = \sqrt{2gh - v_0^2} = \sqrt{2\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(13\text{ m}) - \left(3\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 16{,}2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$



6-16 ábra
A 6-8 példához.

6-9 PÉLDA

A 6-17 ábra szerint 2 kg tömegű test a következő erők hatása alatt csúszik egy sima lejtőn: a gravitációs erő, a Hooke-törvény (k = 50 N/m) szerint változó rugóerő, egy állandó F_k=40 N külső erő és a lejtő által kifejtett normális irányú kényszererő. A test nyugalomból indul úgy, hogy a rugó éppen feszítetlen. Határozzuk meg a test sebességét a munkatétel segítségével abban az időpontban, amikor eredeti helyzetéből 30 cm-rel mozdult el a lejtő mentén felfelé.

MEGOLDÁS

A munkatételben az erők eredője szerepel, ezért először a test vektorábráját kell megrajzolnunk (6-17b). A mozgás az x tengely pozitív irányának megfelelően a lejtő mentén felfelé történik, ezért határozzuk meg az eredő erő x irányú összetevőjét.

$$\Sigma F_x = F_k - mg\sin 30^\circ - kx$$

$$\Sigma F_x = 40\text{N} - (2\text{kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(\sin 30^\circ) - (50\text{N})x$$

$$\Sigma F_x = 30{,}2\text{N} - (50\text{N})x$$

A rugóerő miatt az eredő erő ΣF_x összetevője is változik a hely függvényében. Számítsuk ki a jobb oldal két tagjának munkáját egymástól függetlenül! A 30,2 N értékű *állandó* erő munkája:

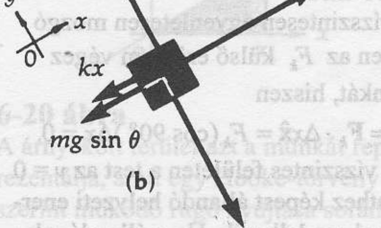
$$W_x = F_x x = (30{,}2\text{N})(0{,}3\text{m}) = 9{,}06\ \text{J}$$

A rugóerő *munkája* negatív, ha a test felfelé mozog a lejtőn, hiszen a rugóerő a mozgás irányával ellentétes. A 6-16 egyenlet szerint a *rugóerő* munkája a $[0,x]$ intervallumon történő elmozdulás során $-1/2kx^2$. Így

$$W_r = -\left[\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2\right] = -\left[\frac{1}{2}\left(50\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(0{,}3\,\text{m})^2 - 0\right] = -2{,}25\ \text{J}$$

Az eredő erő teljes munkája ennek megfelelően 9,06 J – 2,25 J = = 6,81 J. Helyettesítsük be ezt az értéket a munkatételbe:

$$\text{Az } \textit{eredő erő} \text{ munkája} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$



6-17 ábra
A 6-9 példához.

$$6{,}81\ \mathrm{J} = \frac{1}{2}(2\ \mathrm{kg})v^2 - 0.$$

Az egyenletet átrendezve a v sebességre, azt kapjuk, hogy

$$v = \sqrt{6{,}81\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}} = 2{,}61\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Megoldás az integrálszámítás felhasználásával

Mivel mind $\Sigma\mathbf{F}$, mind $\mathbf{dr}$ az x tengely pozitív irányába mutat, azt kapjuk, hogy

$$W = \int \Sigma \mathbf{F} dx = \int F\, dx$$

$$W = \int_0^{0,3} [30{,}2 - 50x]\, dx = \left[30{,}2x - 25x^2\right]_0^{0,3}$$

$$W = \left[(30{,}2)(0{,}3) - (25)(0{,}3)^2\right] - [0] = 6{,}81\ \mathrm{J}$$

(Az egyenletekben a mértékegységeket az egyszerűség kedvéért elhagytuk.) A megoldás innen az előző változathoz hasonlóan folytatható.

6.5 A helyzeti (potenciális) energia

Sok esetben a rendszerre ható erők munkája nem a rendszer kinetikus energiájának növekedésében jelentkezik, hanem ehelyett egyéb, könnyen visszanyerhető formában tárolódik.[4] Ha a rendszerben tárolt energia nő, akkor megnő a rendszer *munkavégző képessége* (potenciálja) is. Ezért a tárolt energiát **potenciális**, vagy **helyzeti energiának** nevezzük és U-val jelöljük.

Tegyük fel, hogy egy m tömegű testet lassan, állandó sebességgel függőlegesen y magasságba emelünk. Mivel a testet egyenletes sebességgel emeljük, pontosan akkora erőt kell kifejtenünk, mint a testre ható mg gravitációs erő. Amikor a test y magasságba érkezik, akkor a test-Föld rendszer munkavégző képessége nagyobb, mint annakelőtte; ha elengedjük a testet, akkor az esés során a gravitációs erő munkája következtében a test mozgási energiához jut.

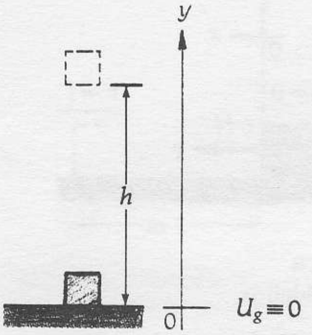
A helyzeti energia változása mindig egy rendszert alkotó részecskék elrendeződésének megváltozásával kapcsolatos. Amikor az m tömegű testet állandó sebességgel emeljük, akkor $W =$ (erő)·(elmozdulás)$= mg\ y$ munkát végzünk, a test kinetikus energiája azonban nem változik. A munkavégzés a helyzeti energia növelésére fordítódik. Mivel a test leejtésekor a Föld elmozdulása a hatalmas tömeg miatt elhanyagolható, a test elmozdulásához képest, szokás – kissé pongyolán – a helyzeti energiát pusztán a test helyzetének a megváltoztatásával kifejezni. Elfogadva ezt az egyszerűsítést, az m tömeg U_g **gravitációs potenciális energiáját** a következőképpen definiáljuk:

Gravitációs potenciális energia U_g (a Föld felszíne közelében)	ahol	$U_g = mg\,y$ $U_g \equiv 0$ ha $y = 0$	(feltéve, hogy g állandó és az y tengely pozitív iránya felfelé mutat)	**(6-21)**

6-18 ábra
A vízszintesen egyenletesen mozgó testen az F_k külső erő nem végez munkát, hiszen $W = \mathbf{F}_k \cdot \Delta x\hat{\mathbf{x}} = F_k(\cos 90°)\Delta x = 0.$ Így vízszintes felületen a test az $y = 0$ szinthez képest állandó helyzeti energiával rendelkezik. Ha g állandó, akkor minden vízszintes felület különböző energiájú, de ekvipotenciális felület.

[4] A rendszeren végzett munka egy része hővé (termikus energiává) alakulhat. A folyamatot a későbbiekben tárgyaljuk, most feltesszük, hogy hő nem fejlődött.

Mivel feltételeztük, hogy g állandó, ezért az a munka, amit egy tömeg 3 m-ről 4 m-re emelése során végzünk, egyenlő azzal a munkával, amit az 5 m-ről 6 m-re történő emeléskor végzünk. Ily módon csak y megváltozása lényeges. Nyilvánvaló, hogy ha egy tömeg h magasságban van az asztal lapja felett, akkor $U_g = mgh$ az asztal lapjához képest, de természetesen a potenciális energia a padlóhoz képest már más értékkel rendelkezik. Így U_g esetén csak a változás játszik fontos szerepet, s az $U_g \equiv 0$ érték a rendszer tetszőleges helyéhez hozzárendelhető. *A zérus energiaszintet célszerű úgy megválasztani, hogy a vizsgált tömeg szóba jöhető legmélyebb helyzetének feleljék meg.* Adott feladatok megoldása során a zérus-szintet mindig ki kell jelölnünk.



6-19 ábra
A 6-10 példához.

A gravitációs pontenciális energia csak *függőleges* irányú elmozdulások esetén változik (az erő függőleges, az elmozdulás pedig vízszintes, így nincs munkavégzés). Ha egy test a Föld felszínével *párhuzamosan* (x irányban) mozog, akkor U_g nem változik. Segíti gondolkozásunkat, ha kijelöljük az **ekvipotenciális felületeket**, azaz azokat a felületeket, amelyek mentén a gravitációs potenciális energia állandó (6-18 ábra). Ezek az ekvipotenciális felületek párhuzamosak a Föld felszínével.

6-10 PÉLDA

Egy bolti eladó hat doboz, egyenként 120 N súlyú konzervet tesz fel a padlóról a 130 cm magas polcra. Mennyi munkát végez?

MEGOLDÁS

Az eladó által végzett munka megnöveli a konzervdobozok helyzeti energiáját. A dobozok teljes súlya 6·120 = 720 N. A helyzeti energia 0 szintjét a padló szintjének megfelelően választva (6-19 ábra) számításainkat a következő sorrendben végezhetjük:

$$W = \Delta U_g$$

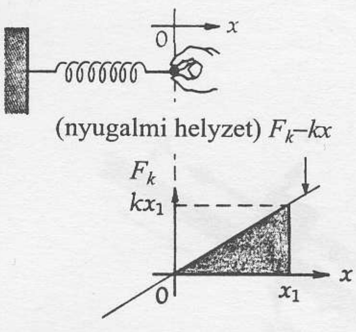
$$W = mg\,y - 0$$

$$W = (720\ \text{N})\cdot 130\ \text{cm}\overbrace{\left(\frac{1\ \text{m}}{100\ \text{cm}}\right)}^{\text{átszámítási tényező}} = 936\ \text{Nm}.$$

A megfeszített rugó helyzeti energiája

Helyzeti energia tárolására alkalmas rendszer pl. egy ideális rugó, amely a Hooke-tövény szerint $F_r = -kx$ erőt fejt ki. A 6-20 ábrán az origót a nyugalmi helyzetben lévő rugó szabad végénél vettük fel. Az $F_k = kx$ *külső* erő munkája midőn a rugót $x = 0$-ról $x = x_1$-re feszíti, az $F = F(x)$ görbe alatti háromszög területével egyenlő. Ez a terület $W = \frac{1}{2}kx_1 \cdot x_1 = \frac{1}{2}kx_1^2$. Az integrálszámítás felhasználásával ugyanezt az eredményt kapjuk:

$$W = \int F_k\,dx = \int_0^{x_1} kx\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^{x_1} = \frac{1}{2}kx_1^2 - 0 = \frac{1}{2}kx_1^2$$



6-20 ábra
A árnyékolt terület azt a munkát reprezentálja, amit egy Hooke-törvény szerint működő rugó nyújtása során végzünk. A satírozott háromszög területe az x_1 és kx_1 oldalú téglalap területének fele, azaz $1/2(kx_1^2)$.

Ez a munka egyben a megfeszített rugóban tárolt U_r rugóenergiáját is jelenti. Ideális esetben ezt a tárolt energiát kaphatjuk vissza, ha a rugó összenyomva valamilyen külső testre F_r rugóerőt fejt ki, s azon munkát végez. Hasonló gondolatmenet alkalmazható a rugó összenyomására vonatkozóan, amikor a szabad vég az $x = 0$ helyről $x = -x_1$ helyre mozdul el. A **rugó** U_r **helyzeti** vagy **rugóenergiája** tehát az

A megfeszített rugóban tárolt helyzeti energia

$$U_r = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (6\text{-}22)$$

(ahol k a rugóállandó és x a nyugalmi helyzettől mért megnyúlás vagy összenyomódás)

összefüggéssel adható meg.

Mikroszkópikusan szemlélve a rugóenergia a rugó atomjai közötti kötéstávolságok megváltozása miatt tárolódik. Ha ugyanis az atomok közötti távolságok a rugó megnyúlása vagy összenyomása miatt változnak, akkor az egyes atomok közötti elektrosztatikus potenciális energia is megváltozik. Így végső soron a rugóenergia is arra vezethető vissza, hogy a rendszer elemeinek (a rugó atomjainak) az elrendeződése megváltozik a feszítés során.

A következő fejezetben megmutatjuk, hogy a potenciális energia és bizonyos, ún. *konzervatív* erők között kapcsolat van, s ez fontos szerepet játszik a mechanikai rendszerek vizsgálatában.

6.6 A súrlódási erő és a súrlódási hő

Az előzőekben olyan példákkal foglalkoztunk, ahol a rendszeren végzett munka a olyan tárolt U potenciális energiaként jelent meg, amely a rendszer fizikai konfigurációjában (elrendeződésében) előálló változások következménye. A tárolt potenciális energia könnyen visszanyerhető, ha a rendszer eredeti állapotára, visszaállva munkát végez egy másik, külső rendszeren. Most olyan példát tárgyalunk, amikor az energia olyan alakban tárolódik, hogy *nem* nyerhető vissza egykönnyen. Ezt a tárolt energiát *belső* vagy *termikus (hő) energiának* nevezzük, s a mechanikában többnyire *csúszó súrlódás eredményeként* jön létre. (Ha két tenyerünket jó erősen összedörzsöljük, akkor jelentős hő keletkezik, ami bizonyítja, hogy a munka hővé alakítható.) A folyamat megfordítása azonban nehéz, a belső energia változásának teljes visszaalakítása mechanikai munkavégzéssé problematikus. Az energia egy része többnyire hő formájában marad[5]. Emiatt a súrlódási erőt gyakran *disszipatív* erőnek nevezzük, hiszen a mechanikai energiát nehezen visszanyerhető, ill. más energiaformává nehezen átalakítható energiába viszi át.

Ha két csúszó felület között súrlódás lép fel, akkor mindig keletkezik bizonyos mennyiségű termikus energia, s ennek hatására emelkedik a csúszó testek hőmérséklete. Alapvetően a **termikus (belső) energia** a testeket alkotó részecskék véletlenszerű mozgásából származó mozgási és helyzeti energia összege. A súrlódási munka az egyik olyan lehetőség, amellyel a rendezetlen mozgás növelhető.

A fizikában a belső energia és a hő jelentése, amint azt a következő definíciók mutatják, különböző.

Belső energia — **Az atomok és a molekulák rendezetlen mozgásával kapcsolatos mozgási és helyzeti energia összege. Gyakran *termikus energiának* is nevezzük.**

Hő — **A kizárólag hőmérsékletváltozás következtében az egyik rendszerről a másik rendszerre átvitt termikus energia.**

Így a *termikus (belső) energia a „testekben tárolt energiát”* jelent, míg a *hő* kifejezés azt az *energiaátviteli* folyamatot takarja, amikor az egyik rendszerről a másikra termikus energia kerül át.

Bár a véletlenszerű mozgás kinetikus energiája része a termikus energiának, ez az energia *belső* energia és különbözik egy v sebességgel mozgó

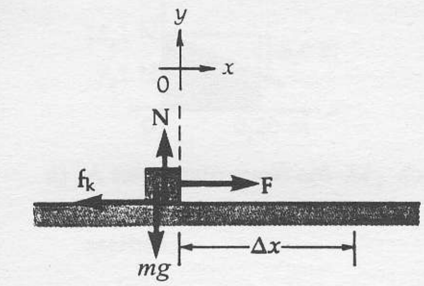
[5] A termikus energiának munkává alakulása a *termodinamika* tárgya (19-23. fejezet).

makroszkópikus test kinetikus energiájától. A *(mechanikai) mozgási energia* kifejezés mindig egy tömegnek mint egésznek makroszkópikus mozgására vonatkozik, míg a *termikus* vagy *belső energiát* a részecskék mikroszkópikus mozgásával kapcsolatban használjuk. Így egyik esetben *rendezett mozgásról* van szó, amikor egy test összes atomja ugyanabban az irányban mozog, míg a másik eset az atomok *rendezetlen mozgását* jelenti.

A súrlódási erő hatására keletkező termikus energia meghatározására tekintsünk egy testet, amelyet érdes, vízszintes felületen állandó erővel húzunk (6-21 ábra). A test Δx elmozdulása során $\Delta W_F = F_x\Delta x$ munkát végzünk. Minthogy a test gyorsulása zérus, $F_x = f_k$, vagyis a súrlódási erő az általunk végzett munkával egyenlő nagyságú, de negatív munkát végez a testen: $\Delta W = -f_k\Delta$. A test kinetikus energiája, minthogy sebessége állandó, nem változik. A csúszás folyamán azonban E_t termikus (belső) energia keletkezik, ami éppen egyenlő az általunk végzett munkával. A belső energiát az f_k súrlódási erővel is kifejezhetjük, hiszen *nagysága* éppen megegyezik a súrlódási munkával:

Termikus energia (E_t)
(a csúszó súrlódás során keletkezik) $\qquad \Delta E_t = -f_k\Delta x \qquad$ **(6-23)**

Ügyeljünk az U_g és U_r mechanikai potenciális energiák (ezek könnyen átalakíthatók munkává vagy mozgási energiává) és az E_t termikus energia megkülönböztetésére. Az utóbbi *belső energia* és az atomok és molekulák véletlenszerű mozgásából származik, s nem könnyű más, pl. mechanikai energia formává átalakítani.



6-21 ábra
A 6-11 példához. A testet állandó sebességgel húzzuk.

6-11 PÉLDA

Egy m tömegű testet a 6-21 ábrán látható módon vízszintes irányú, $\mathbf{F} = 6$ N nagyságú erővel 3 m távolságra húzunk el állandó sebességgel. Milyen energiaváltozások mennek végbe?

MEGOLDÁS

Mivel a test sebessége állandó, az **F** erő nagysága megegyezik az f_k súrlódási erővel. Az F erő a testen

$$\Delta W_F = (F)(\Delta x) = (6\,\mathrm{N})(3\,\mathrm{m}) = 18{,}0\ \mathrm{J}$$

munkát végez. Ennek során a súrlódási erő

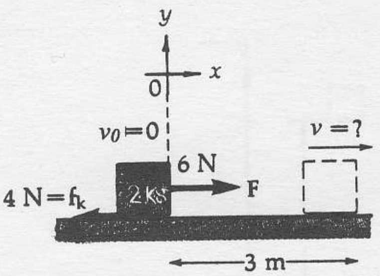
$$\Delta E_t = (f_k)(\Delta x) = (6\ \mathrm{N})(3\ \mathrm{m}) = 18{,}0\ \mathrm{J}$$

termikus energiát (hőt) ad át a csúszó felületeknek.

A külső erő munkát végez a testen, tehát energiát ad át neki. Hová lesz ez az energia? Nem változik sem a gravitációs potenciális energia (hiszen a test nem emelkedik), sem pedig a kinetikus energia (hiszen a test sebessége állandó). Szó sem lehet rugóenergiáról sem. Az egyetlen energiaváltozás a belső energia növekedése. Arra kell tehát következtetnünk, hogy az F külső erő munkája a súrlódási erő közvetítésével belső energiává alakult.

6-12 PÉLDA

A munkatétel természetesen teljesen általános érvényű és akkor is fennáll, ha a gyorsuló mozgás súrlódás jelenlétében zajlik. Ezt mu-



6-22 ábra
A 6-12 példához.

tatja be a következő példa. Egy 2 kg tömegű testet 6 N vízszintes erővel húzunk a padlón. A súrlódási erő 4 N. Mekkora a test sebessége 3 m út megtétele után? (6-22 ábra), ha kezdetben nyugalomban volt?

MEGOLDÁS

1. Módszer: A testre vízszintes irányú

$$\Sigma F_x = (6\ \mathrm{N} - 4\ \mathrm{N}) = 2\ \mathrm{N}$$

eredő erő hat.
Alkalmazzuk a munkatételt.

$$\text{Az } \textit{eredő erő} \text{ munkája} = \Delta K$$

$$\Sigma F(x) = \tfrac{1}{2}(mv^2 - mv_0^{\,2})$$

Figyelembe véve, hogy $v_0 = 0$, az egyenletből kifejezhet a v sebesség:

$$v = \sqrt{\frac{2(F)(x)}{m}} = \sqrt{\frac{2(2\ \mathrm{N})(3\ \mathrm{m})}{2\ \mathrm{kg}}} = 2{,}45\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

2. Módszer: Az eredmény helyességének ellenőrzésére oldjuk meg a feladatot Newton második törvényével és a kinematikai egyenletek felhasználásával is. Az eredő erő 2 N, így a test a_x gyorsulása

$$a_x = \frac{F}{m} = \frac{2\ \mathrm{N}}{2\ \mathrm{kg}} = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Helyettesítsük be ezt az értéket a kinematikai egyenletbe:

$$v^2 = v_0^{\,2} + 2ax$$

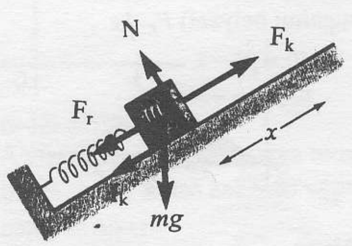
$$v^2 = 0 + 2\left(1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(3\ \mathrm{m}) = 6\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2$$

A megoldás a következő:

$$v = \sqrt{6\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 2{,}45\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

6.7 A munkatétel átfogalmazása

A mechanikában gyakori és megszokott helyzet az, hogy egy rendszeren valamilyen külső erő munkát végez és ily módon energiát ad át neki. Ez történhet például úgy, hogy a rendszert kötéllel húzzuk, vagy más módon gyakorolunk rá toló vagy húzó erőt, de bármely más külső rendszer által gyakorolt erő munkavégzéssel energiát vihet át a vizsgált rendszerre. A rendszerben magában is ébredhet természetesen gravitációs, rugalmas vagy súrlódási erő. Ezek azonban *belső* erők, s most a külső erő hatására összpontosítunk. A 6-23 ábra egy különböző belső erőket tartalmazó rendszert mutat be, amelyre egyetlen F_k külső erő hat.



6-23 ábra
A „rendszer” az m tömegű test és az a környezete, amelyben a rugóerő, a lejtőn ébredő erők, beleértve a súrlódási erőt, és a gravitációs erő belső erőknek számítanak. Az $\mathbf{F}_k$-erő az egyetlen, ami kívülről hat a testre.

Ha egy rendszeren adott külső erő végez munkát, akkor a munkatétel kissé átfogalmazva a megszokottól eltérően is felírható. Ebben a formájában lényegében azt fejezi ki, hogy energia nem keletkezhet és nem semmisülhet meg, azaz *ha külső forrásból valamilyen energia kerül egy rendszerbe, akkor az megváltoztatja a rendszer mozgási, helyzeti vagy belső energiáját.* Ennek bizonyítására induljunk ki a (6-19) egyenlettel megfogalmazott munkatételből. Eszerint a külső erők eredője által végzett munka megegyezik a test kinetikus energiájának megváltozásával. A 6-23 ábrán látható m tömegű test esetén (ezt a testet most olyan rendszer részének tekintjük, amelyben a lejtő által kifejtett kényszererő, a gravitációs erő és a rugóerő belső erőnek számít)

$$[\text{A testre ható erők eredőjének munkája}] = \Delta K$$

$$\mathbf{F}_g \cdot \mathbf{x} + \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{x} + \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{x} + \left[\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{x}\right] = \Delta K$$

$$(-\Delta U_s) + (-\Delta U_r) + (-\Delta E_t) + \left[\begin{matrix}\text{Az } \mathbf{F}_k \text{ külső} \\ \text{erő munkája}\end{matrix}\right] = \Delta K$$

Átrendezve az összefüggést:

A munkatétel (átfogalmazott változat)	Adott F_k külső erő által a testen végzett munka (ez az erő különbözik azoktól, amelyek munkáját a jobb oldali energiatagokkal már figyelembe vettük)	$W_k = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_r + \Delta U_t$ **(6-24)**

Hasonlítsuk össze a munkatételnek ezt a formáját a *125.* oldalon található (6-19) egyenlettel! Vegyük észre, hogy a (6-19) egyenletben a testre ható *összes* erők munkája szerepel, míg a (6-24) egyenletben *egyetlen* $\mathbf{F}_k$ erő munkáját emeljük ki. Ezt az erőt világosan elkülönítjük és egy külső rendszer hatásának tekintjük, bár felléphet még gravitációs, súrlódási, rugóerő vagy további más erő is. (Ezeket az utóbbiakat most a rendszerhez tartozó erőknek tekintjük.) Az $\mathbf{F}_k$ erő azonban nem lehet kapcsolatban egyetlen, a 6-24 egyenlet jobb oldalán szereplő energiataggal sem.
Végül megemlítjük, hogy ΔE_t mindig pozitív mennyiség, mert a tisztán mechanikai változásokban a termikus energia nem csökkenhet.

6-13 PÉLDA

A 6-24 ábrán látható doboz 2 m/s kezdősebességgel mozog a vízszintes talajon. A doboz és a talaj között a csúszó súrlódási együttható 0,2. A dobozra 4 m hosszúságú úton a mozgás irányában $F_k = 10$ N vízszintes erő hat. Mekkora a doboz végsebessége a 4 m-es út megtétele után?

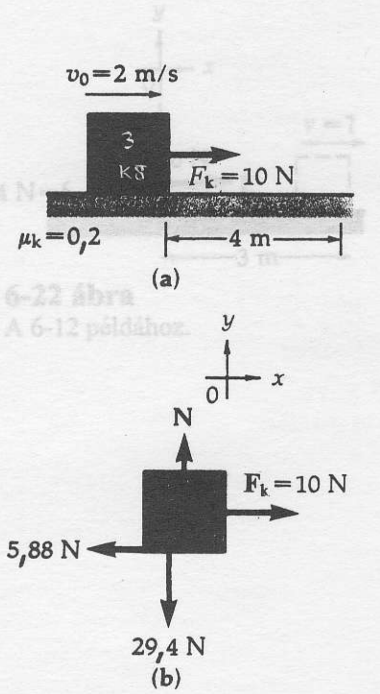
MEGOLDÁS

A 6-24 ábrán látható a feladat vektorábrája. A függőleges erőkomponensek összege zérus, így N = (3 kg)(9,8 m/s^2) = 29,4 N, következésképpen a csúszó súrlódási erő $f_k = kN = 0{,}2$ (29,4 N) = = 5,88 N. Alkalmazzuk a munkatétel (6-24) szerint átfogalmazott változatát.

$$\left[\begin{matrix}\text{Az } \mathbf{F}_k \text{ külső erő} \\ \text{által végzett munka}\end{matrix}\right] = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_r + \Delta E_t$$

$$F_k \cdot d = \frac{1}{2} m\left(v^2 - v_0^{\,2}\right) + 0 + 0 + f_k \cdot d$$

Behelyettesítve az adatokat és átrendezve az egyenletet a v sebességre a következő összefüggést kapjuk:



6-24 ábra
A 6-13 példához.

$$v^2 = \frac{2}{m}\left[F_k \cdot d + \frac{1}{2}mv_0^{\,2} - f_k - d\right]$$

$$v^2 = \frac{2}{(3\text{kg})}\left[(10\text{N})(4\text{m}) + \frac{1}{2}(3\text{kg})\left(2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - (5{,}88\text{N})(4\text{m})\right]$$

$$v = 5{,}47\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

6-14 PÉLDA

A következő feladatban az energia minden eddig tárgyalt alakja szerepel. A 6-25 ábrán látható 30°-os lejtőn fekvő testre a lejtő irányával párhuzamosan felfelé 30 N nagyságú külső erő hat. A test és a lejtő között a csúszó súrlódási együttható $\mu_k = 0{,}3$. A test egy $k = 40$ N/m rugóállandójú rugóval rögzítjük, és a koordinátarendszert úgy vesszük fel, hogy a nyugalmi helyzetben $x_o = 0$. Mekkora lesz a test sebessége, miután 0,2 m-t haladt felfelé a lejtőn? Oldjuk meg a feladatot a munkatétel (6-19) és (6-24) alakjával is.

MEGOLDÁS

1. módszer: A (6-24) egyenletet alkalmazva, az **F** külső erő munkáját a rendszer különböző energiafajtáinak megváltozásával teszszük egyenlővé. Mivel a gravitációs potenciális energia is változhat, ki kell jelölnünk a zérusszintjét. Ezt a szintet a test nyugalmi helyzetében vesszük fel: $U_g \equiv 0$.

$$\left[\begin{matrix}\text{Az } \mathbf{F}_k \text{ külső erő} \\ \text{munkája}\end{matrix}\right] = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_r + \Delta U_t$$

$$(F)(x) = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}kx^2 + f_k x \qquad \text{(6-25)}$$

A test függőleges emelkedése $h = x \sin 30° = 0{,}2$ m. $\sin 30° = 0{,}1$ m. A súrlódási erő a vektorábra alapján határozható meg:

$$f_k = \mu_k N = \mu_k(mg\cos 30°) = (0{,}3)(2\text{ kg})(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2})(\cos 30°) = 5{,}1\text{ N}$$

Behelyettesítve ezeket az értékeket a (6-25) egyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$(30\text{N})(0{,}2\text{ m}) = \frac{1}{2}(2\text{ kg})(v^2) + (2\text{ kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0{,}1\text{ m})$$

$$+\frac{1}{2}\left(40\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(0{,}04\text{ m}^2) + (5{,}1\text{ N})(0{,}2\text{ m})$$

$$6{,}0\text{ Nm} = (1\text{ kg})(v^2) + (2\text{ kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0{,}1\text{ m})$$

Ebből:

$$v^2 = \frac{2{,}22\text{ Nm}}{1\text{ kg}} = 2{,}22\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$$

majd gyököt vonva: $v = \sqrt{2{,}22\left(\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 1{,}49\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

2. módszer: A munkatétel (6-19) alakjának felhasználásához határozzuk meg az *eredő* erőnek a mozgás irányával párhuzamos összetevőjét. A vektorábra szerint:

$$\Sigma F_x = 30\,\text{N} - kx - \mu_k N - mg\sin 30^\circ$$

ahol $\mu_k N = \mu_k(mg\cos 30^\circ) = (0{,}3)(2\,\text{kg})\left(9{,}8\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(\cos 30^\circ) = 5{,}1\,\text{N}$

és $mg\sin 30^\circ = (2\,\text{kg})\left(9{,}8\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(\sin 30^\circ) = 9{,}8\,\text{N}$

Így $\Sigma F_x = 30\,\text{N} - \left(40\,\dfrac{\text{N}}{\text{m}}\right)x - 5{,}1\,\text{N} - 9{,}8\,\text{N} = [15{,}1 - 40\,x]\text{N}$

(ahol az x távolságot méterben mérjük).

A ΣF_x eredő erő a rugóerő miatt az x távolság függvényében lineárisan változik. Mivel $x = 0$ helyen a kezdeti érték

$$\left(F_{\text{eredő}}\right)_0 = [15{,}1 - 40\cdot(0)] = 15{,}1\,\text{N},$$

az $x = 0{,}2$ m helyen felvett értéke pedig

$$F_{\text{eredő}} = [15{,}1 - 40\cdot(0{,}2)] = 7{,}1\,\text{N},$$

Ezért az erő által végzett munka a fenti lineáris függvény alatti területnek ezen határok közötti része:

A téglalap területe:	7,1 N × 0,2 m	= 1,42 N·m
A háromszög területe:	1/2 × 8,0N × 0,2 m	= <u>0,80 N·m</u>
	A teljes terület	= 2,22 N·m

Behelyettesítve ezt az értéket a (6-18) munkatételbe, azt kapjuk, hogy

$$[\text{Az } \textit{eredő erő} \text{ munkája}] = \Delta K$$

$$2{,}22\,\text{Nm} = \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^{\,2}\right)$$

$$2{,}22\,\text{Nm} = \left[\frac{1}{2}(2\,\text{kg})v^2 - 0\right]$$

Átrendezve: $v^2 = \dfrac{2{,}22\,\text{Nm}}{1\,\text{kg}} = 2{,}22\left(\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$

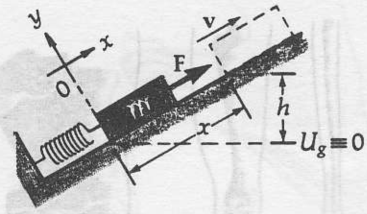
Elvégezve a gyökvonást: $v = \sqrt{2{,}22\left(\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 1{,}49\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

Megoldás integrálással:

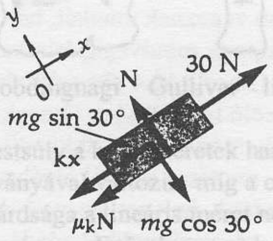
Az eredő erő munkája (a görbe alatti terület) a

$$W = \int \mathbf{F}_{\text{eredő}}\, d\mathbf{r}$$

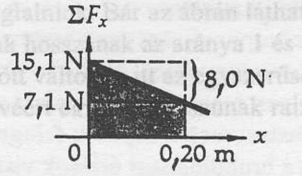
integrállal is meghatározható. Mivel mind **F**, mind **dr** az x tengely pozitív irányába mutat és cos 0° = 1, ezért



a) k a rugóállandó, μ_k a test és a lejtő közötti csúszó súrlódási együttható.



b) A test vektorábrája



c) A testre ható eredő erő ΣF_x ábrázolása a koordinációs rendszerben.

6-25 ábra
A 6-14 példához.

$$W = \int F_x \, dx = \int_0^{0,2} [15{,}1 - 40x]\, dx$$

Elvégezve az integrálást (G-II függelék) és behelyettesítve a határokat, adódik hogy:

$$W = \left[15{,}1x - 20x^2\right]_0^{0,2\text{m}} = [3{,}02 - 0{,}8] - 0 = \underline{\underline{2{,}22\ \text{Nm}}}$$

A megoldás további része azonos a fentiekkel.

6.8 Belső energiaforrások

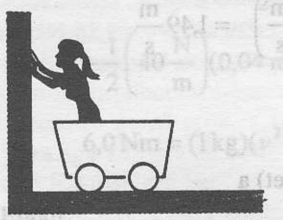
Egyes esetekben a rendszerrel közölt energia forrásai nem nyilvánvalóak. Tekintsünk pl. egy vízszintesen guruló kocsin elhelyezkedő kislányt. Ha a kislány úgy jön mozgásba, hogy ellöki magát egy rögzített faltól, akkor, amint azt a 6-26 ábra is mutatja, a külső erő lényegében a kislány-kocsi rendszerre hat. Ugyanakkor, noha a rendszer mozgási energiához jut, az $\mathbf{F}_1$ *külső erő nem végez munkát, hiszen a fal elmozdulása zérus.* Honnan származik a mozgási energia? Ebben az esetben a kislány izmainak a munkájától. Az energia most *belső* forrásból származik. A helyzet bizonyos értelemben analóg azzal, amikor egy összenyomott rugót engedünk munkavégzés közben „szétugrani".

A belső erők munkájára újabb példa a guggolásból való felállás. A gravitációs potenciális energia növekedését ebben az esetben nem a talaj által a lábainkra kifejtett külső erő munkája fedezi, hanem izmaink *belső* munkavégzéséből származik.

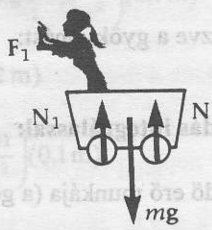
Lilliputiak és Brobdingnagiak

Jonathan Swift Gulliver utazásai című, 1726-ban megjelent regényének főhőse, Gulliver különös országokba látogat. Lilliputban, a törpék országában a lakosság hosszmérete csak tizenkettede Gulliver testhosszúságának, míg a Brobdingnagban lakó óriások tizenkétszer nagyobbak nála. A méreteknek ez a változása csodálatraméltó fizikai képességekhez vezet. Egyes esetekben Swift eltalálja ezeket a tulajdonságokat, máskor azonban téved, ill. nem vonja le a megdöbbentő következtetéseket. Nézzünk néhányat!

Csontvázunknak elsősorban testünk súlyát kell tartania, és ellenállónak kell lennie a hajlító és csavaró igénybevételekkel



a) A kezdetben nyugalomban levő kislány úgy jön mozgásba, hogy ellöki magát a rögzített faltól.



b) A kislány-kocsi rendszer vektorábrája.

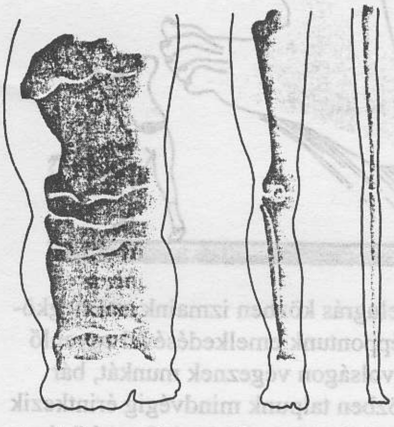
6-26 ábra

Az ábra olyan különleges esetet mutat, amikor az $\mathbf{F}_1$ külső erő nem végez munkát a rendszeren. A rendszer mozgási energiáját a kislány izomtevékenysége és az ehhez szükséges belső energiaforrások fedezik.

szemben. Hogyan változik a csontok ellenállása a nyomóerő hatására, ha a méret változik? Ha egy 5 cm × 5 cm keresztmetszetű csont W súlyt bír el, akkor egy lineáris méreteiben kétszer akkora csontdarab teherbírása 4 W (hiszen az eredeti méretű csontból négyet kell szorosan egymás mellé tennünk, hogy keresztmetszete 10 cm × 10 cm legyen). Mit mondhatunk a végtagok mozgatásához és a munkavégzéshez szükséges izomerőről? Az izomrostok bizonyos értelemben a megfeszített gumiszálakhoz hasonlóan működnek, amelyeket akaratunk szerint húzhatunk össze és ernyeszthetünk el. Az izomrostok száma jó közelítéssel arányos az izomköteg keresztmetszetével. Így a lineáris méret megduplázása az izomerő megnégyszerezését jelenti. A szorzó ugyanaz, mint ami a csontok teherbíró képességében fellépett. Ez szerencsés, hiszen így növekedésünk során az izomerő lépést tart a csontok szilárdságával.

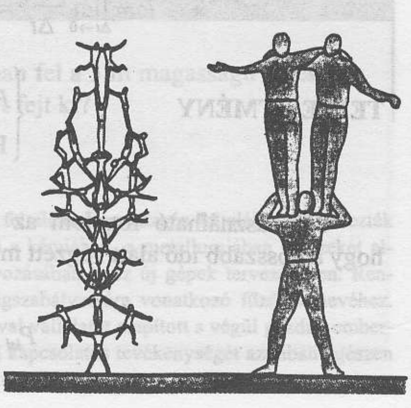
Vegyük azonban figyelembe, hogy súlyunk a test térfogatával arányos, ami a lineáris méretek harmadik hatványával változik. Így a kétszeres hosszméret nyolcszoros súllyal jár együtt, s ez azt jelenti, hogy a csontoknak relatíve sokkal nagyobbaknak kell lenniök, hogy a nagy súlyt elbírják. Ezt a természet is igazolja. Az egér csontrendszere az állatka súlyának csak 5-8 %-át jelenti, míg az embernél ez az arány eléri a 17 %-ot. A nagyobb állatok, lovak, elefántok csontrendszerének súlya a teljes súly még nagyobb hányadát képezi. Teljesen valószínűtlen, hogy a brobdingnagiak elegendően erős csontok mellett még olyan izomtömeggel is rendelkezhessenek, ami a hatalmas súlyú csontok és izmok mozgatásához szükséges. A vízi állatok és halak súlyának nagy részét kiegyenlíti a felhajtóerő, így nincs szükségük a fenti gondolatmenetből adódó hatalmas csontokra és izmokra. Ez az oka, hogy pl. a vízből kiemelt bálnák általában sajnálatos módon összeroppannak és elpusztulnak, mert csontjaik és izmaik képtelenek megtartani hatalmas testük súlyát.

Igen érdekesen hat a méretek változása a gyaloglás sebességére is. A láb természetes lengési frekvenciája a láb hosszúságának a négyzetgyökével fordítottan arányos. (Lásd 15-7 fejezet, A fizikai inga.) Hasonlítsuk össze egy felnőtt és a félakkora hosszúságú lábbal rendelkező gyermek gyaloglási sebességét. Ugyanakkora szögben kilendített lábbal a felnőtt kétszer olyan hosszút lép mint a gyermek. A szabadon kilendülő lábbal lépő gyermek lépteinek a frekvenciája $\sqrt{2}$-ször nagyobb, mint a felnőtté. Így az *alatt az idő alatt*, míg a felnőtt egy ℓ hosszúságú lépést megtesz, a gyerek $\sqrt{2}$ lépést tesz meg, de az csak feleakkora hosszúságú. A gyermek gyaloglási sebessége tehát – az egy másodperc alatt megtett lépések száma szorozva a lépéshosszal – csak $0{,}5\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$ -szöröse a felnőtt gyaloglási sebességének. Ha egy gyereket arra kényszerítünk, hogy egy felnőtt tempójában sétáljon, hamarosan rettenetesen elfá-

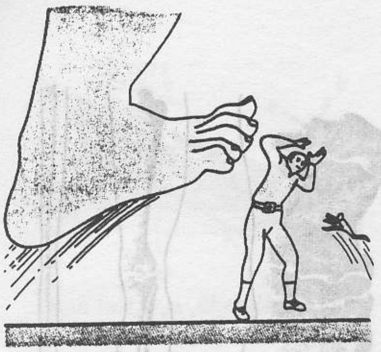


brobdingnagi Gulliver lilliputi

A testsúly a hosszméretek harmadik hatványával változik, míg a csontok szilárdsága a lineáris méret négyzetével arányos. Ezért ha a test hosszmérete nő, a növekvő súly tartásához a csontoknak a testtömegből egyre nagyobb és nagyobb részt kell elfoglalniok. Bár az ábrán látható lábak hosszának az aránya 1 és 12 között változik, itt az egyszerűség kedvéért egyenlő hosszúnak rajzoltuk



Egy ember két embernyi súlyt képes a vállán megtartani. A méretarányra vonatkozó következtetéssel arra juthatunk, hogy a lilliputiak látványos mutatványra képesek – 24 társuk súlyát bírják el, míg az óriás brobdingnagiakból hatan kellenek ahhoz, hogy egyetlen társukat felemeljék.



Felugrás közben izmaink a tömegközéppontunk emelkedésével egyenlő távolságon végeznek munkát, bár közben talpunk mindvégig érintkezik a talajjal. (Lásd a 10.4 tömegközéppontról szóló fejezetet.) A tömegközéppont ily módon szerzett kinetikus energiája, miután a talajtól elválva felemelkedünk, helyzeti energiává alakul. A méretarányokból adódó gondolatmenet arra vezet, hogy a *felugrás magassága független az ugró testének méretétől.* Az atléták felugráskor kb. 1 m magasságba emelik tömegközéppontjukat (ez a testmagasságnak mintegy fele). A lilliputiak ugyanilyen magasra, azaz testmagasságuk hatszorosára képesek felugrani. Emiatt a brobdingnagi óriások viszont testmagasságuknak csak huszonnegyed részét képesek ugrani, ami nem túlságosan lenyűgöző teljesítmény. Az állatvilág jól igazolja ezt a törvényt; a bolha testhosszának 200-szorosára, a szöcske 30-szorosára, a kutya azonban már csak 2-3-szorosára tud felugrani, míg az elefánt ugrásra egyáltalán nem képes.

rad, izmai fájni kezdenek attól, hogy a lábat a természetes lengési frekvenciánál gyorsabban mozgatja előre és hátra. Ezért ha egy kisgyerekkel sétáló felnőtt nincs tekintettel az eltérő tempóra, nem csodálkozhat, hogy a gyerek gyorsan elfárad és feladja a sétát.

P. K. Weyl, *Men, ants, elephants,* Viking Press, 1959, and F. W. Went, „The size of Man" *American Scientist*, **400**, 56, 1968. Továbbá *„Size and shape in biology"*, Thomas Mc Mahon, *Science*, 179, (márc 25. 1973) pp.1201-1204.

A példák mutatják, hogy pusztán a külső erők figyelembevétele gyakran nem elegendő a folyamatban résztvevő összes energiaforrás felderítésére. A munkatételben a belső energiaforrások W_b munkáját is figyelembe kell venni, azaz

$$\left[W_{\text{külső erő}} + W_b\right] = \Delta K \qquad (6\text{-}26)$$

6.9 A teljesítmény

A teljesítmény a „munka sebessége". Sok esetben nem elegendő, ha azt tudjuk, hogy a munkavégzés hatására milyen sebességet szerez egy test, hanem érdemes azt is tudni, hogy milyen gyorsan jutott ehhez a sebességhez. Nemcsak a munkavégzés során átadott öszes energia érdekelhet bennünket, hanem gyakran a munkavégzés sebessége külön is figyelmet érdemel. Egy gépkocsit akár a mókuskereket hajtó aranyhörcsög is felemelhet néhány méter magasra, az emelésre mégis többnyire olyan gépet használunk, ahol a folyamat gyorsabb, a „munkasebesség" sokkal nagyobb. Az ipari társadalmakban a teljesítmény fogalma különösen fontos szerepet játszik.

Induljunk ki az elemi munka

$$\Delta W = \mathbf{F}\Delta\mathbf{r}$$

definíciójából, ahol ΔW az $\mathbf{F}$ erő által a kicsiny $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulás során végzett kicsiny (elemi) munka. Ha a $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulás Δt idő alatt következik be, akkor a munka időbeli sebessége a

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \mathbf{F}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

összefüggéssel adható meg. Ha a Δt időtartam zérushoz tart, megkapjuk a P **teljesítmény** definícióját:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta W}{\Delta t} = \mathbf{F}\cdot\left(\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{dt}\right) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$$

TELJESÍTMÉNY

$$\begin{cases} P = \dfrac{dW}{dt} & (6\text{-}27) \\ \mathrm{P} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} & (6\text{-}28) \end{cases}$$

Jól használható fogalom az **átlagteljesítmény** is, amit úgy kapunk, hogy a hosszabb idő alatt végzett munkát elosztjuk az eltelt idővel:

$$P_{\acute{a}tl} = \frac{\text{Munka}}{\text{Idő}} \qquad (6\text{-}29)$$

A teljesítmény mértékegysége az *SI-rendszerben* N·m/s, vagyis J/s, amit **watt**-nak (W)[6] nevezünk. A watt általánosan használt többszöröse a *kilowatt* (kW), ami 1000 watt. Régebbi, de néha még ma is előforduló teljesítményegység a lóerő (hp), amit eredetileg egy átlagos erejű ló által hosszabb ideig szolgáltatható teljesítményként definiáltak. (Valójában a lovak többsége ennél kissé kevesebbre képes, míg egy ember rövid ideig ezt meghaladó teljesítménnyel is dolgozhat.) A lóerő definíció szerint:

$$1\ \text{hp} = 746\ \text{watt},$$

de általánosan használt gyakorlati szabály, hogy 1 hp=3/4 kW. Bár a kilowattot általában elektromos egységnek tekintik, természetesen bármely más egységhez hasonlóan a fizika minden területén használható. Manapság a gépkocsik teljesítményét is a lóerő helyett inkább kilowattban szokás megadni. (Erre Magyarországon törvény is kötelez.) A teljesítményegységek használatában régebben szokásos különbségtételnek történeti okai vannak, az elektromos eszközök később fejlődtek ki, és akkor a metrikus rendszer már elterjedt, ezért ezekre vonatkozóan a lóerőt sohasem használták.
Szokásos *energia* (és nem teljesítmény) egység a **kilowatt-óra** (kW·h), ami megegyezik azzal a munkával, amit egy 1 kW állandó teljesítményű berendezés 1 óra alatt végez.

6-15 PÉLDA

Egy farmotoros csónak 16 km/ó állandó sebességgel mozog. A víz ellenállása 70 N. Mekkora teljesítményt ad le a motor kW-ban?

MEGOLDÁS

Mivel a csónak egyenletesen mozog, a motor húzóereje pontosan egyenlő a víz ellenálló erejével. Így a motor teljesítménye:

$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = F\cdot v\ \cos\ 0° = F\cdot v.$$

Behelyettesítve az adatokat

$$P = 70\ \text{N}\cdot 16\frac{\text{km}}{\text{ó}}\overbrace{\left(\frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}6\frac{\text{km}}{\text{ó}}}\right)}^{\text{átszámítási tényező}} = 311{,}1\ \text{watt} = 0{,}311\ \text{kW}$$

6-16 PÉLDA

Egy 60 kg tömegű fiú 2,5 s alatt rohan fel a 3 m magasságú lépcsősoron. Mekkora átlagos teljesítményt fejt ki?

[6] Az egységet Sir James Watt (1736-1819), skót feltalálóról, a gőzgép feltalálójáról nevezték el. Watt figyelemreméltó eredményeket ért el a kémiában, a metallurgiában és ezeket alkalmazta, a mechanikai mozgások tanulmányozásában, s az új gépek tervezésében. Rengeteg szabadalom, közöttük a gépek sebességszabályzójára vonatkozó fűződik nevéhez. Watt sikeres üzletember is volt, egy kollégájával vállalatot alapított s végül gazdag emberként vonult vissza. A gőzgép tökéletesítésével kapcsolatos tevékenységét azonban egészen 83 éves korában bekövetkezett haláláig folytatta.

MEGOLDÁS

Feltéve, hogy a fiú állandó sebességgel fut, kinetikus energiája nem változik. Lábizmai azonban munkát végeznek, s ez a munka a helyzeti energia növelésére fordítódik. Az átlagos teljesítmény:

$$P_{átl} = \frac{\text{Munka}}{\text{Idő}} = \frac{mgh}{t}.$$

Az adatokat behelyettesítve

$$P_{átl} = \frac{(60\,\text{kg})\left(9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(3\,\text{m})}{(2{,}5\,s)} = 706\,\frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 706\ \text{W}$$

6.10 A hatásfok

A gépeket általában arra használjuk, hogy valamilyen energiafajtát hasznos munkává alakítsunk. A súrlódás miatt azonban a gépek által végzett munka mindig kevesebb, mint a gép által felhasznált energia. A gépek η hatásfokát az

A gép η hatásfoka

$$\eta = \frac{\text{Hasznos munka}}{\text{Felhasznált energia}} \tag{6-31}$$

összefüggéssel definiáljuk. A hatásfokot gyakran százalékban adjuk meg; **százalékos hatásfok**$=\eta \cdot 100\%$.

6-17 PÉLDA

Lejtős szállítószalagot 3 kW elektromos teljesítményű motor működtet. A szalag apróra tört követ szállít 10 m magasra 40000 kg/m sebességgel. Mekkora a rendszer hatásfoka?

MEGOLDÁS

A szállítószalag által 1 s alatt végzett munka

$$\frac{\Delta mgh}{\Delta t} = \frac{(4\times 10^4\ \text{kg})\left(9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(10\,\text{m})}{(1\,\text{h})\left(\frac{3600\,\text{s}}{1\,\text{h}}\right)} = 1089\,\frac{\text{J}}{\text{s}}$$

A betáplált energia másodpercenként 3 kW = 3000 J/s, azaz a hatásfok:

$$\eta = \frac{\text{a másodpercenként végzett munka}}{\text{a másodpercenként felvett energia}} = \frac{1089\ \text{J/s}}{3000\ \text{J/s}} = 0{,}363 \text{ vagy } 36{,}3\ \%$$

A jövő energiaforrásai

A civilizációnk előtt álló legbonyolultabb kérdés az energiakérdés. A probléma bonyolult keveréke a technikai ismereteknek, a gazdaságnak, politikának és az elviselhetőnek tekinthető környezeti károkkal kapcsolatos szubjektív érzéseknek. Ez utóbbi annyira megfoghatatlan, a vélemények oly széles skálán változnak, hogy az energiával kapcsolatos minden vita óhatatlanul rendkívül bonyolulttá válik.

Az Egyesült Államok, ahol a világ lakosságának csak 6,4%-a él, jelenleg a világon megtermelt összenergiának 35%-át fogyasztja. Ugyanakkor energiaszükséglete egyre gyorsuló ütemben nő, s nemcsak azért, mert lakossága szaporodik, hanem azért is, mert az utóbbi tíz évben az egy főre jutó energiafogyasztás is erőteljesen nőtt.

Minden előrejelzés arra utal, hogy a növekedés folytatódik. Ha ezt összevetjük azzal, hogy a világ lakosságának többsége, amely fejlődő országokban él, szintén több energiáért sóvárog, megállapítható, hogy hosszú távon az energiaigény drámaian komoly kérdés.

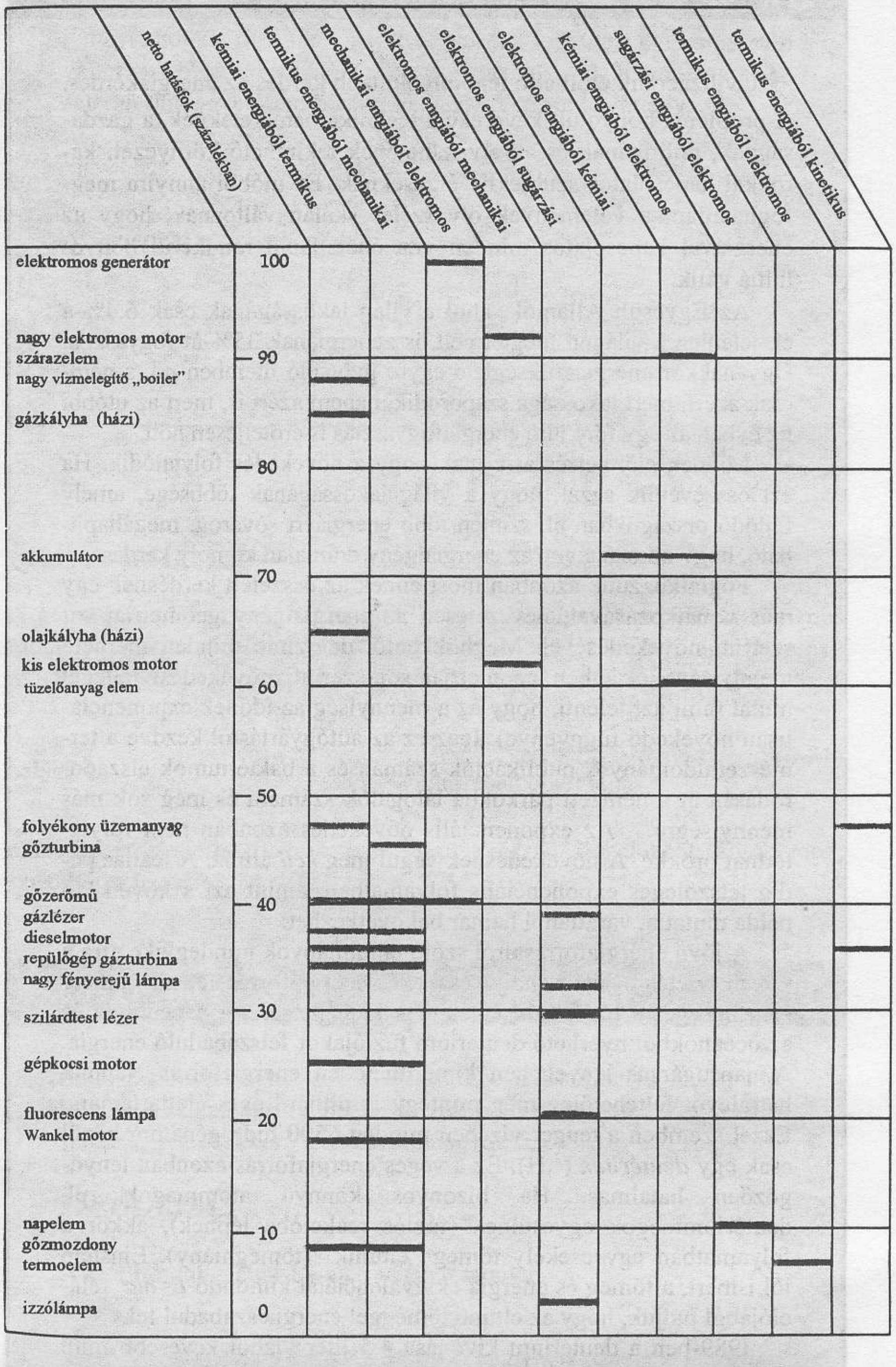
Foglalkozzunk azonban most ennek az összetett kérdésnek egy más vonatkozásával, nevezetesen az energiaigény geometriai sor szerinti növekedésével. Meghökkentő, de szinte minden mérhető mennyiség kezdetben geometriai sor szerinti növekedési jelleget mutat (ami azt jelenti, hogy az a mennyiség az időnek exponenciálisan növekedő függvénye). Igaz ez az autógyártástól kezdve a természettudományos publikációk számán és a baktériumok elszaporodásán át a nemzeti parkokba látogatók számára és még sok más mennyiségre[ii]. Az exponenciális növekedés azonban nem folytatódhat örökké. A növekedésnek végül meg *kell* állnia. A leállás pedig tetszőleges exponenciális folyamatban, amint azt a következő példa mutatja, váratlanul hamar bekövetkezhet.

A jövő energiaforrásairól szóló tanulmányok mindegyike arra a következtetésre jutott, hogy csak két energiaforrás létezik, amely elég bőséges a jövő szükségleteinek kielégítésére; a napenergia és az óceánokból nyerhető deutérium fúziójakor felszabaduló energia. A napsugárzás lényegében kimeríthetetlen energiaforrás Napunk hátralevő, feltehetőleg még mintegy 5 milliárd éves élettartamára. Ezzel szemben a tenger vízében minden 6500 hidrogénatom közül csak egy *deutérium* ($^2_1$H). Ez a véges energiaforrás azonban lenyűgözően hatalmas. Ha bizonyos könnyű atommagok, pl. deutériummagok egyesülnek (fúziós reakcióba lépnek), akkor a folyamatban egy csekély tömeg „eltűnik" (tömeghiány). Einstein jól ismert, a tömeg és energia ekvivalenciáját kimondó $E=mc^2$ relációjából tudjuk, hogy az eltűnő tömeggel energia szabadul fel.

1989-ben a deutérium kivonása 4,5 liter vízből kevesebb mint 10 centbe került. Ha az így nyert összes deutériumot maximális hatásfokkal fúziós reakcióban tudnánk hasznosítani, akkor mintegy 350 liter benzin elégetésével nyerhető energiához jutnánk. Más módon kifejezve 1 km^3 tengervízből több energia nyerhető, mint a világ teljes fosszilis energiakészletének elégetésével.

Természetesen ott a nagy kérdés, hogy a fúzió megvalósítható-e gazdaságosan vagy nem. A megoldandó technikai problémák óri-

[ii] Érdekesen tárgyalja az exponenciális növekedést Ralph Lapp A logaritmikus század című könyvében (Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall 1973). Hasonlóan érdekes Albert A. Bartlett „Az energiaválság elfeledett gyökerei" c. cikke (American Journal of Physics 46, 876 /1978/) és a szerző szórakoztató, „Az exponenciális jövő" c. cikksorozata, amelyet a The Physics Teacher 14, 393 (1976)-tól 17.23 (1979)-ig terjedő számaiban jelentetett meg.



6-27 ábra

A különböző energiaátalakítók tipikus hatásfoka a 99 %-os, nagy hatásfokú, hatalmas elektromos generátoroktól az 5%-nál kisebb hatásfokú izzólámpáig terjed. (Forrás: „Az energiaátalakítás” Claude M. Summers, Copyright 1971 Amerikai Természettudományos Egyesület, Minden jog fenntartva.)

ásinak tűnnek. Legyünk azonban optimisták és tegyük fel, hogy a fúziós reaktor már a közel jövőben megvalósul. Milyen hatása lenne a világ energiaszükségletének alakulására? Természeténél fogva a fúziós reaktorral bizonyára elektromos energiát termelnénk.

1984-ben a világ elektromos energiafogyasztása $1{,}3 \times 10^{12}$ kWh/év volt. Meddig tartana az óceánok deutérium készlete, ha fúzióval termelnénk az energiát? A becslések erősen szórnak. A deutérium termelés, a fúziós folyamat és az elosztási rendszer hatásfokától függően néhány száz millió évtől sok millárd évig terjednek. Fogadjuk el az optimista becslést és tegyük fel, hogy a jelenlegi felhasználás mellett az óceánok deutérium tartalmának fúziójából nyerhető energia 5 milliárd évre – a Nap élettartamának idejére – fedezi elektromos energiaszükségletünket. Ez összesen 25×10^{21} kWh.

Számoljuk azonban újra az időtartamot az energiafogyasztás évi 3 %-os növekedésének feltételezésével[12]. Legyen a a kezdő év energiafogyasztása, r az évi növekedés és n az évek száma. Ekkor

$a+a(1+r)+a(1+r)^2+...+a(1+r)^{n-1}$=A teljes felhasznált energia.

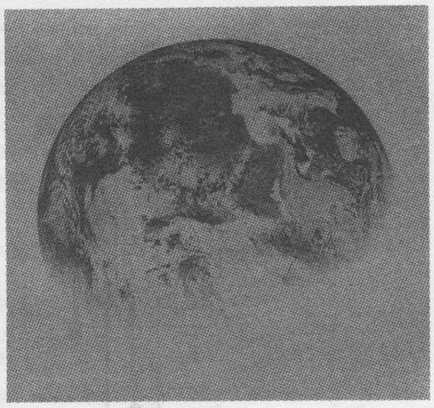
A bal oldali geometriai sor összegét a

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} a(1+r)^k = a\left[\frac{(1+r)^n-1}{r}\right]$$

alakban is felírhatjuk. Behelyettesítve az adatokat és a 3 %-os növekedésnek megfelelő r = 0,03 értéket, majd a kapott egyenletet n-re megoldva, azt kapjuk, hogy az óceán deutériuma csak 637 évre elegendő.

Az öt milliárdos határ helyett csak 637 év! Mellbevágó példa arra, hogy már 3 %-os évi növekedés is milyen hatással jár. A geometriai sor szerinti növekedés végül mindig robbanásra vezet. Természetesen a számítás kissé komolytalan amiatt, hogy mielőtt a 637 év eltelne, már sok egyéb határt is át kellene lépnünk. Ha például a Föld népessége a jelenlegi (kb. 1,7 % évente)[13] arányban nő, akkor 366 év múlva már a szárazföld minden négyzetméterére jut egy lakos. Nyilvánvaló, hogy a szaporodásnak már jóval ezelőtt le kell állnia. Függetlenül azonban attól, hogy honnan közelítünk egy problémához, bármely paraméter állandó arányú növekedése exponenciálisan gyorsuló folyamatot hoz létre. A korlátlan növekedés pedig végül katasztrófához vezet – más lehetőség nincsen.

Továbbmenve, az élelmiszerrel, energiával és szennyeződéssel kapcsolatos problémák végül mind egyetlen alapvető kérdésre, a Föld túlnépesedésének kérdésére vezethetők vissza. Az emberiség bizonyos határon túl nem szaporodhat tovább. Ha a népesség számát nem korlátozzuk önként, akkor a Föld lakosságát végül majd háborúk, dögvész vagy a környezetszennyezés fogja csökkenteni.



6-28 ábra

Az Androméda Törzs c. novellában (Knopf, 1969) Michel Crichton az exponenciális növekedést a következő példával illusztrálja. Egyetlen *E. kóli* baktériumsejt ideális körülmények között húsz percenként osztódik. Crichton arra a következtetésre jut, hogy ilyen növekedési arány mellett, szabályozás nélkül egyetlen *E. kóli* baktériumsejt már egy nap alatt a Föld tömegével azonos tömegű óriástenyészetté fejlődne. (Megjegyés: az ehhez szükséges idő valójában inkább két nap.)

6.11 Erőátvitel

Sok olyan berendezés, egyszerű gép létezik, amelynek segítségével a kis erők átalakítható nagy erővé. Természetesen a semmiből most sem hozhatunk létre valamit, az eszköz által végzett munka, ha a súrlódás elhanyagolható, egyenlő az általunk végzett munkával, azaz ha a kis erő hosszú úton mozdul el, akkor a nagy erő csak rövid távolságon végezhet munkát. A 6-29 ábra néhány ilyen erőátvitelre szolgáló egyszerű gépet mutat.

Az egyszerű gépek jól jellemezhetők az **erőátviteli tényezővel**, ami azt fejezi ki, hogy hányszorosára növelik a munkát végző személy által kifejtett erőt. Az egyszerű gépekkel többnyire nehéz terhet emelünk fel kis erővel. Az egyszerűség kedvéért ebben a fejezetben a továbbiakban a munkát végző személy által a gépre gyakorolt erőt röviden *erőnek* (F_b) ,a gép által megnövelt erőt pedig a tárgy súlyára utalva *tehernek* (F_k) nevezzük.

[12] A közölt becslés igen mértéktartó, a világszerte elterjedt adatok magasabbak, és valóban, ha figyelembe vesszük a fejlődő országok komoly modernizálódási igényét, akkor az energiaszükséglet valószínűleg nagyobb arányban nő.

[13] 1989-ben például a Föld népességének naponkénti növekedése durván 230000 fő volt. Gondoljunk csak arra, mi minden szükséges az élet különböző területein az *egy nap alatt* bekövetkező népességszaporulat eltartásának fedezésére. Több mezőgazdasági területet kell megművelni az élelmiszer megtermelésére, több energia kell, új munkahelyeket kell nyitni a termelés növelésére, s az oktatás költségei is nagyot emelkednek.

Tényleges erőátviteli tényező $\qquad \text{T.E.A.T.} = \dfrac{\text{teher}}{\text{erő}} = \dfrac{F_k}{F_b}$ (6-32)

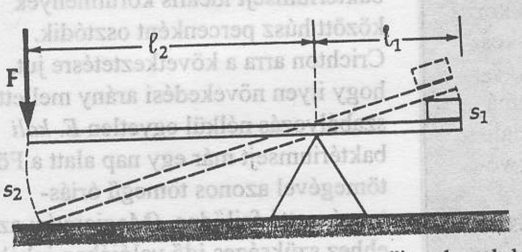
Ideális esetben, amikor a súrlódás elhanyagolható (és az egyszerű gép súlyától is eltekinthetünk), fennáll, hogy

$$\text{A befektetett munka} = \text{A végzett munka}$$

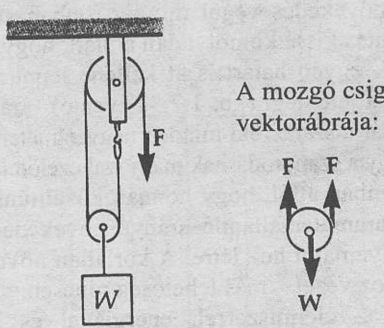
$$F_b x_b = F_k x_k$$

vagyis

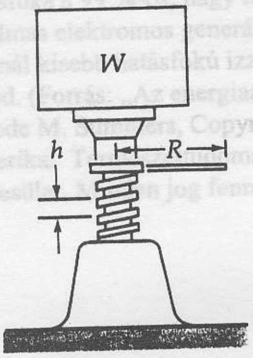
$$\frac{F_k}{F_b} = \frac{x_b}{x_k}$$



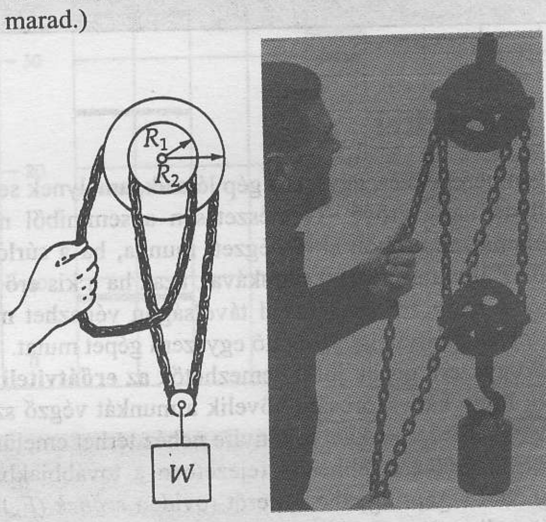
a.) Az emelő ideális erőátviteli tényezője a karok hosszának ℓ_1 / ℓ_2 arányával egyezik meg. Az összefüggést Archimedész fedezte fel az i.e. 2. században. Kijelentette : „ Adjatok egy szilárd pontot és kimozdítom a helyéről a Földet”.



b) A mozgó csiga vektorábrája mutatja, hogy az adott rendszer ideális erőátviteli tényezője 2. (Az állócsiga csak az erő irányán változtat, hogy könnyebb legyen az eszközt kezelni. Ha az állócsigát elhagyjuk és a bal oldali kötélszárat húzzuk, az erőátviteli tényező kettő marad.)



c) A csavaros emelő működtetésekor a csavar tengelyétől mérve R hosszúságú karon fejtünk ki vízszintes és a karra merőleges erőt. Egy teljes fordulattal a csavarra erősített teher a menetemelkedés h magasságával kerül feljebb. Az ideális erőátviteli tényező $2\pi RT / h$.



d) A differenciálcsiga két különböző R_1 és R_2 sugarú koncentrikusan összeerősített csigából és a képen látható módon rajtuk átvetett folytonos láncból áll. A csigákon lévő fogak nem engedik a láncot megcsúszni. Az egyik láncágat az ábrán látható módon lefelé húzva a W teher felemelkedik. Az eszköz ideális erőátviteli tényezője $2R_2 / (R_2 - R_1)$, a tényező igen nagy lehet, ha a sugarak $R_2 - R_1$ különbsége kicsi.

6-29 ábra

Egyszerű gépek egynél nagyobb erőátviteli tényezővel.

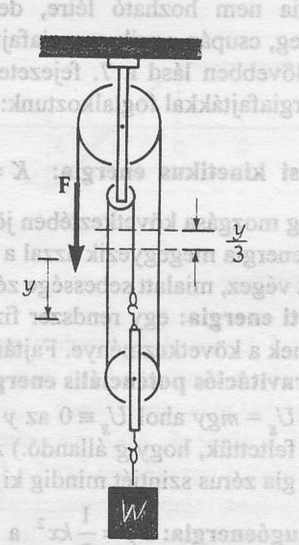
Az erő és a teher hatására létrejövő *elmozdulások* arányát **ideális erőátviteli tényezőnek** nevezzük.

Ideális erőátviteli tényező
$$\text{I.E.A.T.} = \frac{\text{Az erő hatására létrejövő elmozdulása}}{\text{A teher hatására létrejövő elmozdulása}} = \frac{x_b}{x_k} \qquad \text{(6-33)}$$

Általános esetben, (amikor a súrlódás nem hanyagolható el), az egyszerű gépek *η hatásfoka:*

$$\eta = \frac{\text{A végzett munka}}{\text{A befektetett munka}} = \frac{F_k x_k}{F_b x_b} = \frac{F_k / F_b}{x_b / x_k} = \frac{T.E.A.T.}{I.E.A.T.}$$

Az egyszerű gépek működésének tanulmányozásakor gyakran hasznos magának a gépnek a vektorábráját felrajzolni.



6-30 ábra
A 6-18 példához. Amikor az F erővel húzott kötél vége y távolsággal lejjebb kerül, akkor a mozgó csigát tartó kötelek mindegyike y/3-mal rövidül meg.

6-18 PÉLDA

Tekintsük a 6-30 ábrán látható álló és mozgó csigából álló rendszert. a) Határozzuk meg az ideális erőátviteli tényezőt! b) Ha egy $W = 100$ N-os terhet 40 N erővel tudunk felemelni, mekkora a tényleges erőátviteli tényező? c) Mekkora a rendszer hatásfoka?

MEGOLDÁS

a) Ha az F húzóerő y hatására a kötél vége y távolságnyira mozdul el lefelé, akkor minden kötéláğ $y/3$ hosszúsággal rövidül meg. Így

$$\text{I.E.A.T.} = \frac{\text{Az erő okozta elmozdulása}}{\text{A teher okozta elmozdulása}} = \frac{y}{y/3} = 3$$

b) A tényleges erőátviteli tényező:

$$\text{T.E.A.T.} = \frac{\text{A teher}}{\text{Az erő}} = \frac{100\ \text{N}}{40\ \text{N}} = 2{,}5$$

c) A hatásfok

$$\eta = \frac{\text{T.E.A.T.}}{\text{I.E.A.T.}} = \frac{2{,}5}{3} = 0{,}833 \text{ vagy } 83{,}3\ \%$$

Összefoglalás

A **munka** az energia egyik rendszerről a másikra történő átvitelének egyik alakja; amikor olyan erő hat, amelynek a mozgás irányába eső összetevője nem zérus. Az **F** *állandó* erő $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulás során végzett ΔW munkája definíció szerint

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r},$$
$$\Delta W = |\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta$$

ahol θ az erő-és az elmozdulás vektorok által bezárt szög. Derékszögű koordinátákban:

$$\Delta W = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

A *változó* erő munkáját a

$$W = \int \mathbf{F} d\mathbf{r}$$

$$\left[\begin{array}{c}\text{Ha az erő és az}\\ \text{elmozdulás iránya}\\ \text{azonos}\end{array}\right] \rightarrow W = \int F(x)dx$$

összefüggés adja meg. Grafikusan a munka az $F(x)$ görbe alatti területtel határozható meg, ahol a tengelyeken felmért mennyiségek mértékegységét is figyelembe kell venni.

Az **energia** jellegzetes tulajdonságát az *energia megmaradásának* elve fejezi ki. Ennek lényege az, hogy energia nem hozható létre, de nem is semmisíthető meg, csupán egyik energiafajta átalakítható a másikba. (Bővebben lásd a 7. fejezetet.) Eddig a következő energiafajtákkal foglalkoztunk:

Mozgási kinetikus energia: $K = \frac{1}{2}mv^2$, az m tömeg mozgása következtében jön létre. A mozgási energia megegyezik azzal a munkával, amit a test végez, mialatt sebessége zérusra csökken.

Helyzeti energia: egy rendszer fizikai elrendeződésének a következménye. Fajtái:

Gravitációs potenciális energia: $U_g = mgy$ ahol $U_g \equiv 0$ az $y = 0$ helyen. (Itt feltettük, hogy g állandó.) A helyzeti energia zérus szintjét mindig ki kell jelölnünk.

Rugóenergia: $U_r = \frac{1}{2}kx^2$ a *Hooke-törvénynek* ($F_r = -kx$) eleget tevő rugókra, ahol k a *rugóállandó* és x a rugó hosszának megváltozása a nyugalmi helyzetéhez képest akár nyújtás, akár összenyomás során.

Belső energia: $E_t = f_k x$. Gyakran **termikus energiának** is nevezzük és a mechanikai rendszerekben a súrlódási erő munkája nyomán keletkezik. Az atomok és molekulák véletlenszerű mozgásával kapcsolatos mozgási és helyzeti energia összege.

A **munkatétel** pontszerű test esetén tetszőleges típusú erőhatások mellett két egyenértékű alakban fogalmazható meg:

$$\begin{bmatrix}\text{A } \Sigma\mathbf{F} \text{ eredő erő munkája} \\ \text{a pontszerű testen}\end{bmatrix} \rightarrow \Delta W = \Delta K$$

Másként:

Adott $\mathbf{F}_k$ külső erő által a testen végzett munka (ez az erő különbözik azoktól, amelyek munkáját a jobb oldali energiatagokkal már figyelembe vettük)

$$\Delta W_k = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_r + \Delta U_t$$

A P **teljesítmény** a munka sebessége.

$$P = \frac{dW}{dt}$$

amit a

$$P = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

alakban is felírhatunk.

Az egyszerű gépek a következőképpen jellemezhetők:

Az η **hatásfokot** az

$$\eta = \frac{\text{A végzett munka}}{\text{A befektetett munka}} \quad \left(\begin{array}{c}\text{gyakran százalékos hatásfokot} \\ \text{adunk meg, ami} \\ \eta \cdot 100\ \%\end{array}\right)$$

aránnyal definiáljuk.

Az **tényleges erőátviteli tényező** definíció szerint:

$$\text{T.E.A.T.} = \frac{\text{A teher}}{\text{Az erő}}$$

Az **ideális erőátviteli tényező**:

$$\text{I.E.A.T.} = \frac{\text{Az erő okozta elmozdulás}}{\text{A teher okozta elmozdulás}}$$

Jegyezzük meg:

$$\eta = \frac{\text{T.E.A.T.}}{\text{I.E.A.T.}}$$

Kérdések

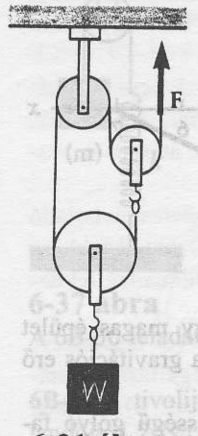
1. Mondjunk példát arra, hogy egy mozgó testre eredő erő hat egy adott időintervallumban és mégsincs munkavégzés!
2. Mondjunk legalább öt példát a lakószobánkban lezajló energiaátalakulási folyamatokra!
3. Egy fonal végére kötött golyó egyenletes sebességgel vízszintes körpályán mozog. Mekkora munkát végez egy fordulat alatt az eredő erő?
4. Milyen más, a fizikában használatostól eltérő jelentése van a teljesítmény szónak?
5. Mondjunk példát olyan rendszerre, amelynek van mozgási energiája, de nincs eredő impulzusa! Elképzelhető olyan rendszer, amely impulzussal rendelkezik, de mozgási energiával nem?
6. Gépkocsi prospektus alapján ellenőrizzük, hogy a gyártó összeillő súly-, gyorsulás- és teljesítményadatokat közölt-e.
7. Magas épület felső emeletéről a földszintre liftezve helyzeti energiánk csökken. Hová lesz ez az energia?
8. Csillagászati méretekben milyenek a Föld gravitációs terének ekvipotenciális felületei?
9. Egy erősen összenyomott rugót rögzítettünk ebben a helyzetében, majd savban feloldottunk. Hová lett a rugóban tárolt helyzeti energiája?
10. Két, egyenlő tömegű testet erős rugóval kötöttünk össze, majd a rendszert a padlóra tettük úgy, hogy az egyik test a másik felett legyen. Ezután a felső

testnél fogva összenyomtuk a rugót, majd hirtelen elengedtük. Lehetséges-e, hogy a felső test felrántja az alsót a padlóról? Mekkora eredő erő hatott a rendszerre? Végzett-e munkát az eredő erő (azaz volt-e elmozdulása)?

11. A 6-31 ábra egy rosszul működő csigasort mutat. Mi a hiba? Mi történne, ha a kötél szabad végét rögzítenénk?

12. Egy dobozból – ami egy egyszerű gépet rejt – két kötél lóg ki. Azt tapasztaljuk, hogy az A kötél végére akasztott 10 N súly a B kötélen 30 N terhet tud egyensúlyban tartani.Tegyük fel, hogy a súrlódás elhanyagolható. Mondjunk néhány lehetőséget arra, hogy mi lehet a dobozban!

13. Tegyük fel, hogy az előző feladatban az A kötélen végzett 20 J munka árán a gép 18 J munkát végez. Mekkora a hatásfok? Mekkora a gép erőátviteli tényezője?



6-31 ábra
A 11. kérdéshez

Feladatok

6.2 A munka

6A-1 Mekkora munka árán vihető fel 2 tonna tetőcserép a földszintről a 9 m magas tetőre?

6A-2 Egy fiú a vízszintessel 25°-os szöget bezáró kötéllel érdes, vízszintes talajon, egyenletes sebességgel húz egy ládát. Mekkora a kötélerő, ha a fiú 5 m-es úton 1,2 kJ munkát végzett?

6A-3 Egy szállítómunkás 27 kg-os burgonyazsákot vesz a vállára, vízszintes úton elviszi 40 m távolságba, majd a talaj felett 1 m magasan levő kiskocsi platójára teszi. Fizikai értelemben mennyi munkát végzett?

6A-4 Motorvonat mozdonya 8×10^4 N vízszintes erővel, állandó sebességgel 27 km távolságba húzza a szerelvényt. Mennyi munkát végez a mozdony?

6A-5 Egy kertész állandó sebességgel húzza fel a 7 m mély kútból a 14 kg-os vizesvödröt. Mennyi munkát végez?

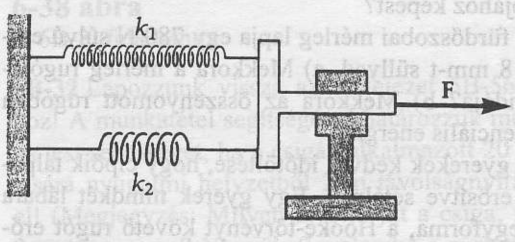
6B-6 Egy ember 30 kg-os dobozt emelt a földről 1,5 m magasba, állandó sebességgel. a) Mennyi munkát végzett az ember? b) Mennyi munkát végzett a gravitációs erő? c) Mennyi az ember és a gravitációs erő munkájának összege?

6.3 Változó erő munkája

6A-7 A Hooke-törvénynek megfelelően viselkedő rugó megfeszítéséhez szükséges erő 0-ról 50 N-ra nő, miközben a rugót nyugalmi állapotból 12 cm-rel kihúzzuk. a) Mekkora a rugóállandó? b) Mennyi munkát végeztünk a rugó megnyújtása során?

6B-8 Egy rugót nyugalmi állapotból 4 J munka árán 10 cm-rel nyújthatunk meg. Mekkora munkavégzés szükséges további 10 cm-rel való megnyújtásához, ha a Hooke-törvény mindvégig érvényben marad?

6B-9 A 6-32 ábra két különböző rugóállandójú, Hooke-törvény szerint viselkedő rugóból álló rendszert mutat. a) Bizonyítsuk be, hogy a rendszer egyetlen, $k_1 + k_2$ rugóállandójú rugóval helyettesíthető! b) A rendszerben tárolt teljes energia hányadrésze tárolódik a k_1 rugóállandójú rugóban?



6-32 ábra
A 6B-9 feladathoz

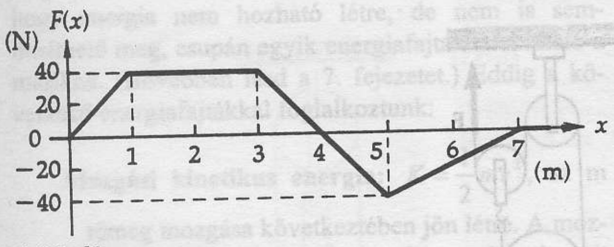
6B-10 Egy rugó által kifejtett erő a Hooke-törvény helyett az $F = -kx^3$ törvény szerint változik, ahol $k = 200$ N/m³. Mennyi munkát végzünk, míg 0,1 m-ről 0,3 m-re nyújtjuk?

6.4 A mozgási energia és a munkatétel

6A-11 Milyen magasságból kellene szabadon esnie egy gépkocsinak ahhoz, hogy ugyanakkora mozgási energiája legyen, mint amikor 100 km/ó sebességgel halad?

6A-12 Egy 15 g tömegű golyó a fegyver 72 cm hosszúságú csövében 780 m/s sebességre gyorsul fel. A munkatétel felhasználásával határozzuk meg a golyót gyorsító átlagos erőt!

6B-13 Egy 2 kg-os tömegpont a 6-33 ábrán látható helytől függő $F(x)$ erő hatására mozog. a) Mennyi munkát végez az erő, míg a test az $x = 0$ helyről $x = 2$ m-re jut? b) Mekkora munkát végez az erő az $x = 2$ m-től az $x = 6$ m-ig tartó szakaszon? A munkatétel segítségével határozzuk meg a test sebességét c) az $x = 2$ m pontban, d) az $x = 6$ m pontban!



6-33 ábra
A 6B-13 feladathoz

6B-14 Egy 1,5 kg-os tégla lezuhan egy magas épület tetejéről. Mekkora munkát végez rajta a gravitációs erő a mozgás első két másodpercében?

6B-15 Egy 5 g tömegű, 600 m/s sebességű golyó fatörzsbe csapódva 4 cm mélyen hatol a fába. a) Energetikai megfontolások alapján határozzuk meg a golyót lassító átlagos súrlódási erőt! b) Feltéve, hogy a súrlódási erő állandó, határozzuk meg, hogy mennyi idő telt el a golyónak a fába való behatolásába megállásáig!

6.5 A helyzeti energia

6A-16 Egy 4 kg tömegű csillár 50 cm hosszú láncon lóg a 3,6 m magas mennyezetről. Mekkora helyzeti energiája van a csillárnak a) a padlóhoz, b) az 1,2 m magas asztal lapjához képest?

6A-17 A fürdőszobai mérleg lapja egy 780 N súlyú ember alatt 8 mm-t süllyed. a) Mekkora a mérleg rugójának állandója? b) Mekkora az összenyomott rugóban tárolt potenciális energia?

6A-18 A gyerekek kedves időtöltése, hogy cipőik talpára rugót erősítve sétálnak. Egy gyerek mindkét lábára teljesen egyforma, a Hooke-törvényt követő rugót erősített. Egy lábon állva a rugó a nyugalmi hosszához képest 4 cm-rel nyomódik össze. Ha a gyerek ebből a helyzetből függőlegesen felugrik, és a felső holtponttól 20 cm-t esik, mielőtt a rugók érintkeznének. Mekkora lesz a rugók maximális összenyomódása, ha a fenti helyzetből a gyerek két lábával egyszerre esik vissza a talajra? (Útmutatás: A felső holtpontból leeső gyereken a gravitációs erő munkát végez. Hová lesz ez az energia?)

6.6 A termikus energia és a súrlódás

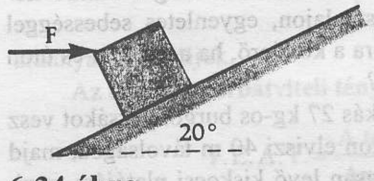
6A-19 Egy 40 kg-os gyerek 4 m függőleges szintkülönbségű vidám parki csúszdán csúszik le. Mennyi termikus energia fejlődött a súrlódás miatt, ha a gyerek 3 m/s sebességgel érkezik a csúszda végére?

6A-20 Egy 20 kg-os, vízszintes padlón fekvő dobozt $F = 80$ N vízszintes erővel 4 m távolságba húztunk el. A doboz és a padló között a csúszó súrlódási együttható 0,200. Mekkora munkát végzett a) az F erő, b) a dobozra ható csúszó súrlódási erő? c) Határozzuk meg a doboz mozgási energiáját a munkatétellel! d) Mekkora a doboz végsebessége?

6A-21 2 g tömegű papírvattacsomót 15 m/s sebességgel feldobunk. A vattacsomó 10 m magasságot ér el az elhajítás helye felett. Mennyi munkát végzett a légellenállás?

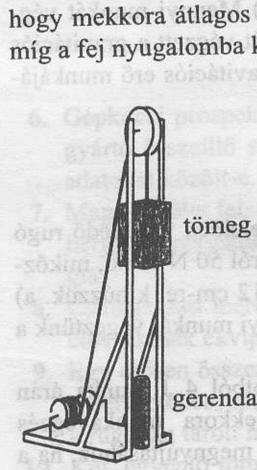
6B-22 Befagyott tavon egy gyerek a vízszintessel 30°-os szöget bezáró 50 N erővel húzza szánkón ülő játszótársát. A társ és a szánkó együttes tömege 30 kg, a jég és a szánkó közötti csúszó súrlódási együttható 0,l4. Energetikai megfontolások alapján határozzuk meg, hogy a) Mennyi munkát végzett a gyerek, míg a kezdetben álló szánkót 8 m távolságba húzta? b) Mennyi munkát végzett a szánkón a súrlódási erő? c) Mennyi a szánkó végső kinetikus energiája? d) Igazoljuk a munkatételt azzal, hogy megmutatjuk, hogy az erők munkájának összege megegyezik a mozgási energia megváltozásával!

6B-23 A 6-34 ábra szerint 2 kg-os testet vízszintes, 27 N nagyságú erővel tolunk fel egy 20°-os lejtőn. A csúszási súrlódási együttható a lejtő és a test között 0,180. a) Mekkora a test gyorsulása? b) Határozzuk meg a kinematikai egyenletek felhasználásával a nyugalomból induló test sebességét abban a pillanatban, amikor 3 m-t tett meg a lejtőn felfelé! c) Válaszoljunk a b) kérdésre a munkatétel alkalmazásával!



6-34 ábra
A 6B-23 feladathoz

6A-24 A 6-35 ábrán látható cölöpverő ütőfejének mozgó tömege 2100 kg. A cölöpverővel hosszú acélgerendát verünk a földbe úgy, hogy a fej 5 m magasról szabadon esik a gerendára, s ennek hatására a gerenda 12 cm-rel fúródik beljebb a földbe. A munkatétel átfogalmazott változatának felhasználásával határozzuk meg, hogy mekkora átlagos erővel hat a gerenda az ütőfejre, míg a fej nyugalomba kerül!



6-35 ábra
A 6A-24 feladathoz. Cölöpverő

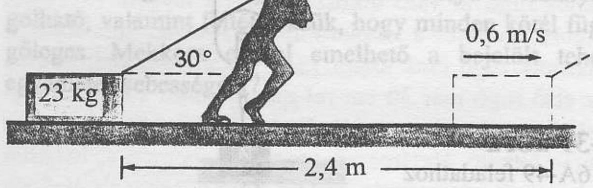
6.7 A munkatétel átfogalmazott változata

6A-25 Egy asszony 1300 J munka árán húz fel egy 12 kg-os vödröt a 10 m mély kútból. Mekkora mozgási energiával érkezik a vödör a felszínre?

6A-26 Nyugalomból indítva, állandó erővel 6 m hosszú, a vízszintessel 30°-os szöget bezáró, súrlódásmentes lejtőn 4 kg tömegű ládát húzunk fel. A lejtő tetejére érve a láda sebessége 2 m/s. a) Mekkora kinetikus energiához jutott a láda? b) Mekkora helyzeti energiát szerzett? c) Mekkora munkát végeztünk? d) Mekkora, a lejtővel párhuzamos erőt fejtettünk ki?

6A-27 200 N súlyú gyerek nyugalmi helyzetben lévő, 3 m-es kötelű hintán ül. A gyereket barátja úgy húzza oldalra, hogy a hinta kötele 36,0°-os szöget alkosson a függőlegessel. Határozzuk meg a munkatétel átfogalmazott alakjának felhasználásával, hogy mekkora munkára volt szükség ehhez!

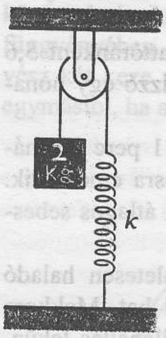
6B-28 A 6-36 ábrán látható ember nyugalomi helyzetből indulva 2,4 m távolságba húz el egy 23 kg-os ládát az érdes ($\mu_k \approx 0,5$) padlón. A láda végsebessége 0,6 m/s. A munkatétel átfogalmazott változatának alkalmazásával határozzuk meg, hogy mekkora állandó erőt fejtett ki az ember!



6-36 ábra
A 6B-28 feladathoz

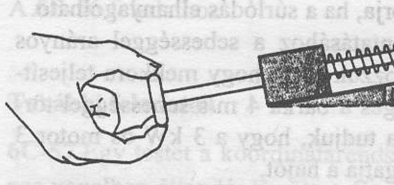
6B-29 Egy 50 kg-os láda lecsúszik egy, a vízszintessel 30°-os szöget bezáró lejtőn. a) Határozzuk meg a gravitációs erő munkáját, míg a láda 4 m-t csúszik le a lejtőn! b) Mennyi hő (termikus energia) fejlődik ezalatt, ha a láda 5 m/s sebességet ér el?

6B-30 A 6-37 ábra szerinti elrendezésben az $m = 2$ kg tömegű test zérus kezdősebességgel indul el úgy, hogy ekkor a rugó nyugalmi helyzetben van. A csiga és a rugó tömege elhanyagolható. A 2 kg-os test maximális függőleges elmozdulása 20 cm, ezután a mozgás iránya megfordul és a test a függőleges irányú rezgő mozgást végez. Legyen a felfelé irányított z tengely origója a test legmélyebb helyzetében. a) A munkatétel segítségével határozzuk meg a k rugóállandót! b) Mekkora maximális felfelé mutató eredő erő hat a testre mozgása során, és hol van abban a pillanatban a test? c) Mekkora maximális lefelé mutató eredő erő ébred és hol van ekkor a test? d) A test melyik helyzetében zérus a rá ható erők eredője?



6-37 ábra
A 6B-30 feladathoz

6B-31 A tivolijáték rugós kilövőszerkezetének rugóállandója 1,2 N/cm (6-38 ábra). A kilőtt labda a vízszintessel 10°-os szöget bezáró lejtőn mozog felfelé. Mekkora kezdősebességgel indul el a 100 g-os labda, ha a dugattyúval a rugót 5 cm-nyire nyomtuk össze? A súrlódás és a dugattyú tömege elhanyagolható.



6-38 ábra
A 6B-31 feladathoz

6B-32 Lapozzunk vissza az 5. fejezet 5B-56 feladatához! A munkatétel segítségével határozzuk meg a 3 kg-os test sebességét, ha a csigán alkalmazott 20 N erő hatására nyugalmi helyzetből 2 m távolságnyira mozdult el! (Megjegyzés: Milyen távolra jut a csiga, míg a test 2 m-t tesz meg? Vegyük figyelembe a súrlódás hatását is!)

6B-33 Egy motor tengelyéhez kötött kötél egy érdes lejtőn, a lejtővel párhuzamos 13 N erővel, állandó sebességgel 8 m magasra húz fel egy 3 kg tömegű testet. A test a mozgás során 3 m-rel kerül magasabbra. a) Mennyi munkát végez a kötél? b) Mennyi munkát végez a gravitációs erő? d) Mekkora súrlódási erő hat a testre?

6B-34 Tegyük fel, hogy az előző feladatban a súrlódás elhanyagolható. Mennyi lenne a nyugalomi helyzetből induló test sebessége a lejtő tetején? Oldjuk meg a feladatot kétféleképpen is: a) a Newton-törvények és a kine-matikai egyenletek felhasználásával, b) a munkatétellel!

6.9 A teljesítmény

6A-35 Egy 75 kg tömegű diák 2,6 s alatt rohan fel a 4 m magas emeletre. Mekkora az átlagteljesítménye?

6A-36 Egy vontatóhajó 3 m/s sebességgel húzza a fatörzsekből álló tutajt, és ennek során a vontatókötélben 10^4 N erő ébred. Milyen sebességgel végzi a vontatóhajó a munkát?

6B-37 Az elektromos energia ára kilowattóránként 5,6 Ft. Mennyibe kerül, ha egy 100 wattos izzó egy hónapon át (30 nap) folyamatosan ég?

6A-38 Egy 4×10^4 kg tömegű teherlift 1 perc 20 másodperc alatt függőlegesen 120 m magasra emelkedik. Mekkora a liftet tartó kábel munkájának átlagos sebessége?

6A-39 Egy 48 km/ó sebességgel egyenletesen haladó gépkocsira a légellenállás 900 N erővel hat. Mekkora teljesítménnyel dolgozik a motor a légellenállás leküzdésére?

6B-40 Egy 1500 kg tömegű gépkocsi 10 másodperc alatt fékez le 100 km/ó sebességről megállásig. Határozzuk meg a) a fék által végzett munkát! b) a fékek által kifejtett átlagos teljesítményt!

6B-41 Egy köteles sífelvonó 600 m hosszú, 30°-os lejtőn 3 m/s sebességgel maximum 120, átlagosan 80 kg tömegű személyt szállíthat. Határozzuk meg, hogy maximális terhelés esetén mekkora átlagos teljesítményt fejt ki a felvonó motorja, ha a súrlódás elhanyagolható.

6B-42 Egy bárka vontatásához a sebességgel arányos erő szükséges. Határozzuk meg, hogy mekkora teljesítményű motor szükséges a bárka 4 m/s sebességgel történő vontatásához, ha tudjuk, hogy a 3 kW-os motor 3 m/s sebességgel mozgatja a hajót.

6.10 A hatásfok

6A-43 Mekkora teljesítményű motorral emelhetünk egy 1200 kg-os felvonót 0,5 perc alatt 60 m magasba, ha a súrlódási veszteségek leküzdésére a motor teljesítményének 40 %-a használódik el?

6A-44 Határozzuk meg, hogy egy 45 %-os hatásfokú elektromos emelő motorral 2 kWh energia felhasználásával mekkora tömeget emelhetünk függőlegesen 3 m magasra!

6A-45 Határozzuk meg, hogy mekkora teljesítményt vesz fel az az elektromotor, amely 900 g tömegű terhet 0,6 perc alatt egyenletes sebességgel függőlegesen 140 m magasra emel! A súrlódási veszteség 20 %.

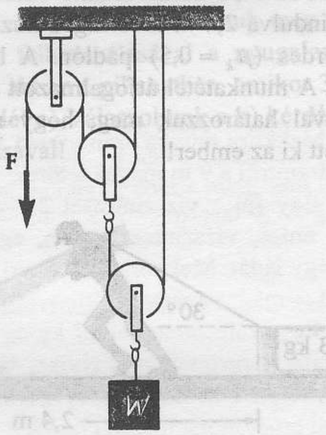
6B-46 Személygépkocsi motorjának hasznos teljesítménye 15% (azaz a fűtőanyag elégetéséből származó energiának 15%-a alakítható a jármű mozgási energiájává). a) Ha tudjuk, hogy 4,5 l benzin elégetésekor $1{,}34 \times 10^8$ J energia keletkezik, határozzuk meg, hogy mennyi benzin szükséges ahhoz, hogy a gépkocsit nyugalmi helyzetből 25 m/s sebességre gyorsítsuk! b) Hány ilyen gyorsításra futja 4,5 l benzinből? c) A kocsi ilyen sebesség mellett 100 kilométerenként 7,5 l benzint fogyaszt. Mekkora teljesítmény adódik át a kerekekre, hogy egyenletes sebesség mellett a légellenállás kiellensúlyozható legyen?

6B-47 Egy 450 kg tömegű versenyautó 400 m hosszú úton gyorsul fel 160 km/ó sebességre. Mekkora a motor átlagos teljesítménye ezen a szakaszon, ha a felvett energia 30 %-a használódik el a súrlódás és a légellenállás stb. leküzdésére?

6B-48 Az átlagos mosógépmotorok teljesítménye 350 watt. A napelemek 15%-os hatásfokkal alakítják elektromos energiává a sugárzási energiát. Határozzuk meg, hogy a napsugárzás irányára merőlegesen mekkora felületű napelemet kellene elhelyeznünk egy mosógép működtetéséhez! Az egy másodperc alatt a Föld légkörébe, a napsugárzás irányára merőleges 1 m^2 felületen belépő sugárzási energia 1370 watt. A légkörben való elnyelődés miatt ez az energia a tenger szintjéig (ahol a mosógépet is működtetjük) 840 wattra csökken.

6.11 Az egyszerű gépek

6A-49 Határozzuk meg a 6-39 ábrán látható ingasor ideális erőátviteli tényezőjét!



6-39 ábra
A 6A-49 feladathoz

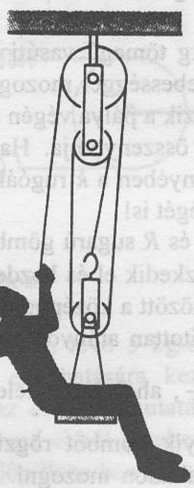
6A-50 Határozzuk meg a 6-29a ábrán látható emelő ideális erőátviteli tényezőjét! Tegyük fel, hogy az erők párhuzamosak az elmozdulásokkal!

6A-51 Tegyük fel, hogy a 6-17 ábrán látható csigasorral egy kátyuba ragadt gépkocsit húzunk ki. Rögzítési pontgyanánt egy közeli fa szolgál. A rendszeren futó kötél melyik végét kell fához kötni; az egyetlen csigához, vagy a kettős csigához csatlakozót? Miért?

6A-52 Határozzuk meg a 6-29c ábrán látható csavaros prés erőátviteli tényezőjét!

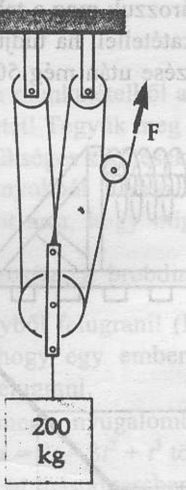
6A-53 Határozzuk meg, hogy a 6-29c ábrán látható csavaros préssel mekkora terhet emelhetünk fel 80 N erővel, ha a kar 40 cm hosszú és a csavar menetemelkedése 8 mm! Az eszköz hatásfoka 70%.

6B-54 A 6-40 ábrán látható módon egy 20 kg-os mozgatható ülőkén elhelyezkedő 86 kg-os ember csigasor segítségével emeli magát. a) Milyen hosszú kötélen kapaszkodik végig, amig 2 m-rel magasabbra húzza fel magát? b) Mekkora erővel mozgathatja magát egyenletes sebességgel felfelé, ha a súrlódás elhanyagolható? c) Határozzuk meg, hogy mekkora munkát végez, míg 2 m magasra emeli magát, ha a súrlódás elhanyagolható. A munkavégzést az ember által kifejtett erő és a lehúzott kötél hosszának szorzatával határozzuk meg. Határozzuk meg az ember és az ülőke helyzeti energiájának növekedéséből is! d) Amennyiben a súrlódás miatt az embernek 330 N erővel kell húznia a kötelet, hogy egyenletesen mozogjon felfelé, mennyi a rendszer hatásfoka? e) Mekkora a tényleges erőátviteli tényező?



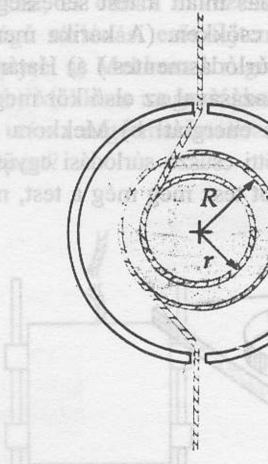
6-40 ábra
A 6B-54 feladathoz

6B-55 A 6-41 ábrán látható csigás rendszer súrlódás nélkül mozog és a csigák és kötelek súlya is elhanyagolható, valamint feltételezzük, hogy minden kötél függőleges. Mekkora erővel emelhető a bejelölt teher egyenletes sebességgel?



6-41 ábra
A 6B-55 feladathoz

6B-56 Csodálatos bűvészmutatvány, amikor egy függőleges kötélen látszólag a bűvész tekintetének hatására – egy gömb fel-le vándorol. A kötél kívülről nézve egyszerűen át van fűzve a gömbön, s a bűvész egyik kezével felső, másikkal alsó végét fogja. Valójában azonban a gömb belsejében a kötél két, kissé eltérő sugarú, koncentrikusan egymáshoz rögzített csigán van átvezetve a 6-42 ábrának megfelelően. Ha a kötelet megfeszítjük, a gömb felfelé, ha kissé elernyesztjük, lefelé mozog. Határozzuk meg a gömb D emelkedését a bűvész két keze között d távolságnak és a csigák R és r sugarának a függvényében. Az eredmény megmutatja, hogy a bűvész két keze még akkor is csak kevéssé távolodik, el egymástól, ha a gömb elmozdulása viszonylag nagy.



6-42 ábra
A 6B-56 feladathoz

További feladatok

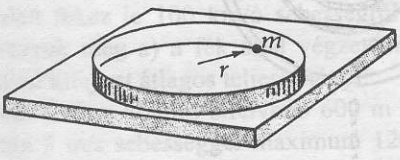
6C-57 Egy testet a koordinátarendszer origójából egyenes vonalban állandó $\mathbf{F} = 2\hat{x} + 4\hat{y}$ erővel az $r = \hat{x} + 5\hat{y}$ helyre viszünk. (Az egyenes vonalú mozgás fenntartásához természetesen egyéb kényszererők is fellépnek.) Határozzuk meg az **F** erő munkáját. a) közvetlenül az $\mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$ skaláris szorzattal, b) az $|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\vartheta$ szorzattal!

6C-58 Egy fiú a 3 kg tömegű, 2 m hosszúságú hajlékony láncot egyik végénél fogva úgy tartja, hogy másik vége éppen leér a földre. a) Határozzuk meg, hogyan változik a gyerek által kifejtett erő, ha a láncot egyenletes sebességgel s távolsággal lejjebb ereszti! b) Az $\int \mathbf{F}ds$ összefüggés felhasználásával számítsuk ki azt a munkát, amit a gyerek végez, míg a teljes láncot a földre ereszti!

6C-59 Egy súrlódásmentes félhenger aljáról a tetejére húzunk fel egy m tömegű testet a henger tetején átvetett kötél segítségével (6-43 ábra). a) Határozzuk meg a kötélerőt a hely függvényében! b) A $W = \int \mathbf{F}ds$ integrál segítségével határozzuk meg azt a munkát, ami a testnek a henger aljáról a tetejéig való egyenletes sebességű felhúzásához szükséges! A henger sugara R.

6-43 ábra
A 6C-59 feladathoz

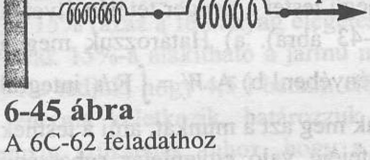
6C-60 Fémszalagból r sugarú keskeny karikát készítünk és a 6-44 ábrán látható módon érdes, vízszintes felületre erősítjük. Ezután egy m tömegű, pontszerű testet lökünk be a karikába v_0 kezdősebességgel úgy, hogy a belső oldalhoz szorulva folyamatosan körbe járjon. A vízszintes síkkal való súrlódás miatt a test sebessége egy teljes kör után 0,8 v_0-ra csökken. (A karika mentén a pontszerű test mozgása súrlódásmentes.) a) Határozzuk meg a munkatétel alkalmazásával az első kör megtétele során keletkező termikus energiát! b) Mekkora a vízszintes lap és a test közötti csúszó súrlódási együttható? c) Hány további fordulatot tesz meg még a test, mielőtt megáll?



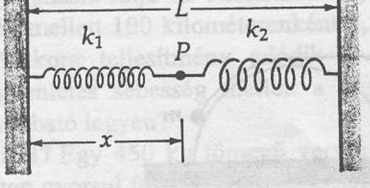
6-44 ábra
A 6C-60 feladathoz

6C-61 Térjünk vissza a 6A-27 feladathoz. Tegyük fel, hogy a játszótárs mindig a hinta mozgásának irányába mutató érintő menti erőt fejt ki. a) Határozzuk meg azt az $F(\theta)$ erőt a kötél függőlegessel bezárt θ szögének függvényében, ami ahhoz szükséges, hogy a hintát eddig a helyzetig húzva egyensúlyi helyzetben tartsuk! b) Közvetlenül az integrál kiszámításával mutassuk meg, hogy a hintának a 0°-os helyzetből a θ kitérésű helyzetig való egyenletes sebességű elmozdításához éppen a helyzeti energia mgh növekedésével egyenlő munkát kell végeznie!

6C-62 Két, Hooke-törvény szerint viselkedő k_1 és k_2 rugóállandójú rugót a 6-45 ábra szerint egymás után kötöttünk. a) Mutassuk meg, hogy a rendszer egyetlen $k_1 k_2/(k_1 + k_2)$ rugóállandójú rugóval helyettesíthető! b) A teljes rugóenergiának hányad részét tárolja a k_1 állandójú rugó?



6-45 ábra
A 6C-62 feladathoz



6-46 ábra
A 6C-63 feladathoz

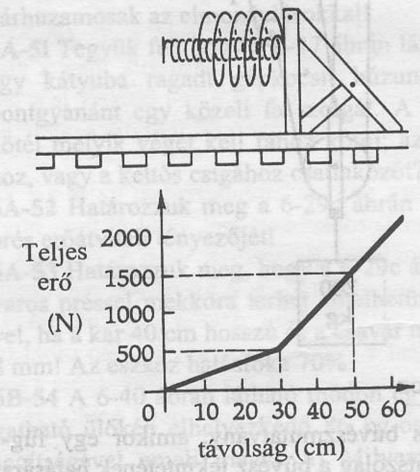
6C-63 Két különböző k_1 és k_2 rugóállandójú Hooke-rugót összeerősítettünk és L távolságra nyújtottunk (6-46 ábra). A rugók nyugalmi hossza rendre l_1 és l_2 és $L > (l_1 + l_2)$. Határozzuk meg a rugók P csatlakozási pontjának x egyensúlyi helyzetét!

6C-64 Egy l hosszúságú, k rugóállandójú rugót két, l_1 és l_2 hosszúságú darabra vágtunk, ahol $l_1 = nl_2$ és n egész szám. Adjuk meg a rugódarabok k_1 és k_2 rugóállandóját n és k függvényében!

6C-65 Egy 2×10^4 kg tömegű vasúti pőrekocsi súrlódásmentesen 2 m/s sebességgel mozog a vízszintes sínen. A kocsi beleütközik a pálya végén rögzített ütközőrugóba és 0,5 m-rel összenyomja. Határozzuk meg a rugó $F = kx^2$ erőtörvényében a k rugóállandó nagyságát beleértve mértékegységét is!

6C-66 Két m tömegű és R sugarú gömb egymástól $D > 2R$ távolságban helyezkedik el és kezdetben nyugalomban van. A gömbök között a középpontjaik x távolságának négyzetével fordítottan arányos gravitációs vonzóerő hat, azaz $F = \dfrac{k}{x^2}$, ahol k megfelelő egységekben mért állandó. Az egyik gömböt rögzítjük, a másikat azonban engedjük szabadon mozogni. Mekkora sebességgel ütközik a mozgó gömb a nyugvóba?

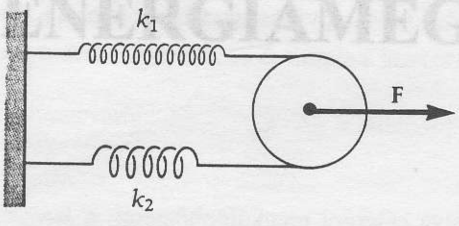
6C-67 Egy 6000 kg-os tehervagon elhanyagolható súrlódású sínpályán mozog. A kocsi a 6-47 ábrán látható kettős rugóval való ütközés hatására megáll. (Mindkét rugóra érvényes a Hooke-törvény.) Az ütközés során a második rugó csak akkor kezd összenyomódni, miután az első rugó már 30 cm-rel megrövidült, s ennek megfelelően változik, a rugók által kifejtett erő amint ez az ábrán látható. Határozzuk meg a tehervagon v_0 haladási sebességét a munkatétellel, ha tudjuk, hogy az első rugóval való érintkezése után még 50 cm utat tett meg a vagon.



6-47 ábra
A 6C-67 feladathoz

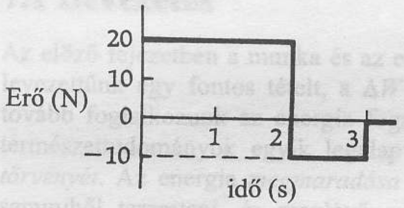
6C-68 Határozzuk meg, hogy mekkora az előző feladatban szereplő második rugó rugóállandója!

6C-69 Két Hooke-féle rugót a 6-48 ábrán látható módon csigán átvetett kötél végeihez erősítettünk. Mutassuk meg, hogy a rendszer a csiga tengelyén fellépő erővel szemben egyetlen $\frac{4k_1k_2}{k_1+k_2}$ rugóállandójú rugóként viselkedik! b) Mutassuk meg, hogy a csiga tengelyének elmozdulása a rugók x_1 és x_2 megnyúlásának átlagával egyenlő! c) A rugalmas energia hányad része tárolódik a k_1 rugóállandójú rugóban?



6-48 ábra
A 6C-69 feladathoz

6C-70 Nyugalomban lévő 5 kg-os tömeg a 6-49 ábra szerint változó erő hatására kezd mozogni. Mennyi munkát végez az erő? (Útmutatás: Határozzuk meg a gyorsulás-idő, majd ebből a sebesség-idő függvényt és innen a $t = 3$ s időpillanatban elért sebességet!)



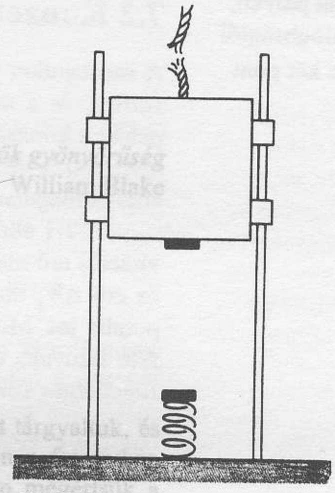
6-49 ábra
A 6C-70 feladathoz

6C-71 Vezessük le a munkatételből a $v^2 = v_0^2 + 2a(s-s_0)$ kinematikai egyenletet! Tegyük meg közben a levezetés érvényességéhez szükséges kikötéseket!

6C-72 A méretarányokból adódó következtetésekkel adjunk magyarázatot arra, hogy míg a lilliputiak testmagasságuk hatszorosára, a brobdingnagiak csak $\frac{1}{24}$ részére képesek helyből felugrani! (Lásd 141. old.) Induljunk ki abból, hogy egy ember testmagasságának mintegy felére tud felugrani.

6C-73 Egy 4 kg tömegű, nyugalomban lévő testet a rá ható változó erő az $x = 2t - 3t^2 + t^3$ törvény szerint mozgat. (x-et méterben, t-t másodpercben mérjük.) Határozzuk meg, hogy mekkora munkát végez ez az erő a mozgás első három másodpercében! (Útmutatás: Hogyan változik a sebesség az időben?)

6C-74 Egy 2000 kg tömegű, 2 m/s sebességgel egyenletesen süllyedő felvonó tartókábele hirtelen elszakad (6-50 ábra), amikor a felvonószekrény éppen 20 m-rel van a $2{,}5 \times 10^5$ N/m rugóállandójú biztonsági rugó felett. A kötél elszakadásának időpontjában bekapcsolódnak a vészfékek, és emiatt a vezető sínek 18000 N állandó nagyságú súrlódási erőt fejtenek ki a mozgó felvonószekrényre. a) Mekkora a rugó maximális összenyomódása? b) Mekkora magasságba ugrik vissza a lift az ütközés után a rugó maximálisan összenyomott helyzetéhez képest?



6-50 ábra
A 6C-74 feladathoz

6C-75 Egy m tömegű test a gravitációs erő hatására szabadon esik. Mutassuk meg, hogy h távolság megtétele alatt a gravitációs erő átlagos teljesítménye $P_{átl} = m\sqrt{g^3h/2}$!

6C-76 A 15 m/s állandó sebességű, 1500 kg-os gépkocsi motorja a súrlódás és a légellenállás leküzdésére 15 kW teljesítménnyel dolgozik. a) Mekkora az átlagos ellenállóerő (súrlódás és légellenállás együtt)? b) Mekkora átlagos teljesítményt kellene leadnia a motornak ahhoz, hogy a gépkocsi ugyanezzel a sebességgel 8%-os (8 m függőleges emelkedés 100 méterenként) emelkedőn mozogjon felfelé?

6C-77 A méretarányokra vonatkozó gondolatmenettel mutassuk meg, hogy egyetlen lilliputi 24 társát képes felemelni, ezzel szemben egy brobdingnagi felemeléséhez 6 másiknak kell együttműködni. Induljunk ki abból, hogy egy ember saját súlyának kb. kétszeresét bírja el.

6C-78 Határozzuk meg a 6-29d ábrán látható differenciálcsiga ideális erőátviteli tényezőjét!

4A-5 126 m/s
4A-7 $2{,}72 \times 10^{-1}$ m/s^2
4A-9 4,43 m/s
4A-11 a) 87,0 m/s^2 b) 8,88g
4B-13 a) $7{,}90 \times 10^5$ m/s^2 b) $5{,}58 \times 10^5$ m/s^2
4B-15 a) 18,3 m/s b) $6{,}85 \times 10^4$g
4B-17 0,821 m/s^2;62,4°
4B-19 a) 1,25 m/s^2 az út görbületi középpontja felé
b) −1,67 m/s^2
c) 1,85 m/s^2;64,4° a radiális irányhoz képest hátrafelé
4B-21 a) 2,37 m/s^2 b) 4,96 m/s^2
4C-23 A válasz adott.
4C-25 0,851 m/s^2 b) 5,34 m/s^2
c) 5,41 m/s^2;9,04° a radiális irányhoz képest hátrafelé
4C-27 54,4 m/s^2

V. Fejezet

5A-1 a) 720 N b) 72 kg c) 200 N
d) 20 kg e) 720 N f) 200 N
5A-3 282 kg
5A-5 a) 4,00 m/s^2 b) 8,00 m
5A-7 a) 90 N b) 3 s
5A-9 a) 31,25 m b) 12,5 m/s
5A-11 14,8°
5A-13 1,63 m/s^2
5B-15 a) 26,53 N b) 53,1°a horizont alatt
c) egyenes vonalban
5B-17 b) 359 N
5B-19 a) 0,102 s b) 0,0255 m
5B-21 a) 6 m/s^2 b) 8100 N c) 5400 N
5A-23 a) 170 N b) 170 N
5A-25 1350 N
5A-27 6,39 N
5A-29 a) 0,300 m/s^2 b) 0,900 N
5B-31 $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\theta}{g}}$
5B-33 a) 2,05 kg b) 16,0 N
5B-35 a) 3,33 m/s^2 b) 24 N c) 0,55 m/s
5B-37 a) 4,90 m/s^2 b) 1,96 m/s^2
5B-39 4,70 kg
5A-41 a) 8,40 N b) 15,7 N
5A-43 7,00 s
5A-45 0,364
5A-47 0,732
5B-49 28,7 m
5B-51 35,25 N
5B-53 a) 0,204 b) 90,8 N
5B-55 20113 N
5B-57 b) gR/v^2
5B-59 A válasz adott.
5B-61 31,4 N
5B-63 a) 600 N b) 1100 N
5C-65 a) 4,92 N b) 16,7 N
5C-67 0,143 m
5C-69 A válasz adott.
5C-71 a) 1984 N b) 12,43° c) 1448 N
5C-73 A válasz adott.
5C-75 0,209 fordulat/s

VI. Fejezet

6A-1 $1{,}8 \times 10^5$ joule
6A-3 270 joule
6A-5 960 J
6A-7 a) 417 N/m b) 3,00 J
6B-9 b) $k_1/(k_1 + k_2)$
6A-11 38,5 m
6B-13 a) 60 J b) 10 J c) 7,75 m/s d) 3,16 m/s
6B-15 a) $2{,}25 \times 10^4$ N b) $1{,}33 \times 10^{-4}$ s
6A-17 a) $9{,}75 \times 10^4$ N/m b) 3,12 J
6A-19 1390 J
6A-21 0,029 J
6B-23 a) 6,86 m/s^2 b) 6,41 m/s
6A-25 124 J
6A-27 115 J
6B-29 a) 980 J b) 355 J
6B-31 1,68 m/s
6B-33 a) 104 J b) 88,2 J c) 15,8 J d) 1,98 N
6A-35 1,154 kW
6B-37 403,2 Ft
6A-39 12 kW
6B-41 141 kW
6A-43 39,2 kW
6A-45 42,92 kW
6B-47 35,26 kW
6A-49 4
6A-51 egyetlen csiga
6B-53 $1{,}76 \times 10^4$ N
6B-55 280 N
6C-57 22,0 J
6C-59 a) $mg\cos\left(\dfrac{s}{R}\right)$ b) mgR
6C-61 A válasz adott.
6C-63 $\dfrac{k_1 l_1 + k_2(L - l_2)}{k_1 + k_2}$
6C-65 $9{,}6 \times 10^5$ N/m^2
6C-67 0,303 m/s
6C-69 c) $k_2/(k_1 + k_2)$
6C-71 A válasz adott.
6C-73 242 J
6C-75 A válasz adott.

VII. Fejezet

7A-1 a) N·m^3 b) 2C/r^3
7A-3 a) $-3ax^2 + 2bx$ b) $x = b/3a$