Kály-Kullai Kristóf (kakukri@eik.bme.hu)

Fizika 1 Elektrodinamika

„Csak menjek át valahogy!” – Rövidített jegyzet

1. Maxwell-egyenletek, elektrodinamika felosztása

A Maxwell-egyenletek

A Maxwell-egyenletek lokális (differenciális) alakja:

$$\mathbf{rot}\,\vec{H}=\vec{j}+\dot{\vec{D}}$$
$$\mathbf{rot}\,\vec{E}=-\dot{\vec{B}}$$
$$div\,\vec{B}=0$$
$$div\,\vec{D}=\rho$$

A Maxwell-egyenletek globális (integrális) alakja:

$$\oint_G \vec{H}\cdot\vec{dr}=\int_A \vec{j}\cdot\vec{dA}+\int_A \dot{\vec{D}}\cdot\vec{dA}$$
$$\oint_G \vec{E}\cdot\vec{dr}=-\frac{d}{dt}\int_A \vec{B}\cdot\vec{dA}$$
$$\oint_A \vec{B}\cdot\vec{dA}=0$$
$$\oint_A \vec{D}\cdot\vec{dA}=\int_V \rho\, dV$$

A változók jelentése:

$\vec{E}$: elektromos térerősség,

$\vec{H}$: mágneses térerősség,

$\vec{D}$: elektromos megosztás (elektromos indukció)

$\vec{B}$: mágneses indukció,

ρ : elektromos töltéssűrűség,

$\vec{j}$: elektromos áramsűrűség.

A Maxwell-egyenletek jelentése szavakkal:

1. Az elektromos áram és az elektromos megosztás változása örvényes mágneses teret kelt.
2. A mágneses indukció fluxusának változása örvényes elektromos teret kelt.
3. A mágneses indukció terének nincs forrása. (Alternatív megfogalmazás: Nincs mágneses monopólus).
4. Az elektromos indukció terének forrása az elektromos töltés.

Az elektrodinamika felosztása

Az elektrodinamika fejezetekre osztásának alapja, hogy mikor milyen egyszerűsítésekkel, elhanyagolásokkal élhetünk. Bizonyos esetekben elhanyagolhatjuk az elektromos áramot és/vagy az elektromágneses terek időbeli változását. Ezeket 3 változóval jellemezhetjük: $\vec{j}$, $\dot{\vec{B}}$ és $\dot{\vec{D}}$, ezek nulla vagy nem nulla léte alapján osztunk fejezetekre.

Ezek alapján 4 fejezet van:

- Sztatika: $\vec{j}=0,\ \dot{\vec{B}}=\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=0,\ \dot{\vec{D}}=\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}=0$, pl.: elektrosztatika, magnetosztatika.
- Stacionárius terek: $\vec{j}\neq 0,\ \dot{\vec{B}}=\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=0,\ \dot{\vec{D}}=\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}=0$, pl.: egyenáramok.
- Kvázistacionárius terek: $\vec{j}\neq 0,\ \dot{\vec{B}}=\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\neq 0,\ \dot{\vec{D}}=\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}=0$, pl.: váltóáramok.
- Gyorsan változó terek: $\vec{j}\neq 0,\ \dot{\vec{B}}=\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\neq 0,\ \dot{\vec{D}}=\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\neq 0$, azaz nincs egyszerűsítés, pl.: elektromágneses hullámok.

Tudni kell még: Maxwell egyenletek alakjai az egyes fejezetekben, vagyis az egyszerűsítő feltevéseket be kell írni a Maxwell-egyenletekbe.

Sztatika esetén lokális alakban: $\begin{array}{l} \textbf{\textit{rot}}\,\vec{H}=0 \\ \textbf{\textit{rot}}\,\vec{E}=0 \\ div\,\vec{B}=0 \\ div\,\vec{D}=\rho \end{array}$, és globális alakban: $\begin{array}{l} \oint_G \vec{H}\cdot\vec{dr}=0 \\ \oint_G \vec{E}\cdot\vec{dr}=0 \\ \oint_A \vec{B}\cdot\vec{dA}=0 \\ \oint_A \vec{D}\cdot\vec{dA}=\int_V \rho\, dV \end{array}$.

Stacionárius terek, lokális alakban: $\begin{array}{l} \textbf{\textit{rot}}\,\vec{H}=\vec{j} \\ \textbf{\textit{rot}}\,\vec{E}=0 \\ div\,\vec{B}=0 \\ div\,\vec{D}=\rho \end{array}$, globális alakban: $\begin{array}{l} \oint_G \vec{H}\cdot\vec{dr}=\int_A \vec{j}\cdot\vec{dA} \\ \oint_G \vec{E}\cdot\vec{dr}=0 \\ \oint_A \vec{B}\cdot\vec{dA}=0 \\ \oint_A \vec{D}\cdot\vec{dA}=\int_V \rho\, dV \end{array}$.

Kvázistacionárius terek, lokális alakban: $\begin{array}{l} \textbf{\textit{rot}}\,\vec{H}=\vec{j} \\ \textbf{\textit{rot}}\,\vec{E}=-\dot{\vec{B}} \\ div\,\vec{B}=0 \\ div\,\vec{D}=\rho \end{array}$, globális alakban: $\begin{array}{l} \oint_G \vec{H}\cdot\vec{dr}=\int_A \vec{j}\cdot\vec{dA} \\ \oint_G \vec{E}\cdot\vec{dr}=-\frac{d}{dt}\int_A \vec{B}\cdot\vec{dA} \\ \oint_A \vec{B}\cdot\vec{dA}=0 \\ \oint_A \vec{D}\cdot\vec{dA}=\int_V \rho\, dV \end{array}$.

Gyorsan változó terek esetén lásd fent.

2. Elektrosztatika

2.1. Elektrosztatika 1. alaptörvénye, vektorvonalak, fluxus

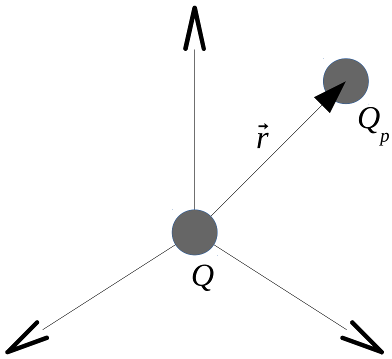
Elektrosztatikus alapjelenség

Vezetővel: Cérnára függesztett alumínium darabkához megdörzsölt üvegrúddal közelítve az alumínium odaugrik az üvegrúdhoz, majd szinte azonnal elpattan. Oka: a vezetőben a megdörzsölt és feltöltött üvegrúd **elektromos megosztást** idéz elő, emiatt vonzóerő lép fel. Az üvegrúdhoz érve a vezető gyorsan átvesz töltést, így a két ugyanúgy feltöltött objektum (alumínium, üvegrúd) taszítja egymást.

Szigetelővel: Cérnára függesztett vattadarabhoz megdörzsölt üvegrúddal közelítve a vattadarab odaugrik az üvegrúdhoz, majd hosszú ideig hozzá tapadva marad. Oka: a szigetelő vattában a feltöltött üvegrúd **polarizációt** idéz elő, emiatt vonzóerő lép fel. A szigetelő az üvegrúdtól csak lassan vesz át töltéseket, emiatt csak sokára lép fel a taszítóerő.

Coulomb-törvény

$$\vec{F}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q Q_p}{r^2}\vec{e}_r \quad ,$$



ahol az origóban helyezkedik el a Q töltés, az $\vec{r}$ pontban a Q_p töltés.

$\vec{F}_p$: a Q töltés által a Q_p töltésre kifejtett erő,

ϵ_0 : a vákuum permittivitása.

Elektromos térerősség

Definíciója: az egységnyi töltésre ható elektromos erő, azaz $\vec{E} = \frac{\vec{F}_p}{Q_p}$.

Mértékegysége: N/C = V/m (Newton/Coulomb = Volt/méter).

Mérése: A mérés alapelve az elektromos térerősség definíciója, azaz $\vec{E} = \frac{\vec{F}_p}{Q_p}$.

Mérés menete: a tér egy $\vec{r}$ pontjába helyezünk egy Q_p próbatöltést, majd mérjük az erre ható $\vec{F}_p$ erőt (nagyságát és irányát), például rugós erőmérővel. Ezekből:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_p(\vec{r})}{Q_p} \quad .$$

Ponttöltés elektromos tere: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r$.

Fluxus, skalártér, vektortér

Skalártér: a tér minden egyes pontjához egy skalármennyiséget rendel, például a hőmérséklettér $T(\vec{r})$, vagy az elektromos potenciál $\varphi(\vec{r})$. Szemléltetése: szintfelületekkel (szintvonalakkal 2D esetben), azaz azokkal a felületekkel, amelyek mentén a skalár értéke állandó (pl. az izotermák vagy az ekvipotenciális felületek).

Vektortér: a tér minden egyes pontjához egy vektormennyiséget rendel, például az áramlási sebesség $\vec{v}(\vec{r})$, vagy az elektromos térerősség $\vec{E}(\vec{r})$. Szemléltetése: vektorvonalakkal.

Vektorvonalak: irányított görbék. Érintőjük megadja a vektortér adott pontbeli irányát, sűrűségük pedig a nagyságát.

Fluxus: a vektortér egy *A* felületre vett fluxusa: $\Phi_v=\int_A \vec{v}\cdot\vec{dA}$, megadja az adott felületen átmenő vektorvonalak számát.

Az elektrosztatika 1. alaptörvénye

Lokális alakban: $div\,\vec{D}=\rho$, globális alakban: $\oint_A \vec{D}\cdot\vec{dA}=Q$,

ahol: $\vec{D}$: elektromos megosztás, ρ : elektromos töltéssűrűség, Q : a zárt A felületen belül levő összes töltés mennyisége.

Szavakkal megfogalmazva: az elektromos tér erővonalai csak elektromos töltésből indulhatnak ki és csak abban végződhetnek.

Levezetése: a ponttöltés elektromos térerősségének fluxusát kell kiszámolni egy, a ponttöltést körbevevő gömbre.

2.2. Elektromos megosztás, feszültség, potenciál, elektrosztatika 2. alaptörvénye

Elektromos megosztás jelensége

Az elektromos vezetőben töltéshordozók vannak. Ezek kis elektromos tér hatására könnyen elmozduló töltések. Külső elektromos tér hatására elmozdulnak, a vezető egyik része pozitív, másik része negatív lesz. Az átrendeződés addig tart, amíg a vezetőben kialakult töltésmegosztás tere kompenzálja a külső elektromos teret.

Az elektromos megosztás (D tér) mérése

Két, szigetelő nyéllel ellátott sík vezetővel („palacsintasütővel”) mérjük. A mérés menete:

1.) A két vezetőt összeérintve behelyezzük a térbe.

2.) A térben szétválasztjuk őket.

3.) Szétválasztva kivesszük a térből.

4.) Mérjük a vezetőkön maradó töltés Q abszolút értékét.

Irány meghatározása: ezeket ismételjük több irányban, amikor Q maximális, akkor a tér merőleges a vezető felületekre.

A megosztás terének nagysága: $|\vec{D}|=\frac{Q_{max}}{A}$, ahol A a palacsintasütők területe.

A tér iránya: a maximális töltés esetén a sík vezetőkre merőlegesen, a negatív vezetőtől a pozitív vezető felé.

Az elektromos feszültség

Az elektromos erőtér által egységnyi töltésen végzett munka egy adott görbe mentén. Kiszámolása: $U_{AB}=\frac{W_{AB}}{Q_p}=\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dr}$, ahol U_{AB} : az *A* és *B* pontok közötti feszültség, W_{AB} : az A és B pontok között az elektromos tér által a Q_p próbatöltésen végzett munka, $\vec{E}$: az elektromos térerősség. Értéke általában függ az A és B pontokat összekötő úttól is, de speciálisan ponttöltés elektromos erőterében csak a görbe végpontjaitól, emiatt elektrosztatikában is független az úttól.

Az elektrosztatika 2. alaptörvénye

Lokális alakban: $rot\,\vec{E}=0$, globális alakban: $\oint_G \vec{E}\cdot\vec{dr}=0$; ahol $\vec{E}$ az elektromos térerősség.

Szavakban kétféle, egymással ekvivalens módon megfogalmazható:

- Elektrosztatikában a feszültség független az úttól, vagyis az elektromos erőtér konzervatív.
- Sztatikában az elektromos erőtér örvénymentes.

Az elektromos potenciál

A töltésegységre eső potenciális energia. Kiszámolása: $\varphi(A)=\frac{E_{pot}}{Q}=-\int_{P_0}^{A} \vec{E}\cdot\vec{dr}$, ahol P_0 egy referenciapont ($\varphi(P_0)=0$), elektrosztatikában ezt általában a végtelenbe választjuk.

Az elektromos feszültség a potenciálkülönbség ellentettje: $U_{AB}=-\Delta\varphi=\varphi(A)-\varphi(B)$.

Az elektromos térerősség a potenciáltér negatív gradiense: $\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi$.

Ponttöltés potenciáltere: $\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q}{r}$.

2.3. Töltés elhelyezkedése vezetőn, csúcshatás, elektromos szél

Elektrosztatika esetén egy vezető belsejében nem lehet (ellentétes töltés által nem kompenzált) töltés. Ha lenne ilyen, akkor a belőle kiinduló erővonalak miatt tér lenne a vezető belsejében, ami nem lehetséges. (Ha lenne tér, akkor a vezetőben lévő töltéshordozók mozgásnak indulnának, vagyis elektromos áram folyna, ami már nem elektrosztatika.) Vagyis **a töltések a vezető felületén helyezkednek el**. **A vezető belsejében az elektromos térerősség nulla, az elektromos potenciál állandó** (az egész vezető ekvipotenciális, a felületét is beleértve).

Csúcshatás: a töltött vezető felületén a töltések úgy helyezkednek el, hogy a vezető élein, csúcsain (**görbületi sugár kicsi**) az **elektromos térerősség nagy**.

Elektromos szél: a csúcsokon a térerősség olyan nagy, hogy képes ionizálni a levegő molekuláit, az ionok pedig a tér hatására mozgásba jönnek, majd ütközéssel a környező semleges molekulákat is mozgásba hozzák.

2.4. Kondenzátorok

Kondenzátor: két, egymástól elszigetelt vezetőből áll, ezek a kondenzátor fegyverzetei.

Kapacitás

Ha a kondenzátorra több töltést viszünk, akkor azokból arányosan több erővonal indul ki, vagyis az elektromos térerősség nő, az ennek integráljaként előálló feszültség a fegyverzetek között szintén nő. Vagyis **a kondenzátor töltése és feszültsége egyenesen arányos, az arányossági tényező a kondenzátor kapacitása**: $C=\frac{Q}{U}$, ahol C: a kondenzátor kapacitása, Q: a kondenzátorra vitt töltés mennyisége, U pedig a kondenzátor fegyverzetei között mérhető feszültség.

Mértékegysége: F=C/V=As/V (Farad=Coulomb/Volt=Amper szekundum/Volt).

Síkkondenzátor kapacitása: $C=\frac{\epsilon_0 A}{d}$, ahol ϵ_0 : a vákuum permittivitása, A: a síkkondenzátor fegyverzeteinek területe, d: a síkkondenzátor fegyverzeteinek távolsága.

Eredő kapacitás:

Sorosan kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitása: $\frac{1}{C_e}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$,

párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitása: $C_e=\sum_{i=1}^{n} C_i$,

ahol C_e: eredő kapacitás, C_i: i-edik kondenzátor kapacitása.

Kondenzátor és elektromos tér energiája

Egy U feszültségre feltöltött kondenzátor energiája: $E_{kond}=\frac{1}{2}CU^2$,

ahol E_{kond}: a kondenzátor elektromos terének energiája, C: a kondenzátor kapacitása, U: a kondenzátor fegyverzetei közötti feszültség.

A kondenzátor energiája az elektromos erőterében tárolódik.

Az elektromos tér energiasűrűsége: $\rho_{en,el}=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$,

ahol $\rho_{en,el}$: az elektromos tér energiasűrűsége, $\vec{E}$: elektromos térerősség, $\vec{D}$: elektromos megosztás.

2.5. Dipólus, polarizáció, szigetelők

Dipólus

Töltésrendszer momentuma: $\vec{m}=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i Q_i$, ahol Q_i az $\vec{r}_i$ helyen levő töltés.

Dipólus: két azonos nagyságú, ellentétes előjelű töltésből álló rendszer.

Dipólusmomentum: $\vec{p}=Q\overrightarrow{\Delta r}$, ahol $\vec{p}$: a dipólusmomentum vektor, Q: a töltések nagysága, $\overrightarrow{\Delta r}$: a negatív töltésből a pozitív töltésbe mutató vektor.

Polarizáció

Kondenzátor fegyverzetei közé szigetelőt (dielektrikumot) helyezve a kondenzátor feszültsége csökken. Vagyis a **szigetelőn átmennek erővonalak**, de kevesebb, mint a levegőben. A külső tér hatására ugyanis a **dipólusok rendeződnek**, ún. **dipóllánc**okat alkotnak. Ezek végein levő töltések a szigetelő felületén **polarizációs töltéssűrűség**et hoznak létre. Ezeken a töltéseken végződnek azok az erővonalak, amelyek nem mennek át a szigetelőn.

A szigetelő polarizáltságát a **dielektromos polarizáció vektora** jellemzi: $\vec{P}=\frac{\vec{p}}{V}$,

ahol $\vec{P}$: a dielektromos polarizáció vektora, azaz a dipólusmomentum sűrűség, $\vec{p}$: a kérdéses anyagdarab dipólusmomentuma, *V*: ugyanezen anyagdarab térfogata.

Felületi töltéssűrűség: $\sigma=\lim_{A\to 0}\frac{Q}{A}$.

A szigetelő felületének egy pontján a **felületi polarizációs töltéssűrűség**: $\sigma_{pol}=\vec{P}\cdot\vec{n}$, ahol $\vec{P}$: a dielektromos polarizáció vektora, $\vec{n}$: a felület normálvektora az adott pontban.

Az elektromos megosztás és az elektromos térerősség kapcsolata: $\vec{D}=\epsilon_0\vec{E}+\vec{P}$, ahol ϵ_0 : a vákuum permittivitása, $\vec{E}$: elektromos térerősség, $\vec{D}$: elektromos megosztás, $\vec{P}$: a dielektromos polarizáció vektora. Ez az összefüggés mindig igaz.

E és D mérése szigetelőben

Szilárd szigetelőbe üreget kell vájni, és az üregben úgy mérni, mint vákuumban. Fontos, hogy az üreg olyan alakú legyen, hogy a belsejében mérhető tér megegyezzen az anyagban üreg nélkül mérhető térrel. Ehhez a következő elrendezések alkalmasak:

- Az elektromos térerősség (***E***) méréséhez a **térrel párhuzamos, hosszúkás üreg**et kell vájni, és ebben ugyanúgy mérni, mint vákuumban (próbatöltés, erőmérő).
- Az elektromos megosztás (***D***) méréséhez a **térre merőleges, lapos üreg**et kell vájni, és ebben ugyanúgy mérni, mint vákuumban („palacsintasütővel”).

LIH anyagok

LIH = lineáris, izotróp (=irányfüggetlen), homogén anyag. A lineáris az anyagi egyenletekre vonatkozik, a polarizáció esetén:

$\vec{P}=\epsilon_0\chi_e\vec{E}$, ahol χ_e az elektromos szuszceptibilitás.

Bevezethető az $\epsilon_r=1+\chi_e$ relatív permittivitás és az $\epsilon=\epsilon_0\epsilon_r$ abszolút permittivitás, ezzel:

$\vec{D}=\epsilon\vec{E}$ összefüggés írható fel, ami **csak LIH anyagokra** igaz.

2.6. Magnetosztatika

A magnetosztatika alapegyenletei

Lokális alakban: $\begin{matrix} rot\,\vec{H}=0 \\ div\,\vec{B}=0 \end{matrix}$, globális alakban: $\begin{matrix} \oint_G \vec{H}\cdot\vec{dr}=0 \\ \oint_A \vec{B}\cdot\vec{dA}=0 \end{matrix}$,

ahol $\vec{H}$: mágneses térerősség, $\vec{B}$: mágneses indukció.

Mágneses Coulomb-törvény

$\vec{F}_p=\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{p\,p_p}{r^2}\vec{e}_r$, ahol az origóban helyezkedik el a p mágneses pólus, az $\vec{r}$ pontban a p_p mágneses próbapólus, $\vec{F}_p$: a p pólus által a p_p pólusra kifejtett erő, μ_0 : a vákuum permeabilitása.

Ez alapján definiálható lenne a mágneses térerősség a $\vec{H}=\frac{\vec{F}_p}{p_p}$ összefüggéssel, de nem ez lesz a mérési módszerünk.

Szótár: analógiák az elektromos és mágneses mennyiségek között

Elektromos	Mágneses
E elektromos térerősség [V/m]	***H*** mágneses térerősség [A/m]
D elektromos megosztás/ indukció [As/m^2]	***B*** mágneses indukció [Vs/m^2]
Q elektromos töltés, Coulomb [C] = [As]	*P* mágneses pólus, Weber [W] = [Vs]
P elektromos polarizáció [As/m^2]	***M*** mágneses polarizáció [Vs/m^2]
Vákuum permittivitása: ε_0 = 8,854*10^{-12} As/Vm	Vákuum permeabilitása: $\mu_0 = 4\pi$*10^{-7} Vs/Am
$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\, \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ minden szigetelő anyagban	$\boldsymbol{B} = \mu_0\, \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}$ minden anyagban
$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E})$ anyagi egyenlet	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{H})$ anyagi egyenlet
$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0\, \chi_e\, \boldsymbol{E}$ anyagi egyenlet LIH anyagokban	$\boldsymbol{M} = \mu_0\, \chi_m\, \boldsymbol{H}$ anyagi egyenlet LIH anyagokban
χ_e elektromos szuszceptibilitás	χ_m mágneses szuszceptibilitás
$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ relatív permittivitás	$\mu_r = 1 + \chi_m$ relatív permeabilitás
$\varepsilon = \varepsilon_0\, \varepsilon_r$ abszolút permittivitás	$\mu = \mu_0\, \mu_r$ abszolút permeabilitás
LIH anyagokban: $\boldsymbol{D} = \varepsilon\, \boldsymbol{E}$	LIH anyagokban: $\boldsymbol{B} = \mu\, \boldsymbol{H}$
elektrét	állandó mágnes
ferroelektromosság ($\varepsilon_r >> 1$)	ferromágnesség ($\mu_r >> 1$)
dielektrikum ($\chi_e > 0$, $\varepsilon_r > 1$)	paramágneses anyagok ($\chi_m > 0$, $\mu_r > 1$)
–	diamágneses anyagok ($\chi_m < 0$, $\mu_r < 1$)
vezetők	–

Megjegyzés: az elektromos és a mágneses mértékegységek A ↔ V cserével kaphatóak egymásból.

Az anyagok mágneses tulajdonságai

Ferromágnesesség: az M(H) görbe egy hiszterézis. Az atomokban van párosítatlan elektron, így van eredő mágneses momentumuk. **Domének** vannak bennük, azaz olyan tartományok, amelyeken belül eleve rendeződik a mágneses momentum. Külső mágneses tér nélkül a domének össze-vissza állnak, így az anyagnak nincs eredő mágnesezettsége. Külső tér hatására a domének rendeződnek, az anyagnak lesz eredő mágnesezettsége, ami a külső tér megszűnte után is megmarad. **Curie-pont**: az a hőmérséklet, ami fölött a domének szétesnek, vagyis az anyag elveszti ferromágnesességét, paramágnesessé válik.

Paramágnesesség: Az atomokban van párosítatlan elektron, így van eredő mágneses momentumuk, de az atomok külső tér híján rendezetlenek, így az anyagnak nincs eredő mágneses momentuma. Külső mágneses tér hatására az atomi mágneses momentumok rendeződnek, az anyag a **külső térrel egyirányú** eredő mágneses momentummal rendelkezik.

Diamágnesesség: minden anyag ilyen egy kicsit, de mivel ez a leggyengébb, ha az előző két tulajdonság valamelyikével rendelkezik, az elnyomja a diamágnesességet. A diamágnesesség lényege, hogy külső mágneses tér az atomokban, és így az anyagban is a **külső térrel ellentétes** irányú mágneses momentumot kelt.

3. Stacionárius terek

3.1. Egyenáramok

Stacionárius állapot: a mennyiségek időben nem változnak, de vannak áramok. Sztatika esetén minden , míg stacionárius állapotban **dinamikus egyensúly** van, azaz egy mennyiség úgy állandó, hogy az azt növelő és csökkentő hatások ugyanakkora nagyságúak.

Elektromos áram

Elektromos áram: **töltéshordozók rendezett mozgása**. Ezt több mennyiséggel is jellemezhetjük.

Áramerősség: az időegység alatt átáramló töltések mennyisége, azaz $I=\frac{dQ}{dt}$, stacioner esetben ebből $I=\frac{Q_t}{t}$, ahol Q_t a t idő alatt átáramlott töltés. Az áramerősség mértékegysége az Amper [A].

Áramsűrűség: $\vec{j}=\rho_{vez}\vec{v}_{vez}$, ahol $\vec{j}$: elektromos áramsűrűség, ρ_{vez} : a vezetési töltések sűrűsége, $\vec{v}_{vez}$: a vezetési töltések áramlásának sebessége. Mértékegysége: [A/m²].

A kettő közötti kapcsolat: $I=\int_A \vec{j}\cdot\overrightarrow{dA}$, ahol I: áramerősség, A: az a felület, amin az áram keresztülfolyik (tipikusan a vezető keresztmetszete).

Ohm-törvény

Differenciális (lokális) alak: $\vec{j}=\sigma\vec{E}$ vagy $\vec{E}=\rho\vec{j}$, ahol $\vec{j}$: elektromos áramsűrűség, $\vec{E}$: elektromos térerősség, σ : fajlagos vezetőképesség, ρ : fajlagos ellenállás.

Integrális (globális) alak: $U=RI$, ahol U: a vezetőn eső feszültség, R: a vezető ellenállása, I: a vezetőn átfolyó áram erőssége.

Levezetés: lineáris közegellenállást és elektromos erőt feltételezve stacionárius esetben az eredő erő nullává tételéből.

Homogén, egyenes henger alakú vezető ellenállása: $R=\frac{\rho l}{A}$, ahol ρ : fajlagos ellenállás, *l* a vezető hossza, *A* a vezető keresztmetszetének felülete.

Joule-törvény

Az elektromos áram **teljesítmény**ére ad összefüggést.

Lokális alak: $\rho_P=\vec{E}\cdot\vec{j}$, globális alak: $P=U\,I$, ahol *P*: az elektromos áram teljesítménye egy vezetőn, ρ_P : az elektromos áram teljesítménysűrűsége, $\vec{E}$: elektromos térerősség, $\vec{j}$: elektromos áramsűrűség, *U*: a vezetőn eső feszültség, *I*: a vezetőn átfolyó áram erőssége.

Levezetés: a teljesítmény mechanikai definíciójába beírva az elektromos térerősség által kifejtett erőt (a lokálishoz), illetve munkát (a globálishoz).

3.2. Vezetés mechanizmusai, áramkörök, feszültségforrás, idegen erő

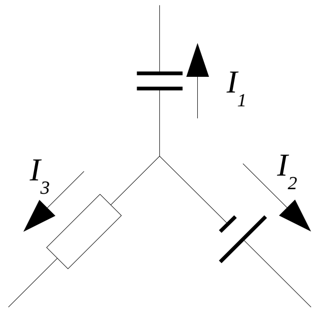
Vezetés mechanizmusai

A töltéshordozók fajtái, eredete és viselkedése alapján osztályozunk.

- **Fémes** vezetők: a fémek vegyérték elektronjai a vezetési sávban könnyen el tudnak mozdulni elektromos tér hatására.
- **Ionos** vezetés: a töltött ionok oldatban vagy olvadt állapotban el tudnak mozdulni.
- Vezetés vákuumban – **katódsugárcső**: vákuumban nincs részecske, tehát nekünk kell töltéshordozót bejuttatni. Ez a katódsugárcső esetén elektron, ami a katódból lép ki valamilyen emisszióval.
- **Nem önálló vezetés** gázokban: valamilyen külső hatás ionizálja a gáz semleges molekuláit, ezután az ionok már vezetnek. Pl.: gyufa lángja kisüti a kondenzátort, lángionizációs detektor.
- **Önálló vezetés** gázokban: ritkított gáz és nagy térerősség esetén egy véletlenül keletkező ion kellően felgyorsul ahhoz, hogy újabb töltéshordozókat hozzon létre, így a vezetés fennmarad. Pl.: ködfénykisülés (gázkisülési cső).

Kirchhoff-törvények

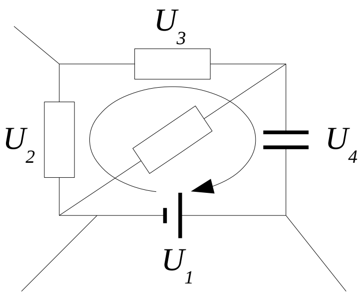
Kirchhoff-féle **csomóponti törvény**: $\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$,



ahol I_k a csomópont k-adik ágában folyó áram előjeles áramerőssége.

Levezetése: Maxwell I. egyenletéből stacionaritást feltételezve.

Kirchhoff-féle **huroktörvény**: $\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$,



ahol U_i a zárt hurok i-edik szakaszán eső előjeles feszültség.

Levezetése: Maxwell II. egyenletéből stacionaritást feltételezve.

Idegen erő, elektromotoros erő

Idegen erő: a töltéshordozókra ható nem elektromos erő. Pl.: kémiai erők.

Elektromotoros erő: $\epsilon = \int_G \vec{E}_{idegen} \cdot \vec{dr} = \int_G \frac{\vec{F}_{idegen}}{Q_{vez}} \cdot \vec{dr}$, ahol ϵ : elektromotoros erő, $\vec{F}_{idegen}$: az idegen erő, $\vec{E}_{idegen}$: az idegen erő „térerőssége”, azaz egységnyi vezetési töltésre jutó idegen erő, Q_{vez} a vezetési töltések nagysága.

Az Ohm-törvények idegen erő jelenlétében

Differenciális (lokális) alak: $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{idegen})$ vagy $\vec{E} + \vec{E}_{idegen} = \rho \vec{j}$, ahol $\vec{j}$: elektromos áramsűrűség, $\vec{E}$: elektromos térerősség, σ : fajlagos vezetőképesség, ρ : fajlagos ellenállás, $\vec{E}_{idegen}$: az idegen erő „térerőssége”, azaz egységnyi töltésre jutó idegen erő.

Integrális (globális) alak: $U + \epsilon = RI$, ahol *U*: a vezetőn eső feszültség, *R*: a vezető ellenállása, *I*: a vezetőn átfolyó áram erőssége, ϵ : elektromotoros erő.

A Kichhoff-féle huroktörvény idegen erő jelenlétében:

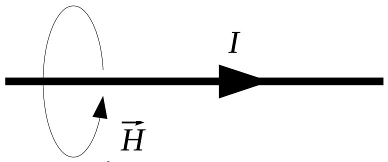
$\sum_{j=1}^{m} R_j I_j = \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i$, ahol R_j a *j*-edik **passzív** elem ellenállása, I_j a rajta átfolyó áramerősség; ϵ_i : az *i*-edik **aktív** elem elektromotoros ereje.

3.3. Stacionárius áram mágneses tere

Oersted-kísérlet: Volta oszloppal nagy áramot folyatott át egy platina dróton, és észrevette, hogy a drót közelébe helyezett iránytű kitér. Vagyis az áramjárta vezető mágneses teret kelt.

Ampère-kísérlet: Egy kamrát épített, amiben állandó mágnesekkel kompenzálta a Föld mágneses terét (ami Oerstednél szintén hatott az iránytűre), így a dót mágneses terét önmagában tudta vizsgálni.

Ampère-féle gerjesztési törvény



Integrális alakban: $\oint_G \vec{H} \cdot \vec{dr} = I$,

ahol $\vec{H}$: mágneses térerősség, *I*: a *G* zárt görbe által határolt felületen átfolyó áramok eredő erőssége.
Jobbkéz-szabály: hüvelykujj az áram irányába, többi ujj mutatja a mágneses tér irányát.

Egyszerű elrendezések mágneses tere

Végtelen hosszú, **egyenes vezető**: a vezetőre merőleges síkban koncentrikus kör alakú erővonalak, a térerősség nagysága $H = \frac{I}{2\pi R}$, ahol *H* a mágneses térerősség nagysága, *I* a vezetőben folyó áram erőssége, *R* a vezetőtől mért távolság. Iránya jobbkéz-szabállyal: hüvelykujj az áram irányába, többi ujj mutatja a mágneses tér irányát.

Szolenoid (tekercs): a tekercsen belül homogén mágneses tér van, a tekercsen kívüli tér nagysága emellett elhanyagolható. A tekercsen belüli tér nagysága $H = \frac{nI}{l}$, ahol *H* a mágneses térerősség nagysága, *I* a vezetőben folyó áram erőssége, *n* a tekercs meneteinek száma, *l* a tekercs hossza.
Iránya: jobbkéz-szabállyal, a behajlított ujjak mutatják a tekercsben az áram irányát, a hüvelykujj mutatja a mágneses tér irányát.

A mágneses térerősség (H tér) mérése

A kompenzáció elvén alapul, az ismeretlen teret egy szolenoid által keltett ismert mágneses térrel kompenzáljuk. Egy *l* hosszúságú, *n* menetes szolenoid mágneses tere $H = \frac{nI}{l}$ nagyságú, a tér irányát a tekercsen folyó *I* áram irányából jobbkéz-szabállyal kapjuk.

A mérés menete:

1.) A vizsgált pont köré egy szolenoidot helyezünk.

2.) A szolenoid irányát és a rajta átfolyó áram erősségét addig változtatjuk, amíg a külső teret kioltja. Ekkor $\vec{H}_{mérendő} = -\vec{H}_{szolenoid}$.

A kioltás észleléséhez kell egy nulldetektor. Ez például egy iránytű, ami kitérítés után beáll a külső mágneses tér irányába. Ha a külső mágneses tér nulla, akkor kitérítés után ott marad, ahova forgattuk.

FIB-szabály: a mágneses tér hatása az áramjárta vezetőre

$\vec{\Delta F} = I[\vec{\Delta l} \times \vec{B}]$, ahol $\vec{\Delta F}$: a vezető szakaszra ható erő, $\vec{\Delta l}$: a vezető szakasz hossza, a vektor az elektromos áram folyásának irányába mutat, *I*: a vezetőn átfolyó áram erőssége, $\vec{B}$: mágneses indukció.

Levezetése: Laplace elemi törvénye és Newton 3. axiómája felhasználásával egy vezetővel kölcsönható mágneses pólus esetére.

Lokális alakja: $\vec{f}=[\vec{j}\times\vec{B}]$, ahol $\vec{f}=\lim_{V\to 0}\frac{\vec{F}}{V}$ az erősűrűség, $\vec{j}$: elektromos áramsűrűség, $\vec{B}$: mágneses indukció.

A mágneses indukció (B tér) mérése

Magnetométerrel, azaz lapos tekerccsel mérjük. Erre mágneses térben **forgatónyomaték** hat: $\vec{M}=nI[\vec{A}\times\vec{B}]$, ahol $\vec{M}$: a magnetométerre ható forgatónyomaték, *n*: a magnetométer menetszáma, *I*: a magnetométeren átfolyó áram erőssége, $\vec{A}$: a lapos tekercs felületvektora (iránya az áram körüljárási irányából jobbkéz-szabállyal), $\vec{B}$: mágneses indukció.

A forgatónyomaték nagysága: $|\vec{M}|=nIAB\sin\alpha$.

A mérés menete:

1.) Megkeressük a magnetométer **stabil** egyensúlyi helyzetét (α=0). Ekkor $\vec{A}$ és $\vec{B}$ ugyanabba az irányba mutat, vagyis a mágneses indukció merőleges a tekercsre.

2.) Ezután 90°-kal elforgatjuk a magnetométert, ekkor α=90°, és a lapos tekercsre ható forgatónyomaték maximális. Ebből az indukció nagysága számolható: $|\vec{B}|=\frac{M_{max}}{nIA}$.

Lorentz-féle erőtörvény

Az elektromágneses térben mozgó ponttöltésre ható erőt adja meg.

$\vec{F}=Q([\vec{v}\times\vec{B}]+\vec{E})$, ahol $\vec{F}$: a ponttöltésre ható erő, *Q*: a ponttöltés elektromos töltésének nagysága, $\vec{v}$: a ponttöltés sebessége, $\vec{E}$: elektromos térerősség, $\vec{B}$: mágneses indukció.

Egyenes vezetők közötti erőhatás

Egymással párhuzamos, egyenes vezetők között erő hat, ennek nagysága:

$\Delta F=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\Delta l}{d}I_1 I_2$, ahol Δ*F* a két párhuzamos vezető közötti **vonzóerő** (negatív értéke jelent taszítóerőt) a vezetők egy Δ*l* hosszúságú szakaszán, *d* a vezetők távolsága, I_1 és I_2 pedig a bennük folyó áramok előjeles nagysága, μ_0 a vákuum permeabilitása.

Amper definíciója: legyen két párhuzamos, hosszú egyenes vezető vákuumban, bennük ugyanakkora áram folyjon. Az áram nagysága 1 A, ha az egymástól 1 m távolságra levő vezetők 1 m hosszú szakaszán a köztük ható vonzóerő nagysága $2*10^{-7}$ N. (Azaz $I_1 = I_2$, *d* = 1 m, Δ*l* = 1 m, Δ*F* = $2*10^{-7}$ N.)

H és B mérése anyagban

Hasonlóan, mint az ***E*** és ***D*** tér mérése szigetelőben. Szilárd anyagba üreget kell vájni, és az üregben úgy mérni, mint vákuumban. Fontos, hogy az üreg olyan alakú legyen, hogy a belsejében mérhető tér megegyezzen az anyagban üreg nélkül mérhető térrel. Ehhez a következő elrendezések alkalmasak:

- A mágneses térerősség (***H***) méréséhez a **térrel párhuzamos, hosszúkás üreg**et kell vájni, és ebben ugyanúgy mérni, mint vákuumban (szolenoid, nulldetektor).

- A mágneses indukció (***B***) méréséhez a **térre merőleges, lapos üreg**et kell vájni, és ebben ugyanúgy mérni, mint vákuumban (lapos tekerccsel).

4. Kvázistacionárius terek

4.1. Indukció

Faraday-féle indukció törvény

Globális alakja: $\oint_G \vec{E}\cdot\vec{dr} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B}\cdot\vec{dA}$, ahol $\vec{E}$: elektromos térerősség, $\vec{B}$: mágneses indukció, $\frac{d}{dt}$: idő szerinti deriválás, *A*: a vizsgált felület, *G*: az *A* felület pereme, egy zárt görbe.

Szokásos elnevezések: **indukált feszültség** $U^{ind} = \oint_G \vec{E}\cdot\vec{dr}$,

a **mágneses indukció fluxusa** $\Phi_B = \int_A \vec{B}\cdot\vec{dA}$.

Ezekkel a Faraday-törvény: $U^{ind} = -\dot{\Phi}_B$.

Neumann-törvény

Mágneses térbe helyezett kereten mozgó csúszkában indukált feszültség: $U_{ind} = -B\,l\,v$,

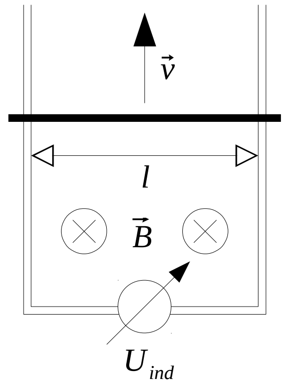
ahol

U_{ind} : indukált feszültség,

B: a keretre merőleges mágneses indukció nagysága,

l: a csúszka szélessége,

v: a csúszka sebessége.



Lenz-törvény

Indukált áram: a mágneses indukció fluxusának változása örvényes elektromos teret kelt, ennek hatására egy vezetőben örvényáramok keletkeznek, ezeket nevezzük indukált áramnak.

Lenz-törvény: az indukált áram mindig olyan irányú, hogy mágneses tere az indukciót létrehozó változást csökkentse.

Pl.: alumínium karika közepébe mágnest dugva az indukált áram mágneses tere ellentétes a mágnesével, így a mágnes a karikát taszítja. A mágnest kihúzva pedig az indukált áram mágneses tere ugyanolyan irányú, mint a mágnesé, így a mágnes a karikát vonzza.

Kölcsönös indukció, önindukció

Kölcsönös indukció: két tekercset egymásba helyezünk, az egyikben az áramot változtatva a másikban feszültség indukálódik. Ennek nagysága: $U_2^{ind} = -L_{21}\dot{I}_1$, ahol I_1 az 1. tekercsben folyó áram erőssége, L_{21} a 2. tekercs 1.-re vonatkoztatott **kölcsönös indukciós együtthatój**a, U_2^{ind} a 2.

tekercsben indukált feszültség.

Önindukció

Ha egy tekercsben változik az áram, saját magában is van indukált feszültség! Ezt jellemzi az **önindukciós együttható**: $L=\frac{\mu n^2 A}{l}$, ahol μ a tekercsben levő LIH anyag abszolút permeabilitása, *n* a tekercs menetszáma, *A* a tekercs keresztmetszetének felülete, *l* a tekercs hossza.

A tekercsen mérhető feszültség $U_L=L\frac{dI}{dt}=L\dot{I}$, ugyanis $U_L = - U^{ind}$.

Tekercs és mágneses tér energiája

Egy **tekercs energiája** miközben rajta *I* áram folyik: $E_{tekercs}=\frac{1}{2}LI^2$, ahol $E_{tekercs}$: a tekercs mágneses terének energiája, *L*: a tekercs önindukciós együtthatója, *I*: a tekercsen átfolyó áram erőssége.

A tekercs energiája a mágneses terében tárolódik.

A **mágneses tér energiasűrűsége**: $\rho_{en,m}=\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$, ahol $\rho_{en,m}$: a mágneses tér energiasűrűsége, $\vec{H}$: mágneses térerősség, $\vec{B}$: mágneses indukció.

4.2. Váltóáram

Komplex írásmód

Koszinuszosan váltakozó áram: $I(t)=I_0\cos(\omega t+\varphi)$.

Ehhez hozzárendelhetünk egy ugyanilyen amplitúdójú és fázisú szinuszos áramot, mint képzetes részt, a kettő összegét komplex számként felírhatjuk.

A **komplex írásmód**dal: $\tilde{I}(t)=\tilde{I}_0 e^{i\omega t}$,

ahol a **komplex amplitúdó**: $\tilde{I}_0=I_0 e^{i\varphi}$, ahol I_0 az amplitúdó, ω a körfrekvencia, φ a fázis. A komplex amplitúdó időben állandó.

A fizikailag mérhető mennyiség mindig a valós része a komplex mennyiségnek.

Komplex impedancia

Ellenállás, tekercs, kondenzátor, illetve az ezek kombinációjából álló áramkörök esetén harmonikus (koszinuszos) feszültségforrás hatására az áramerősség is harmonikusan változik, vagyis van értelme mindkettőt komplex alakban felírni.

Komplex impedancia: A komplex feszültség és áramerősség hányadosa, $\tilde{Z}=\frac{\tilde{U}(t)}{\tilde{I}(t)}=\frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0}$, ahol $\tilde{Z}$: komplex impedancia, $\tilde{U}_0$: feszültség komplex amplitúdója, $\tilde{I}_0$: áramerősség komplex amplitúdója.

Értéke a fenti 3 alapesetre:

- **Ellenállás**ra $\tilde{Z}_R = R$, ahol *R* az ellenállás.
- **Tekercs**re $\tilde{Z}_L = i\omega L$, ahol *L* a tekercs önindukciós együtthatója, *i* az imaginárius egység, ω az áram és a feszültség körfrekvenciája.
- **Kondenzátor**ra: $\tilde{Z}_C = \frac{1}{i\omega c} = \frac{-i}{\omega C}$, ahol *C* a kondenzátor kapacitása.

A komplex impedanciákkal formálisan ugyanúgy számolhatunk, mint egyenáramú áramkörökben az ellenállásokkal (soros, párhuzamos eredő, Kirchhoff-törvények).

Váltóáram teljesítménye

A váltóáram teljesítménye állandó és változó részre osztható, $P(t) = U(t)I(t) = P_{áll} + P_{vált}(t)$,

ahol az **állandó teljesítmény** $P_{áll} = \frac{U_0 I_0}{2}\cos(\varphi)$,

a **változó teljesítmény** $P_{vált} = \frac{U_0 I_0}{2}\cos(2\omega t + \varphi)$, ahol U_0 a feszültség amplitúdója, I_0 az áramerősség amplitúdója, φ pedig a kettő közötti fáziskülönbség.

Az **átlagteljesítmény** hosszú időre megegyezik az állandó teljesítménnyel: $\langle P\rangle = \frac{U_0 I_0}{2}\cos(\varphi)$.

Az **effektív feszültség** és **áramerősség** az az egyenfeszültség illetve áram, ami ohmos ellenálláson ugyanakkora teljesítményt végez, mint a váltóáram. Kiszámolása: $U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$, $I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ ahol U_0 a feszültség amplitúdója, I_0 az áramerősség amplitúdója.

5. Gyorsan változó terek

5.1. Eltolási áram és áramsűrűség

Az **eltolási áram** $I_{elt} = \int_A \dot{\vec{D}} \cdot d\vec{A}$, az **eltolási áramsűrűség** $\vec{j}_{elt} = \dot{\vec{D}}$, ahol $\vec{D}$: elektromos megosztás.

Levezetése: töltődő kondenzátor esetén a lemezek között az eltolási áram legyen ugyanakkora, mint a töltőáram.