Elektrosztatika

I. Az elektrosztatika alapegyenleteinek leszármaztatása a Maxwell-egyenletekből

Ha a négy Maxwell-egyenletbe behelyettesítjük a sztatika feltételeit, azaz

$$\mathbf{j} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{B}} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{0},$$

akkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{0},$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0},$$
$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0,$$
$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho.$$

Látható, hogy az elektromos teret jellemző **E** és **D**, valamint a mágneses teret jellemző **H** és **B** vektorterek között most nincs kapcsolat. Ezért az elektrosztatikus térre vonatkozó két egyenletet külön tekinthetjük, és ezeket szokás az elektrosztatika "alaptörvényeinek" nevezni:

$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho$, **az első alaptörvény, avagy az elektrosztatika Gauss-törvénye,**

$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$, **a második alaptörvény.**

A következőkben azonban nem a fenti alaptörvényekből kiindulva kezdjük tárgyalni az elektrosztatikát, hanem először az elektrosztatika kísérleti tényeit tekintjük, és ezektől elindulva kívánunk eljutni az alaptörvények megértéséhez. Az elektrosztatika törvényeit először vákuumban tárgyaljuk, vagyis feltételezzük, hogy $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$.

II. Visszafelé az úton: az elektrosztatika alapegyenleteinek kikövetkeztetése a kísérleti megfigyelésekből

II.1 Az elektrosztatikus alapjelenségek

Az elektrosztatikus alapjelenség vezetővel. Dörzselektromosság

Ha egy üvegrudat bőrrel dörzsölünk meg, majd pedig ezt az üvegrudat egy alumíniumfólia-darabkához közelítjük, akkor a rúd a fóliadarabkát először magához rántja, majd eltaszítja. Ezt a kísérletet általában úgy szokás bemutatni, hogy az alumíniumfólia-darabkát egy cérnaszálon ingaszerűen felfüggesztjük. A kísérlet egyszerre több fontos dologra is felhívja a figyelmet. Először is látható, hogy két szigetelő anyag összedörzsölésével ezen anyagok különleges állapotba hozhatók, amit azzal magyarázunk, hogy ezek ilyenkor elektromos töltésre tesznek szert. A konkrét példában az üveg pozitív, a bőr pedig negatív töltésű lesz a dörzsölés után. (Itt, és a későbbi magyarázatainknál is, egy átlagos középiskolás tudásra fogunk építeni. Vagyis feltételezzük, hogy az olvasó hallott már olyan alapvető fogalmakról, mint pozitív és negatív töltés, vezető és szigetelő, stb.) A dörzselektromosság jelensége egyébként azon alapul, hogy amikor két különböző anyag érintkezik egymással, akkor az érintkezési pontokon át egy kis töltés áramlik az egyikből a másikba. (Ennek az érintkezési elektromosságnak a létrejötte tulajdonképpen csak fémeknél világos. Fémeknél az ún. kontaktpotenciált az egyik fémből a másikba átáramló vezetési elektronok hozzák létre. Ha azonban az egyik, vagy mindkét anyag szigetelő, akkor nincs általánosan elfogadott elmélet. Nem eldöntött kérdés például az, hogy az elektronok mellett ionok is részt vehetnek-e a töltésátadásban, netán esetleg ezek játsszák a főszerepet. Az igazság az, hogy a dörzsölési –vagy más néven tribo– elektromosság a szilárdtestfizikának egy igen érdekes, de kevéssé kutatott és mindmáig vitatott területe. Annak ellenére, hogy a kezdeti töltésszétválás mechanizmusa nem teljesen tisztázott, ez a továbbiak megértését most nem fogja zavarni. Az elektromos alapjelenségek szempontjából ugyanis csak az lényeges, hogy ilyen töltésszétválás valahogyan létrejöhet.) Az érintkezési elektromosság első lépésként csak kis, 1-2 voltos feszültséget hoz létre. Amikor azonban a két felület a dörzsölés következtében egymáshoz képest mozog, akkor az eredetileg érintkező pontok távolsága sok nagyságrenddel nőhet. Ha a két, eredetileg érintkező felületdarabkát síkkondenzátor fegyverzeteinek tekintjük, amelyeken a töltés a fegyverzetek távolodása közben nem változik, hanem állandó, akkor a távolodás következtében a kondenzátor feszültsége is sok nagyságrenddel nőhet a csökkenő kapacitás miatt (ld. V.2 fejezet). Így jön létre az a több tízezer voltos feszültség, ami a dörzselektromosságnál fellépő szikrákat magyarázza. (A dörzsölés tehát a mozgás miatt, valamint azért is fontos, hogy minél több helyről minél több töltést gyűjtsünk össze. Nem kizárt azonban, hogy emellett más szerepe is van. Például a dörzsölésnél fellépő nyíróerők esetleg makromolekulák széthasítását okozhatják, és ez a primer töltés-szétválasztásnál fontos lehet.) A dörzselektromos jelenségben számunkra most az a leginkább figyelemre méltó, hogy a kísérlet meggyőzően demonstrálja: az anyagban lévő töltés **szétválasztható** pozitív és negatív töltésre. A pozitív és negatív elektromosság egymástól elkülöníthető, és ezek után két makroszkopikus tárgy közül az egyik pozitív, a másik pedig negatív lehet. Például dörzsölés után az üvegrúdon a pozitív töltések, a bőrdarabban pedig a negatív töltések jutnak túlsúlyra. Ezt az elektromosan töltött állapotot a testek közötti erőhatáson keresztül észlelhetjük. A pozitívan töltött üvegrúd, miután az alumínium fóliának pozitív töltést ad át, azt eltaszítja magától. Ez a kísérlet mutatja azt a jól ismert jelenséget, hogy az azonos töltések taszítják egymást. A negatívan töltött bőrdarab viszont a pozitívan töltött fóliát magához vonzza, mert az ellentétes töltések vonzzák egymást.

Elektromos megosztás a vezetőben

Mivel magyarázható viszont az, hogy az eredetileg semleges alumínium fóliát a pozitív töltésű üvegrúd magához vonzza? Ezt a jelenséget az alumínium vezetőben fellépő **elektromos megosztás** hozza létre. Az üvegrúd ugyanis az alumíniumban lévő vezetési elektronok egy részét a fóliának az üvegrúd felé eső peremére gyűjti, amely így negatív töltésű lesz. Ugyanekkor a fóliának az üvegrúdtól távolabbi pereme pozitív töltésűvé válik az onnan hiányzó elektronok miatt. E pozitív töltésre az üvegrúd taszítóerőt, a vele azonos nagyságú, de közelebb elhelyezkedő negatív töltésre viszont a fent említett taszítóerőnél nagyobb vonzóerőt gyakorol. Végeredményben az erősebb vonzóerő hatása érvényesül, és ezért rántja magához a fóliát az üvegrúd.

Töltésátadás

Amikor a fólia érintkezésbe kerül az üvegrúddal, akkor töltésátadás történik, és így az alumínium fólia is pozitív töltésűvé válik. Ennek következtében lép fel azután az a taszítóerő, amely ellöki a fóliát a rúdtól. Megjegyzendő, hogy sok esetben a fólia nem is érinti az üvegrudat, csak megközelíti, majd tényleges fizikai érintkezés nélkül eltaszítódik tőle. A töltésátadás ilyenkor a levegőn keresztül történik az ún. "elektromos szél" következtében. (Az elektromos szél a fólia éles szélein lép fel a csúcshatás miatt. Erről később még lesz szó.) Egy szigetelő és egy vezető közötti töltésátadás mechanizmusának problémáiról a dörzselektromossággal kapcsolatban már szóltunk. De itt ismét hangsúlyozni szeretnénk, hogy jelen szempontunkból nem az az érdekes, hogy mi a mechanizmus, hanem az, hogy töltésátadás egyáltalán lehetséges. Bár magnetosztatikáról csak később lesz szó, most mégis érdemes összehasonlítást tenni az elektrosztatikai és magnetosztatikai alapjelenség között. A mágnesrúd a lágyvasat -mint tudjuk- magához rántja és ott is tartja, és nem taszítja el úgy, mint ahogyan az elektrosztatikus alapjelenségeknél történik vezető esetében. Az északi és déli mágnességet ugyanis nem tudjuk különálló testekbe szétválasztani úgy, mint ahogy a pozitív és negatív elektromos töltést, és a mágnesrúdból a lágyvasba sem külön északi, sem külön déli "mágneses töltést" nem lehet átvinni. Ennek oka, hogy valódi mágneses töltés nincs. Elektromos töltés viszont van, és ennek bizonyítéka, hogy egyik testről a másikra átadódhat az ellentétes töltéstől függetlenül.

Az elektrosztatikus alapjelenség szigetelővel

Ha az előbbi kísérletben az alumínium fólia helyett egy vattacsomót használunk, akkor az események kezdete kvalitatíve hasonló az alumíniumfóliás kísérletéhez: a megdörzsölt üvegrúd a vattacsomót magához rántja. A folytatás azonban csak késve következik be: a vattacsomó tartósan az üvegrúdhoz tapadva marad, és csak nagysokára taszítódik el onnan. Nyilvánvaló, hogy két szigetelő között a töltésátadás lassú folyamat. Minél jobb szigetelő a vatta és az üveg (minél szárazabb a levegő), annál tovább maradnak összetapadva. Tökéletes szigetelők nyilván sohasem taszítódnának el egymástól. Mindez érthető. De ha a vattacsomó közel tökéletes szigetelő, amelynek belsejében a töltésáramlás ehanyagolható, akkor miért rántja magához az üveg a vattát? Hogyan jöhet itt létre elektromos megosztás (pontosabban az elektromos megosztáshoz hasonló jelenség, hiszen megosztás csak vezetőben lehetséges), ha a töltések nem tudnak elmozdulni a szigetelő belsejében? Ezt a dilemmát úgy tudjuk feloldani, ha feltételezzük, hogy ugyan szabad töltéshordozók (melyek egymástól függetlenül szabadon kóborolhatnak) nem fordulhatnak elő a szigetelő belsejében, de kötött töltéshordozók igen. A kötött állapot azt jelenti, hogy a szigetelő minden pontjához azonos mennyiségű pozitív és negatív töltés van kötve. Ezek a töltések azonban nem mereven vannak a ponthoz "láncolva", hanem rugalmasan. A jelenség molekuláris magyarázatára az elektromos polarizáció tárgyalásánál még vissza fogunk térni. Most csak annyi érdekel bennünket, hogy bár a szigetelő anyagok esetén a pozitív és negatív töltések a molekulák belsejében össze vannak zárva, és onnan nem szabadulhatnak ki, a molekulán belül azonban ezek a töltések elmozdulhatnak. Hogyan lehetséges, hogy az egyes molekulákon belüli pici elmozdulásoknak végülis makroszkopikusan észlelhető hatása van? A dolgot úgy képzelhetjük el, hogy a szigetelő belsejében van egy helyhez kötött pozitív, valamint egy ugyanilyen nagy, és ugyancsak helyhez kötött negatív töltésfelhő. Ha nincs külső elektromos tér, akkor a két töltésfelhő súlypontja pontosan egybeesik, és mindenütt tökéletesen fedik egymást. Ennek következtében az eredő töltéssűrűség mindenütt zérus. Külső elektromos tér hatására azonban a két töltésfelhő ellenkező irányban egy picit elmozdul. Ennek következtében a két felhő már nem fedi egymást tökéletesen, hanem a pozitív és negatív felhő szélei mintegy "kilógnak" a szigetelő széleinél. Tehát amíg a szigetelő belsejében a töltésfelhők fedik egymást, és itt az eredő töltéssűrűség továbbra is zérus, nem ez a helyzet a peremeken, ahol úgynevezett **polarizációs töltések** jelennek meg ott, ahol az egyik töltésfelhő "kikandikál" a másik alól. Ez a fajta polarizációs töltés azonban nem vezethető el a szigetelő felületéről úgy, mint az influált (azaz elektromos megosztással létrehozott) töltés a vezető esetében, mert az ideális szigetelőknél a pozitív és negatív töltések nem szakíthatók el egymástól, azaz külön testekre nem vihetők át. (Figyeljük meg, hogy a szituáció nagyon hasonlít a magnetosztatikai alapjelenséghez, ahol az északi és déli mágneses pólus sem gyűjthető össze egymástól különálló testeken.)

II.2 Coulomb törvénye

Coulomb törvényét már a középiskolából jól ismerjük. Azt mondja ki, hogy egy Q_1 és egy Q_2 töltés között ható erő arányos ezeknek a töltéseknek a nagyságával, és fordítottan arányos az őket elválasztó r távolság négyzetével:

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

A *k* arányossági tényező $9\cdot10^9$ $N\cdot m^2/C^2$, vagyis ha két 1 Coulombos töltés egymástól 1 méter távolságra helyezkedik el, akkor a közöttük ébredő erő $9\cdot10^9$ Newton. (1 Coulomb töltés halad át egy vezető keresztmetszetén 1 másodperc alatt, amennyiben ebben a vezetőben 1 Amper áram folyik. Vagyis 1 C = 1 A·s. A töltés egysége ezek szerint származtatott mennyiség az általunk használt SI mértékrendszerben. Az SI –mint majd látni fogjuk– valamennyi elektromos mennyiséget a jól mérhető áramra vezeti vissza, amelynek egysége az Amper.) Érdemes belegondolni a nagyságrendekbe: a két 1 Coulombos töltést Magyarország összes lakosa együtt sem tudná széthúzni (mekkora erő is $9\cdot10^9$ Newton?). 1 Coulombnyi töltése 10^{-5} mól elektronnak van. Mekkora erők a mi gravitációs viszonyokhoz szokott képzeletünknek!

A Coulomb-törvény fenti középiskolai alakjához még egy kis magyarázatot is kell fűzni: azonos töltések között taszító, ellentétes töltések között vonzó erő ébred, és centrális erőkről van szó (vagyis az erők támadásvonala a két pontszerű töltést összekötő egyenes).

A következőkben Coulomb törvényét egy kicsit más alakban fogjuk felírni. Helyezzünk el egy pontszerű Q töltést egy térbeli koordinátarenszer origójában. Ez a Q töltés a koordinátarendszerben elektromos erőteret hoz létre, amit egy másik, ugyancsak pontszerű Q_P „próbatöltéssel" tudunk kimérni. Ha ezt a próbatöltést a koordinátarendszer **r** helyvektorú pontjába helyezzük, akkor ott a rá ható erő:

$$\mathbf{F}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\cdot Q_P}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Két különbséget láthatunk a megszokott középiskolás formulához képest:

1) A *k* konstans helyett most $1/(4\pi\varepsilon_0)$ szerepel. Ez nem jelent elvi különbséget, mivel $\varepsilon_0 = 8{,}84\cdot10^{-12}$ As/Vm. (Igazoljuk, hogy ez számértékre és mértékegységre is helyes, amennyiben *k*, mint arról már volt szó, $9\cdot10^9$ $N\cdot m^2/C^2$, és 1 V = 1 Nm/C.) Annak az előnyét, hogy egyik állandó helyett most egy másikat használunk, majd a későbbiekben fogjuk látni (II.7 fejezet).

2) A formulában megjelent az **r** irányba mutató egységvektor, $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$. Ez automatikusan megadja az $\mathbf{F}_P$ erő irányát, tehát nem kell további magyarázatokat fűzni a Coulomb-törvényhez. (Példaként lássuk be, hogy amennyiben Q és Q_P ellentétes előjelű, akkor a Q_P-re a Q felé irányuló, vagyis vonzó erő hat!)

II.3 Az elektromos térerősség és mérése

Az elektromos tér jelenlétét onnan ismerhetjük fel, hogy az elektromos töltésre erőt gyakorol. Ha tehát egy elektromos teret fel akarunk térképezni (pl. az előadóteremben lévő teret), akkor egy Q_P próbatöltést kell körbecipelni, és minden pontban fel kell jegyezni a rá ható $\mathbf{F}_P$ erőt irány és nagyság szerint. Vagyis a mérőeszközünk egy Q_P próbatöltés és egy erőmérő szerkezet (pl. rugós erőmérő). Az **E** elektromos térerősséget a mért $\mathbf{F}_P$ erőnek és a Q_P próbatöltésnek a hányadosa adja:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_P}{Q_P}$$

A Q_P-vel való osztásra azért van szükség, mert így a próbatöltéstől –vagyis a mérőeszközünktől– független eredményt kapunk az adott pontbeli elektromos térerősség értékére. (Ha nem osztanánk, akkor nagyobb próbatöltéssel nagyobb erőteret mérnénk.)

II.4 A vektortér szemléltetése vektorvonalakkal. A vektortér fluxusa.

Az elektromos erőtér egy vektortér: a tér minden egyes pontjához egy vektort, az elektromos térerősség vektorát rendeli. Vektortér szemléltetéséhez Faraday ötlete alapján ún. vektorvonalakat használunk. (Ha ugyanis a tér mindenen egyes pontjához odarajzolnánk az ottani vektort –pl. az elektromos térerősség vektorát–, akkor csak egy áttekinthetetlen „térbeli sündisznót” kapnánk.) A vektorvonalak irányított görbék: ezt egy pici nyíllal jelezzük a görbéken. A vektortér irányát a görbék érintőinek iránya adja (az érintők öröklik a görbék irányítottságát), a nagyságát pedig a vektorvonalak sűrűsége. Ez utóbbit szemléletesen úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a görbékre merőleges felület egységén átmenő vektorvonalak száma.

A „vektorvonalak száma” szemléletes megfogalmazás, de vigyázni kell arra, hogy amikor ezeket a vonalakat berajzoljuk, soha nem lehet annyi vonalat felvenni, hogy minden pont tetszőlegesen kis környezetében tökéletes hűséggel mutassa a viszonyokat. Homogén (helytől független, azaz térben állandó) vektortérben aránylag egyszerűbb a helyzet, de ott is gondolni kell arra, hogy a vektorvonalak sűrűsége az olyan kis felületekre is értelmezett és ugyanannyi, ahol a konkrét rajzon éppen nem halad át vektorvonal. Például, ha 1 m^2 felületre merőlegesen 2 vektorvonalat rajzolunk, és tudjuk, hogy a tér homogén, akkor a 2 vektorvonal/m^2 sűrűség az egész felületre érvényes, függetlenül attól, hogy a szimbolikus rajzon csak két vonal fog áthaladni, és ezért bőven találhatunk „csupasz” területeket. Inhomogén vektortérben még fontosabb, hogy tudatában legyünk annak, hogy a vektorvonalak sűrűsége a tér minden pontjában értelmezett, még ha egy rajzon csak nagyon kevés vektorvonal látható is. Kisebb mértékegység felvételével azonban a vektortér nagyságának mérőszáma nő, és így a vektorvonalak sűrűsége, vagyis az ábrázolás pontossága tetszés szerint növelhető.

Általános (tehát nem feltétlenül a vektorvonalakra merőleges és nem is szükségszerűen sík) felületen áthaladó vektorvonalak száma nem más, mint a vektortér erre a felületre vett fluxusának a mérőszáma. A **v** vektortér A felületre vett Φ_v fluxusának az alábbi felületi integrált nevezzük:

$$\Phi_v = \int_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}\,.$$

II.5 Az elektromos tér szemléltetése erővonalakkal

Az A felületen átmenő erővonalak száma

Az **E** elektromos térerősség –mint már említettük– szintén egy vektortér, melynek vektorvonalait (elektromos) erővonalaknak nevezzük. Az **E** erőtérnek az A felületre vett Φ_E fluxusa (mely számértékileg az A felületen átmenő erővonalak száma):

$$\Phi_E = \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

II.6 Pontszerű Q töltés erőtere

A II.2 pontban felírtuk a Coulomb-törvénynek egy olyan vektori formáját, amely megadta egy koordinátarendszer origójában elhelyezkedő Q töltés által egy másik Q_P próbatöltésre ható erőt:

$$\mathbf{F}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\cdot Q_P}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

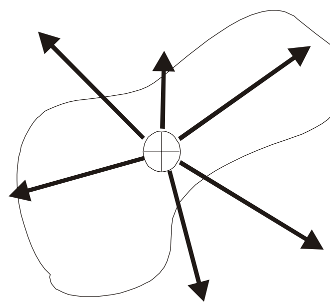
ahol **r** a Q_P helyvektora. A térerősséget e pontban úgy kapjuk meg, hogy a próbatöltésre ható erőt elosztjuk a próbatöltés nagyságával (II.3):

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_P}{Q_p} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\mathbf{e}_r \ .$$

Vagyis a pontszerű töltés esetén a térerő iránya radiális ($\mathbf{e}_r$ a sugár irányú egységvektor), nagysága pedig a Q ponttöltéssel egyenesen, a tőle mért távolság négyzetével fordítottan arányos.

II.7 A Q töltésből kiinduló erővonalak száma

Ennek meghatározásához a Q töltést egy zárt felülettel kell körbevenni, hogy valamennyi, a Q-ból kiinduló erővonalat számításba tudjuk venni. A levezetés végén látni



fogjuk, hogy valamennyi zárt felületre vett fluxus ugyanaz, vagyis tetszés szerinti zárt felületet választhatunk. Mivel azonban ezt egyelőre nem tudhatjuk, ezért csak az egyszerűségre hivatkozva zárt felületként vegyünk egy R sugarú gömböt az origóban levő Q töltés körül. A pontszerű Q töltés erőterének fluxusa erre a gömbfelületre

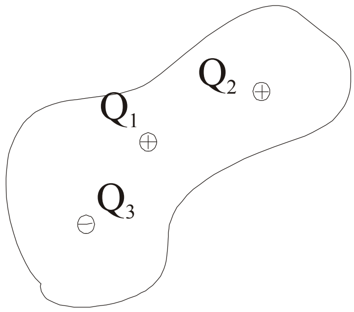
$$N_{E,Q} = \Phi_{E,\text{gömb}} = \oint_A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oint_A \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\mathbf{e}_r\cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\oint_A \mathbf{e}_r\cdot(dA\,\mathbf{e}_r) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\cdot 4R^2\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

mivel $d\mathbf{A} = dA\ \mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_r = 1$ és $\oint_A dA = 4R^2\pi$. Amit nagyon fontos észrevennünk a fenti eredményben, az az, hogy a gömb sugara nem szerepel benne, vagyis a számított fluxus a gömb sugarától függetlenül minden gömbre ugyanannyi. Mivel már korábbi tanulmányainkból emlékezünk arra, hogy az elektromos tér erővonalai a központi (pozitív) Q töltésből indulnak ki, első pillantásra nem tűnik világrengető eredménynek, hogy egy, a töltést körbevevő gömbön átmenő erővonalak száma a gömb sugarától független, hiszen minden egyes, a töltésből kiinduló erővonal metszeni fogja a gömbfelületet. Sőt tetszés szerinti, akármilyen girbe-gurba, de a töltést körülölelő zárt felületen is ugyanennyi erővonal fog áthaladni a felület alakjától és nagyságától függetlenül. Ez a természetes eredmény azonban mégis igen fontos, és a Coulomb-törvényből következik. Ezt legjobban úgy szemléltethetjük, ha elképzeljük, mi lenne akkor, ha a Coulomb-törvényben a távolságfüggés nem négyzetes lenne, hanem valami más hatványkitevő szerepelne ott. Például nem 2, hanem 2,01. Ekkor a térerő gyorsabban csökkenne a sugárral, mint ahogy a gömbfelület nő, vagyis a fluxus, azaz a gömbfelületen átmenő erővonalak száma csökkenne a sugár növelésével. Ez azt jelentené, hogy miközben távolodunk a töltéstől, egyes erővonalak a „semmiben" végződnének, nem pedig a szokott módon negatív töltésekben. Ha viszont a kitevő 1,99 lenne, akkor az erővonalak a „semmiből" indulnának ki. Tehát az a kép (ami –mint majd látni fogjuk– tulajdonképpen a negyedik Maxwell-egyenlet, vagy az elektrosztatika Gauss-törvénye), miszerint az erővonalak a pozitív töltésekből indulnak ki és a negatív töltésekben végződnek, végső soron megszabja, hogy milyen legyen a Coulomb-törvény távolságfüggése. (Vagy fordítva is okoskodhatunk, miszerint a Coulomb-törvény négyzetes távolságfüggése teszi lehetővé az elektromos erőtérnek az elektromos erővonalakkal történő megszokott ábrázolását.)

Még annyit jegyeznénk meg itt, hogy a fentiek értelmében egy tetszés szerinti zárt felületre az elektromos erőtér fluxusa (számértékileg a zárt felületen átmenő erővonalak száma) egyenlő a zárt felület által körbezárt töltések összege osztva ε_0-al:

$$\Phi E_{E,\text{zárt}} = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0}$$



II.8 Az elektromos megosztás jelensége

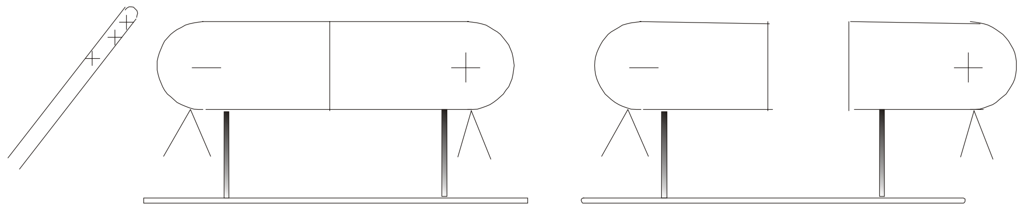
Az elektromos megosztás

Ha egy elektromosan töltött testet közelítünk egy vezetőhöz, akkor a vezetőben a töltés tere elektromos megosztást hoz létre. Például amikor egy bőrrel dörzsölt üvegrudat (az üvegrúd ilyenkor pozitív töltésű) közelítünk egy fémdarabhoz (vagy például egy sztaniol lemezhez), akkor a fémben lévő vezetési elektronok egy részét a pozitív üvegrúd a hozzá közelebb eső oldalára vonzza. Igen hamar (néhány nanoszekundum alatt) kialakul az elektrosztatikai egyensúly, amikoris a fémlemez üvegrúdhoz közeli oldalán negatív, üvegrúdtól távolabbi oldalán pedig (ahonnét az elvándorolt elektronok hiányoznak) pozitív töltés halmozódik fel.

A megosztás már „az elektrosztatika alapjelensége vezetővel" kísérlet magyarázatában is alapvető szerepet játszott: a megdörzsölt üvegrúd azért rántja maga felé a fémet, mert a fémben a megosztás miatt a negatív és pozitív töltés elkülönül, és a közelebb eső negatív töltésre az üvegrúd inhomogén tere nagyobb vonzóerőt gyakorol, mint amilyen erővel a távolabb lévő pozitív töltéseket taszítja.

A töltésszétválás konzerválása

Amikor az üvegrudat eltávolítjuk a vezető környezetéből, a megosztás hatása eltűnik, a töltések újra egyenletesen oszlanak el. Ahhoz, hogy a megosztás nagyságát kényelmesen meg tudjuk mérni, célszerű lenne, ha a töltésszétválást valahogyan konzerválni tudnánk, hogy később a szétválasztott töltés pozitív vagy negatív részét a másiktól elválasztva meg tudjuk határozni. Kézenfekvő ötlet, hogy a töltések szeparációját úgy állandósítsuk, hogy a megosztás létrejötte után a vezető pozitív illetve negatív részeit egymástól elkülönítjük. Ekkor a megosztó tér megszűnése (pl. az üvegrúd eltávolítása) után is szétválasztva maradnak a töltések. Ezt a lehetőséget (és az elektromos megosztás jelenségét) mutatja be a következő kísérlet.



Két elektroszkópot egy szigetelő nyéllel ellátott fémrúddal kössünk össze. Az egyik elektroszkóp felé közelítsünk egy megdörzsölt üvegrudat. Ekkor mindkét elektroszkóp kitér, mutatva, hogy rajtuk töltés van. Az eredetileg semleges rendszerben megosztás jött létre: az üvegrúd melletti elektroszkópon negatív, a másikon pedig pozitív töltés halmozódik fel. Ha az üvegrudat eltávolítjuk, akkor mindkét elektroszkóp lemezei ismét alaphelyzetbe lendülnek, jelezve, hogy a megosztás megszűnt. Ha azonban a két elektroszkóp közötti kapcsolatot megszüntetjük még mielőtt az üvegrudat eltávolítanánk, akkor a két elektroszkóp kitérése később sem szűnik meg, hiába visszük el onnan az üvegbotot. A pozitív és negatív töltések tehát elkülönülve az elektroszkópokon maradnak. Hogy két egyforma nagyságú, de ellentétes előjelű töltésről van szó, azt az bizonyítja, hogy amennyiben a két elektroszkópot ismét összekötjük egy vezetővel, akkor kisülnek, és újra alaphelyzetbe kerülnek.

II.9 Az elektrosztatika Gauss-törvényének globális alakja. Az elektromos megosztás (a D vektor) mérése

Az elektrosztatika I. alaptörvényének globális alakja vákuumban

A II.7 paragrafusban beláttuk, hogy a Q töltésből kiinduló összes erővonal száma –azaz az elektromos tér fluxusa– egy, a Q töltést körülölelő zárt felületre Q/ε_0:

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Most idézzük fel a **D** tér definícióját:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

ahol **P** az elektromos polarizáció, azaz az elektromos dipólusmomentum-sűrűség. A definíció értelmét és a **P** jelentését később majd részletesen elmagyarázzuk (VI.1 fejezet). Most csak arra kell figyelnünk, hogy a vákuumban anyag nincs, így dipólusok sincsenek, ezért vákuumban igaz, hogy

$$\mathbf{P} = \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Ez azt jelenti, hogy –figyelembe véve a Q töltésből kilépő összes erővonal számát (ami nem más, mint az **E** tér fluxusa egy, a Q töltést tartalmazó zárt felületre)– az **E** tér fluxusából a **D** tér fluxusát egyszerűen ε_0-al való szorzással nyerhetjük:

$$\oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \oint_A \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q \quad \text{azaz} \quad \oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q$$

Látható tehát, hogy a Q töltésből kilépő összes **D** vonal száma egyenlő magával a Q töltéssel. Ez az elektrosztatika első alaptörvényének a globális alakja.

Az elektromos tér megosztó hatásának (a D térnek) a mérése

Képzeljünk el egy homogén elektromos teret vákuumban, ahol meg kívánjuk mérni a **D** teret az elektromos megosztás segítségével. Még mielőtt nekifognánk a mérésnek, felmerül a kérdés, hogy mi szükség van erre? Ugyanis tudjuk, hogy vákuumban érvényes a

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

összefüggés, amelynek segítségével az **E** térből (amelynek a mérését már tárgyaltuk) a **D** tér egy szorzás segítségével könnyedén kiszámítható. Mi értelme van akkor a mérésnek? Nos, először is egy „ős”-mérésre mindenképpen szükség van, hogy ε_0-at, a vákuum permittivitását meg tudjuk határozni. Igaz viszont, hogy ha ezt az értéket már ismerjük, akkor a vákuumban elég az **E** teret mérni, és a **D** tér már számítható. Az alább ismertetendő módszer a **D** mérésére mégis fontos, mert –mint azt majd a későbbiekben látni fogjuk– ugyanez a módszer anyagi közeg esetén is alkalmazható. Az anyagi közegben pedig az elektromos polarizáció miatt a **D** és az **E** között az általános

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

összefüggés az érvényes. Ha tehát **E**-t és **D**-t egymástól függetlenül tudjuk mérni, akkor az anyagi közegben meghatározható a **P**, vagyis az elektromos dipólusmomentum-sűrűség. Most térjünk vissza a **D** méréséhez.

D nagyságának a meghatározása

Tehát ott tartottunk, hogy vákuumban, homogén elektromos térben kívánjuk megmérni a **D** teret. Ehhez vegyünk két, szigetelő nyéllel ellátott "palacsintasütőt”, vagyis sík vezető felületet, melyek kezdetben egymással érintkeznek. Ezt a szerkezetet helyezzük be a **D** térbe, a térre merőlegesen. (Hogy miként találjuk meg a merőleges irányt, arról egy kicsit később lesz szó.) A fémlemezpárban elektromos megosztás alakul ki, és a felületi töltés teljesen árnyékolja a fém belsejét, ahol sem **E**, sem **D** tér nem maradhat a végső egyensúlyban. Ez azt jelenti, hogy minden **D** vonalnak véget kell érnie az egyik palacsintasütő felületén (vagyis egy sem mehet át a fémen), és ugyanennyi **D** vonalnak kell kiindulnia a másik palacsintasütő felületéből. Ha ismerjük a **D** vonalak számát (a **D** térnek a palacsintasütő A felületére vett $\Phi_\mathbf{D}$ fluxusát), akkor a **D** tér nagyságát úgy számíthatjuk ki, hogy a fluxust elosztjuk a felülettel:

$$D = \frac{\Phi_D}{A},$$

mert a tér homogén és merőleges az A felületre. Ugyanis ebben az esetben a fluxust megadó felületi integrál egyszerűsödik a $D \cdot A$ szorzatra:

$$\Phi_\mathbf{D} = \int_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_A D\, dA = D \int_A dA = DA$$

ugyanis a **D** vektor és a d**A** vektor párhuzamos, ezért skalárszorzatuk egyenlő az abszolút értékeiknek a szozatával; a D értéke a helytől független, ezért az integráljel elé kiemelhető, és végül $\int_\mathbf{A} dA = A$.

Tehát a fentiek szerint a **D** tér nagyságát úgy számolhatjuk ki, hogy a **D** térre merőleges palacsintasütőn vett fluxust osztjuk a palacsintasütő felületével. De hogyan mérhetjük meg a **D** tér palacsintasütőn vett fluxusát? Vagyis mennyi **D** vonal végződik a negatív töltésű palacsintasütőn, és mennyi indul ki a pozitív töltésűből? Erre a kérdésre könnyű a válasz, hiszen ez az elektrosztatika első alaptörvénye szerint Φ_D nem más, mint a palacsintasütőn lévő töltés. (Annyi **D** vonal indul ki a palacsintasütőből, amennyi a rajta lévő töltés. Negatív töltés esetén negatív a kiindulás: azaz a **D** vonalak itt bevégződnek.) Vagyis a pozitív fegyverzetet tekintve

$$\Phi_{\mathbf{D}} = Q \qquad \text{és} \qquad D = Q/A.$$

Tehát ha meg tudjuk mérni a töltést a pozitív fegyverzeten, akkor a feladat meg van oldva.
A mérés gyakorlati leírásánál ott tartottunk, hogy a két összeérintett palacsintasütőt a **D** térre merőlegesen behelyeztük a térbe. Létrejön rajtuk az elektromos megosztás. Most válasszuk szét őket, és csak ezután vegyük ki a két lemezt a térből. Ezután már csak annyi a feladatunk, hogy megmérjük a töltést, és képezzük a töltés per felület hányadost, és így megkapjuk az elektromos megosztás vektorának nagyságát. (A töltés mérését az áram és idő mérésére lehet visszavezetni, amivel a későbbiekben foglalkozunk.)

***D* irányának a meghatározása**

Az előbbi mérésnél feltételeztük, hogy a palacsintasütőket a **D** térre merőlegesen helyeztük el. Mivel ez az irány eleve nincs kijelölve, ezért nyilvánvalóan arra is mérési módszert kell kidolgozni, hogy ezt az irányt hogyan találjuk meg. A következő „próbálgatós" módszert alkalmazhatjuk: a tér megosztó hatását egymás után többféle irányba behelyezett palacsintasütővel megmérjük. Mivel

$Q = \Phi_{\mathbf{D}} = \int_A \mathbf{D} \cdot \mathbf{dA}$, a megosztó hatás –vagyis a felgyülemlett töltés– akkor a legnagyobb, amikor a skalárszorzat értéke maximális, azaz a palacsintasütő éppen merőleges a térre. Ezt szem előtt tartva megkeressük a helyes irányt. Végül a merőleges irány is kétféle lehet: negatív és pozitív. Az irányt a lemezek polaritása dönti el. (A palacsintasütőn létrejövő töltés, amikor az a mérendő térben van, az eredeti teret lerontó **D** teret hoz létre. Ezért nincs a két palacsintasütő között tér. Amikor azonban kiemeljük a lemezeket, a rajtuk lévő töltés olyan **D** teret létesít, amely ellentétes irányú az eredeti **D** térrel. Az eredeti **D** tér iránya így a negatív töltéssel rendelkező palacsintasütőtől a pozitívan töltött felé mutat.)

Mérés inhomogén térben

A fenti módszer csak közel homogén tér esetén működik jól. Ha egy nagy palacsintasütőt inhomogén térbe tesszük, akkor valamilyen átlagot fog mérni. Amennyiben részletesebb, nagyobb felbontású képet akarunk a térről, akkor kisebb palacsintasütőt kell használni, amelynek a kis környezetében a tér már közel homogén.

Az elektromágneses tér jellemzőinek mérése elvben és gyakorlatban

A mérések elve igen fontos, mert megmutatja, hogy mit is értsünk a mérendő mennyiségen. A mérések gyakorlata, bár ezekre az elvekre épül, mégis másként néz ki, mint az elvi eljárás, mert különböző praktikus szempontoknak is meg kell felelni. Tehát például az elektromos térerősség mérését inkább feszültségmérésre vezetjük vissza, és nemigen szoktuk a próbatöltésre ható erőt mérni. (Bár egy TV képcső belsejében vagy egy gyorsító berendezésben az elektromos tér ilyen közvetlen mérése is kézenfekvő lehet.) Palacsintasütővel sem szoktunk szaladgálni, ha a **D** tér értékére vagyunk kíváncsiak. Mindez azonban mit sem von le a mérési elvek fontosságából. Ugyanis ezek a mérési utasítások mutatják meg az elektromágneses tér 4 jellemzőjének, az **E**, **D**, **H** és **B** vektortereknek a fizikai jelentését.

II.10 Az elektromos töltéssűrűség.
Az elektrosztatika Gauss-törvényének lokális alakja

A bevezetésben már volt róla szó, hogy a Maxwell-egyenleteket lokális és globális alakban is fel lehet írni. Az elektromos töltés globális mennyiség (pl. egy véges kiterjedésű test töltése), egy pontban nem értelmezhető. (A tömeghez hasonlóan, ahol egy folytonos tömegeloszlású test egy pontjának a tömege mindenképpen zérus, akár ólomból van a test, akár híg levegőből.) A töltéssűrűség azonban –akárcsak a közönséges (tömeg)sűrűség egyetlen pontban– lokálisan is értelmezhető az alábbi határértékkel:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0,\, \varnothing_{\Delta V} \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V},$$

ahol a ΔV térfogatelem arra a pontra zsugorodik, amelyben a töltéssűrűséget keressük, ΔQ pedig a ΔV térfogatelemben lévő töltés. Fordítva, ha ismerjük a lokális töltéssűrűséget, akkor egy véges térfogatban lévő töltés mennyisége a töltéssűrűség térfogati integráljaként írható fel:

$$Q = \int_V \rho \, dV .$$

A töltéssűrűség bevezetésével és a Gauss-tétel segítségével az elektrosztatika első alaptörvényének globális alakjából levezethető a lokális alak:

$$\oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q \quad \Rightarrow \quad \oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \rho \, dV .$$

A felületi integrált a Gauss-tétel segítségével alakítjuk át térfogativá:

$$\oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \mathrm{div}\mathbf{D} \, dV \quad \Rightarrow \quad \int_V \mathrm{div}\mathbf{D} \, dV = \int_V \rho \, dV .$$

Ha két integrál egyenlő, az nem jelenti feltétlenül azt, hogy a két intengrandusz is megegyezik. De ha tetszőleges térfogatra igaz az, hogy (átrendezve):

$$\int_V \mathrm{div}\mathbf{D} \, dV - \int_V \rho \, dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_V (\mathrm{div}\mathbf{D} - \rho) \, dV = 0 ,$$

akkor az csak úgy lehetséges, ha

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho ,$$

ami nem más, mint az elektrosztatika első alaptörvényének lokális alakja.