

Dancsó András

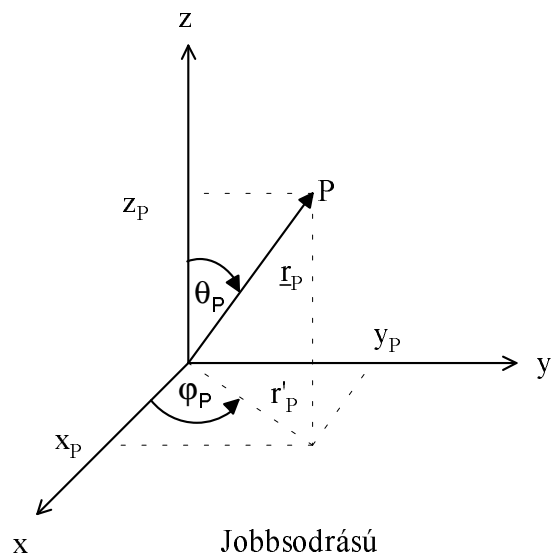
FIZIKA PÉLDATÁR

1. Matematikai összefoglaló

Néhány függvény

Független változó	Függő változó	Speciális feltételek	Név	Pl.
skalár	skalár	valós komplex	skalár	$y = f(x)$
skalár	vektor		vektor-skalár	$\underline{r}(t)$
vektor	skalár	helyvektor	skalár-vektor skalártér	$\Phi(\underline{r})$
vektor	vektor	helyvektor homogén lineáris	vektortér tenzor	$\underline{E}(\underline{r})$ $\underline{y} = \underline{A} \cdot \underline{x}$
függvény	skalár		funkcionál	$y = \int_a^b x(t) dt$
függvény	függvény		operátor	$y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$

Koordinátarendszerek



Descartes: $P(x_P, y_P, z_P)$

henger: $P(r'_P, \varphi_P, z_P)$

gömbi(polár): $P(r_P, \varphi_P, \theta_P)$

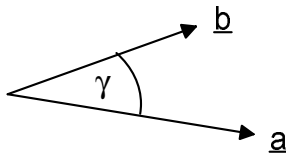
Helyvektor:

$$\overrightarrow{OP} = \underline{r}_P = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = x_P \underline{e}_x + y_P \underline{e}_y + z_P \underline{e}_z$$

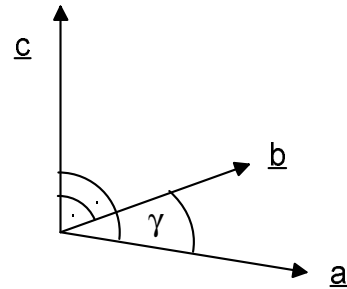
Vektoralgebra

Szorzás skalárral, összeadás, kivonás, nullvektor:

$$\lambda \cdot \underline{a} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{bmatrix}, \quad \underline{a} \pm \underline{b} = \begin{bmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{bmatrix}, \quad \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



skalárszorzat



vektoriális szorzat

Skalár- vagy belső szorzat:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cdot \cos \gamma, \quad \underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \Leftrightarrow \underline{a} \perp \underline{b}$$

$$|\underline{a}| = a = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Vektoriális szorzat:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{c}, \quad c = ab \cdot \sin \gamma, \quad \underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{a} \parallel \underline{b}, \quad \underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}, \quad \underline{a} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = 0$$

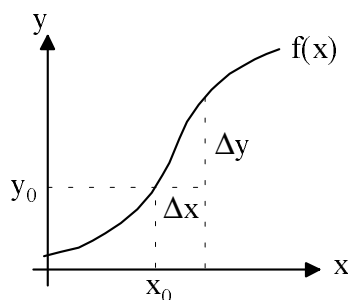
$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & a_x & b_x \\ \underline{e}_y & a_y & b_y \\ \underline{e}_z & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}, \quad \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c}$$

A vektoriális szorzat nem kommutatív, az összeadásra nézve disztributív és általában nem asszociatív (ez utóbbira a három ortogonális vektor esete a kivétel).

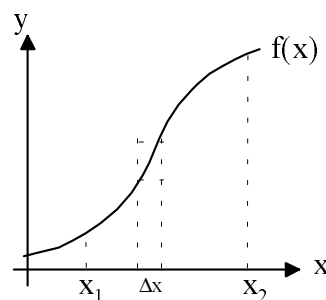
Diadikus vagy külső szorzat:

$$\underline{a} \circ \underline{b} = \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}$$

Deriválások és integrálások



$$\dot{y} = y' = \frac{dy}{dx} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum f(x_i) \Delta x$$

Derivált és primitív függvény:

$$F'(x) = f(x), \quad \int f(x) dx = F(x)$$

Parciális derivált:

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - F(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$$

Deriválás és integrálás, mint vektor szorzása egy skalár operátorral:

$$\frac{d\underline{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \underline{r} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix}, \quad \int \underline{v} dt = \begin{bmatrix} \int v_x dt \\ \int v_y dt \\ \int v_z dt \end{bmatrix}$$

Gradiens, mint skalár szorzása egy vektor operátorral, a nablával:

$$\phi(\underline{r}) = \phi(x, y, z) \quad , \quad \text{nabla:} \quad \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad \nabla \cdot \phi = \text{grad} \phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix}$$

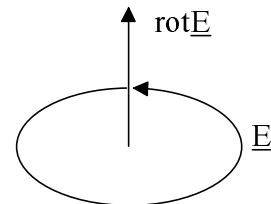
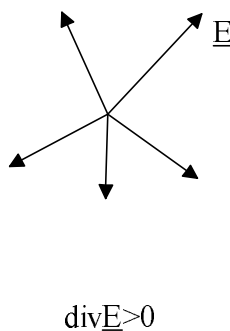
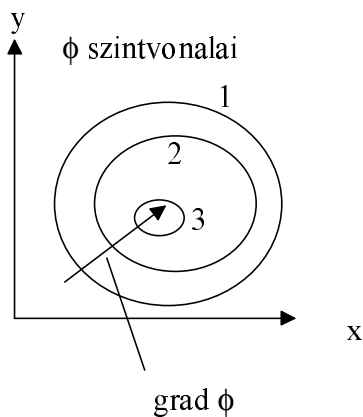
Divergencia, mint vektor skalárszorzata egy vektor operátorral, a nablával:

$$\underline{E} = \underline{E}(\underline{r}) \quad , \quad \nabla \cdot \underline{E} = \text{div} \underline{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Rotáció, mint vektor vektoriális szorzata egy vektor operátorral, a nablával:

$$\nabla \times \underline{E} = \text{rot} \underline{E} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \frac{\partial}{\partial x} & E_x \\ \underline{e}_y & \frac{\partial}{\partial y} & E_y \\ \underline{e}_z & \frac{\partial}{\partial z} & E_z \end{vmatrix}$$

A gradiens a skalártér növekedésének nagyságát és irányát adja meg, a divergencia a vektortérben egy pontból kiinduló vagy egy pontban összefutó erővonalak (források és nyelők) mennyiségi jellemzője, a rotáció pedig a vektortérben található hurkokat méri.



A Laplace-operátor skalár:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad , \quad \nabla^2 \phi = \text{div grad } \phi \quad ,$$

$$\nabla(\nabla \cdot \underline{E}) = \text{grad div } \underline{E} = \nabla^2 \underline{E} + \nabla \times (\nabla \times \underline{E})$$

Rotáció divergenciája, gradiens rotációja mindig nulla:

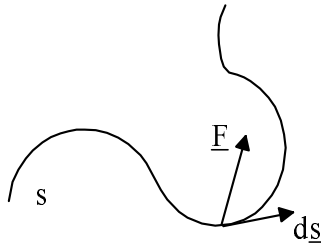
$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{E}) = \text{div rot } \underline{E} = 0 \quad , \quad \nabla \times (\nabla \cdot \phi) = \text{rot grad } \phi = \underline{0}$$

Rotációmentes vektortér előállítható, mint egy skalárpotenciál gradiense:

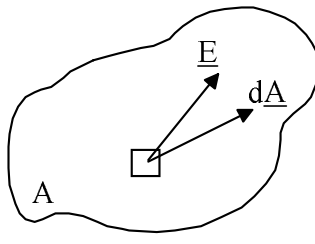
$$\nabla \times \underline{E} = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{E} = -\nabla \cdot \phi$$

Divergencia mentes vektortér előállítható, mint egy vektorpotenciál rotációja:

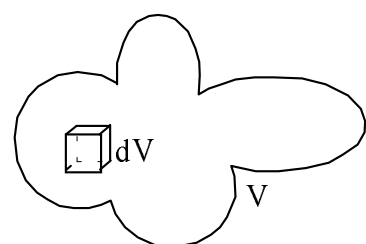
$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$



Vonalintegrál



Felületi integrál



Térfogati integrál

Vonalintegrál, zárt görbére vett vonalintegrál:

$$\int_s \underline{F} \cdot d\underline{s} = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum \underline{F}_i \cdot \Delta \underline{s}_i \quad , \quad \oint_s \underline{F} \cdot d\underline{s}$$

A vonalintegrál értéke általában nemcsak a kezdő- és végponttól, hanem az s görbe alakjától is függ, kivéve, ha az $\underline{F}$ erőter konzervatív, azaz a rotációja nulla, illetve $\underline{F}$ egy skalárpotenciál gradienseként előállítható.

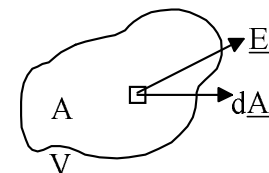
Felületi integrál, az erőternek az adott felületre vett fluxusa (a második a zárt felületre vett integrál):

$$\int_A \underline{E} \cdot d\underline{A} \quad , \quad \oint_A \underline{E} \cdot d\underline{A}$$

Térfogati integrál, skalár- és vektortér egyaránt integrálható:

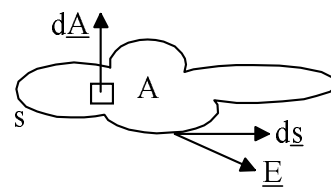
$$\int_V \rho dV \quad , \quad \int_V \underline{f} dV \quad , \quad \text{ha } dV = dx dy dz: \quad \int_V \rho dV = \int \int \int \rho dx dy dz$$

Gauss-Osztrogradskij-tétel:



$$\oint_A \underline{E} \cdot d\underline{A} = \int_V \nabla \cdot \underline{E} dV$$

Stokes-tétel:



$$\oint_s \underline{E} \cdot d\underline{s} = \int_A (\nabla \times \underline{E}) \cdot d\underline{A}$$

Tenzorok

A legáltalánosabb homogén lineáris vektor-vektor függvény a másodrendű tenzor, egy elforgatás és egy nyújtás eredőjét valósítja meg:

$$\underline{y} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}$$

A tenzor reprezentálható egy mátrixszal, a tenzori rend az indexek száma, amit az aláhúzások számával jelölünk, a tenzor dimenziója a tér dimenziója, 3:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix}$$

Tenzori rend	Név	Jelölés	Általános elem
0	skalár	α	
1	vektor	$\underline{v}$	v_i
2	(másodrendű) tenzor	$\underline{\underline{A}}$	a_{ij}
3	harmadendű tenzor	$\underline{\underline{\underline{B}}}$	b_{ijk}

Műveletek:

szorzás skalárral: $\alpha \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}} \quad , \quad c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

összeadás, kivonás: $\underline{\underline{A}} \pm \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}} \quad , \quad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

belső szorzat: $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}} \quad , \quad c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$

külső szorzat: $\underline{\underline{A}} \circ \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\underline{C}}} \quad , \quad c_{ijkl} = a_{ij} b_{kl}$

A többszörös belső szorzatnál annyi indexre kell összegezni, ahány ponttal jelöltük a szorzást. Az Einstein-konvenció szerint nem írják ki a szumma jelet, az azonosan jelölt indexekre, fenti példánkban k -ra, automatikusan összegeznek.

Skalárinvariánsok:

Nyom: $\text{Sp} \underline{\underline{A}} = \text{Tr} \underline{\underline{A}} = \sum_i a_{ii} = a_{xx} + a_{yy} + a_{zz}$

Determináns: $\det \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{vmatrix}$

Sajátértékek: $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x_i} = \lambda_i \underline{x_i}$

A vektorinvariánsok a sajátérték-egyenletben definiált sajátvektorok. Az invariánsok értéke független a koordinátarendszer megválasztásától.

$$\underline{\underline{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_{ij} \quad : \quad \text{Kronecker - delta}$$

Szimmetrikus tenzor: $a_{ij} = a_{ji}$, antiszimmetrikus tenzor: $a_{ij} = -a_{ji}$

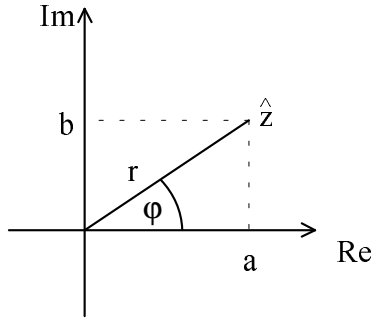
Szimmetrikus tenzorok sajátvektorai egymásra páronként merőlegesek (ortogonálisak), a sajátvektorok által kifeszített koordinátarendszerben a szimmetrikus tenzor mátrixa diagonális, a diagonális elemek a sajátértékek.

Komplex algebra

$$i = \sqrt{-1} \quad \frac{1}{i} = -i \quad i^2 = -1 \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad e^{i\pi} = -1 \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

Euler-képlet: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

$$\hat{z} = a + bi \quad \operatorname{Re} \hat{z} = a \quad \operatorname{Im} \hat{z} = b \quad \hat{z}^* = a - bi \quad \hat{z} = r \cdot e^{i\varphi} \quad \hat{z}^* = r \cdot e^{-i\varphi}$$



$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |\hat{z}| = z = \sqrt{\hat{z} \cdot \hat{z}^*}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

$$a = r \cdot \cos \varphi \quad b = r \cdot \sin \varphi$$

$$\hat{z}_1 \pm \hat{z}_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i$$

$$\hat{z}_1 \cdot \hat{z}_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

$$= r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{\hat{z}_1}{\hat{z}_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$= \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\hat{z}_1^{\hat{z}_2} = (r_1 e^{i\varphi_1})^{a_2 + b_2 i} = e^{(\ln r_1 + i\varphi_1)(a_2 + b_2 i)} = e^{(a_2 \cdot \ln r_1 - b_2 \varphi_1) + (\varphi_1 a_2 + b_2 \cdot \ln r_1) i} =$$

$$= \frac{r_1^{a_2}}{e^{b_2 \varphi_1}} e^{i(\varphi_1 a_2 + b_2 \ln r_1)}$$

$$\ln \hat{z} = \ln(r e^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$$

Ajánlott irodalom

Középiskolai függvénytáblázat

Obádovics: Matematika

Korn, Korn: Matematikai kézikönyv műszakiaknak

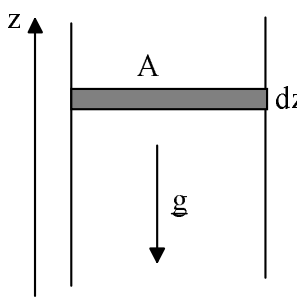
Pachné, Frey: Vektor- és tenzoranalízis

Feynmann: Mai fizika

2. Sztatika, munka, energia

2.1. Egy "magas" hengeres tartályban M moltömegű, T hőmérsékletű gáz van, a tartály "alján" a nyomás p_0 . A tartály tengelyével párhuzamosan g erősségű homogén gravitációs tér hat. Adjuk meg a nyomást a "magasság" függvényében!

A megoldás azon alapszik, hogy a z magasságban felvett vékony dz vastagságú réteg súlya hozzáadódik a fölötté lévő gázoszlop súlyához:



$$p(z+dz) \cdot A + mg = p(z) \cdot A \quad , \quad pV = nRT \quad , \quad V = Adz$$

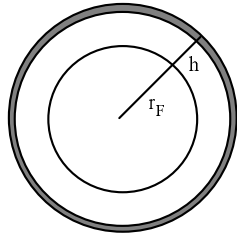
$$dp = p(z+dz) - p(z) = -\frac{mg}{A} = -\frac{Mng}{A} = -\frac{MgpAdz}{RTA} = -\frac{Mgp}{RT} dz$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz \quad , \quad \ln p = -\frac{Mg}{RT} z + C \quad , \quad C = \ln p_0$$

$$\underline{\underline{p = p_0 \cdot e^{-\frac{Mg}{RT} z}}}$$

Eredményül a nevezetes barometrikus formulát kaptuk.

2.2. Határozzuk meg a földi légkör nyomását a tengerszint feletti h magasság függvényében, közelítésként feltéve, hogy M és T állandó!



$$V = A \cdot dh \quad , \quad mg = \gamma \cdot \frac{m \cdot m_F}{r^2} = \gamma \cdot m_F \cdot \frac{m}{(r_F + h)^2}$$

$$p(h+dh) \cdot A + mg = p(h) \cdot A$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M}{RT} \gamma m_F \cdot \frac{dh}{(r_F + h)^2}$$

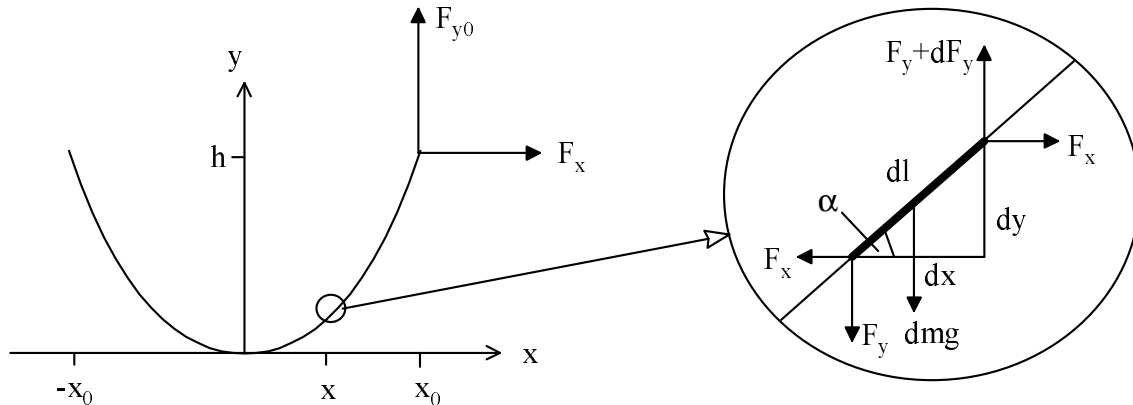
$$\ln p = \frac{M}{RT} \cdot \gamma m_F \cdot \frac{1}{r_F + h} + C \quad , \quad p = C_1 e^{\frac{M}{RT} \gamma m_F \frac{1}{r_F + h}}$$

$$p(0) = p_0 = C_1 e^{\frac{M}{RT} \gamma m_F \frac{1}{r_F}} \quad , \quad C_1 = p_0 e^{\frac{M}{RT} \gamma m_F \frac{-1}{r_F}} \quad , \quad \underline{\underline{p = p_0 e^{\frac{M}{RT} \gamma m_F \left(\frac{1}{r_F + h} - \frac{1}{r_F} \right)}}}$$

Ha $h \ll r_F$, közelítőleg visszkapjuk az előző feladat eredményét:

$$p = p_0 e^{\frac{M}{RT} \gamma m_F \left(\frac{1}{r_F} - \frac{1}{r_F + h} \right)} \approx p_0 e^{\frac{M}{RT} g(-h)}$$

2.3. Két, $h = 3$ m magasan egymástól $2x_0 = 6$ m távol lévő felfüggesztésre egy $l = 8.98$ m hosszú, $\mu = 10$ kg/m tömegű láncot erősítünk. Határozzuk meg a lánc alakját! Meddig fog belógni? Mekkora erő ébred a felfüggesztésekben?



A láncra a két felfüggesztési ponton kívül nem hat külső vízszintes irányú erő, ezért F_x mindenütt ugyanannyi. Egy kis láncdarabot megvizsgálva azt találjuk, hogy a láncban ébredő függőleges irányú erő növekménye éppen a láncdarab súlya:

$$\frac{F_y}{F_x} = \tan \alpha = y' \quad , \quad F_y = F_x \cdot y' \quad , \quad dF_y = dm \cdot g$$

$$dF_y = F_x \cdot dy' = \mu \cdot g \cdot dl = \mu g \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} = \mu g \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

A kapott hiányos másodrendű differenciálegyenletet helyettesítéssel szétválasztható változójúra lehet visszavezetni:

$$p := y' \quad , \quad k := \frac{\mu g}{F_x} \quad , \quad \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = k dx \quad , \quad \text{ar } \operatorname{sh} p = kx + C_1 \quad , \quad p = \operatorname{sh}(kx + C_1)$$

$$y = \int p dx = \frac{1}{k} \operatorname{ch}(kx + C_1) + C_2$$

A görbe az y tengelyre szimmetrikus:

$$y(-x_0) = \frac{1}{k} \operatorname{ch}(-kx_0 + C_1) + C_2 = h$$

$$y(x_0) = \frac{1}{k} \operatorname{ch}(kx_0 + C_1) + C_2 = h$$

$$\frac{1}{k} \operatorname{ch}(-kx_0 + C_1) - \frac{1}{k} \operatorname{ch}(kx_0 + C_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

A lánc hossza:

$$l = \int_{-x_0}^{x_0} dl = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(kx)} dx = \int_{-x_0}^{x_0} \operatorname{ch}(kx) dx = \left[\frac{1}{k} \operatorname{sh}(kx) \right]_{-x_0}^{x_0} = \frac{2}{k} \operatorname{sh}(kx_0)$$

Ez egy egyenlet k -ra, amit sajnos numerikusan kell megoldani, az eredmény:

$$k = 0.539 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F_x = 182 \text{ N}}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F_{y0} = 440 \text{ N}}}$$

$$y(x_0) = \frac{1}{k} \operatorname{ch}(kx_0) + C_2 = h \quad \Rightarrow \quad C_2 = h - \frac{1}{k} \operatorname{ch}(kx_0) = -1.86 \text{ m}$$

$$\underline{\underline{y(0) = \frac{1}{0.539} \operatorname{ch} 0 - 1.86 \text{ m} = 0}} \quad , \quad \text{vagyis a lánc éppen súrolja a földet.}$$

$$y = \frac{1 \text{ m}}{0.539} \operatorname{ch}\left(0.539 \frac{1}{\text{m}} \cdot x\right) - 1.86 \text{ m}$$

A lelógó lánc alakja tehát koszinusz hiperbolikus alakú, ezért hívják ennek a függvénynek a grafikonját láncgörbének.

2.4. Adott a $\phi = g \cdot z$ potenciál. Számítsuk ki a hozzá tartozó $\underline{G}$ erőteret!

$$\underline{G} = -\nabla\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad \underline{F} = \underline{G} \cdot m$$

2.5. Adott az $\underline{F}$ erőter. Létezik-e hozzá potenciál? Ha igen, számítsuk ki!

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} ayz + 2bx \\ axz + 2by \\ axy + 2bz \end{bmatrix} \quad \nabla \times \underline{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax - ax \\ ay - ay \\ az - az \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Tehát létezik potenciál az erőterhez, az alábbiakban meg fogjuk határozni. Ha egy többváltozós függvényt integrálunk az egyik változó szerint, ügyelnünk kell arra, hogy az integrációs állandó a többi változótól még függhet:

$$F_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow \phi = -\int F_x dx = -axyz - bx^2 + f_x(y, z) + C_x$$

$$F_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow \phi = -\int F_y dy = -axyz - by^2 + f_y(x, z) + C_y$$

$$F_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \Rightarrow \phi = -\int F_z dz = -axyz - bz^2 + f_z(x, y) + C_z$$

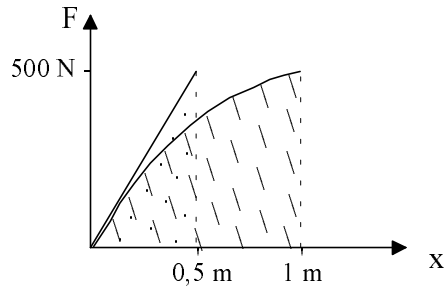
A három képlet összevetéséből megkapjuk a potenciált:

$$\underline{\phi = -a \cdot xyz - b \cdot (x^2 + y^2 + z^2) + c}$$

2.6. A Hook-törvény szerint (első, lineáris közelítés) egy rugó által kifejtett erő az x megnyúlás függvényében: $F_r = -kx$. Mekkora munkát kell végezni l megnyúlás eléréséhez?

$$F = -F_r \quad W = \int_0^l F dx = \int_0^l kx dx = \left[\frac{1}{2} kx^2 \right]_0^l = \frac{1}{2} kl^2$$

2.7. El kell döntenünk, hogy két íj közül melyikkel tudunk messzebbre lőni. Az egyik karakterisztikája: $F_r = -kx$, a másiké $F_r = -k_1x + k_2x^2$, $k = k_1 = 1000 \text{ N/m}$, $k_2 = 500 \text{ N/m}^2$. A nyíl tömege $m = 100 \text{ g}$, mi pedig legfeljebb $F_{\max} = 500 \text{ N}$ erőt tudunk kifejteni.



$$l_1 = \frac{F_{\max}}{k} = 0,5 \text{ m} \quad F_{\max} = k_1 l_2 - k_2 l_2^2$$

$$l_2 = \frac{k_1 \pm \sqrt{k_1^2 - 4k_2 F_{\max}}}{2k_2} = 1 \text{ m}$$

$$W_1 = \int_0^{l_1} kx dx = \frac{1}{2} k l_1^2 = 125 \text{ J}$$

$$W_2 = \int_0^{l_2} (k_1 x - k_2 x^2) dx = \left[\frac{1}{2} k_1 x^2 - \frac{1}{3} k_2 x^3 \right]_0^{l_2} = \frac{1}{2} k_1 l_2^2 - \frac{1}{3} k_2 l_2^3 = 333 \text{ J}$$

$$W = E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad v_0 = \sqrt{\frac{2W}{m}} \quad v_{0,1} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v_{0,2} = 82 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Tehát a második íjjal tudunk messzebbre lőni, ennek a kifeszítésébe nagyobb munkát tudunk befektetni.

3. Kinematika

3.1. Adott az $\underline{a}$ gyorsulás. Számítsuk ki a sebességet és a helyvektort az idő függvényében.

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2} \quad , \quad \underline{v} = \int \underline{a} dt = \underline{v}_0 + \underline{a}t = \begin{bmatrix} v_{0x} + 1 \frac{m}{s^2} \cdot t \\ v_{0y} + 2 \frac{m}{s^2} \cdot t \\ v_{0z} + 3 \frac{m}{s^2} \cdot t \end{bmatrix}$$

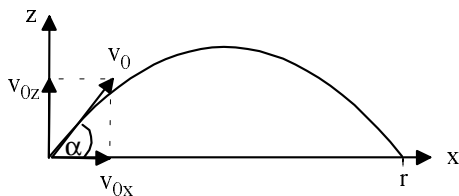
$$\underline{r} = \int \underline{v} dt = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 t + \frac{1}{2} \underline{a} t^2 = \begin{bmatrix} r_{0x} + v_{0x} t + 0.5 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 \\ r_{0y} + v_{0y} t + 1.0 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 \\ r_{0z} + v_{0z} t + 1.5 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 \end{bmatrix}$$

Kihasználtuk, hogy a gyorsulás állandó.

3.2. Egy test a $t=0$ pillanatban az $\underline{r}_0 = (4 \text{ m}, 4 \text{ m}, 4 \text{ m})$ ponton halad keresztül, sebessége az idő függvényében $\underline{v} = (-9 \text{ ms}^{-1} \cdot \sin 3 \text{ s}^{-1}t, 6 \text{ ms}^{-1} \cdot \cos 3 \text{ s}^{-1}t, -10 \text{ ms}^{-2}t)$. Írjuk fel a pályát ($\underline{r}(t)$) és a gyorsulást ($\underline{a}(t)$)!

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \begin{bmatrix} -27 \frac{m}{s^2} \cos 3 \frac{1}{s} t \\ -18 \frac{m}{s^2} \sin 3 \frac{1}{s} t \\ -10 \frac{m}{s^2} \end{bmatrix} \quad \underline{r} = \int \underline{v} dt = \begin{bmatrix} 1 \text{ m} + 3 \text{ m} \cdot \cos 3 \frac{1}{s} t \\ 4 \text{ m} + 2 \text{ m} \cdot \sin 3 \frac{1}{s} t \\ 4 \text{ m} - 5 \frac{m}{s^2} t^2 \end{bmatrix}$$

3.3. Sík terepen v_0 kezdősebességgel elhajítunk egy testet a talajszintről. Milyen szögben kell indítani, hogy a legmesszebbre szálljon?



$$t = \frac{2v_{0z}}{g}$$

$$r = v_{0x} \cdot t = \frac{2v_{0z} v_{0x}}{g} = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha$$

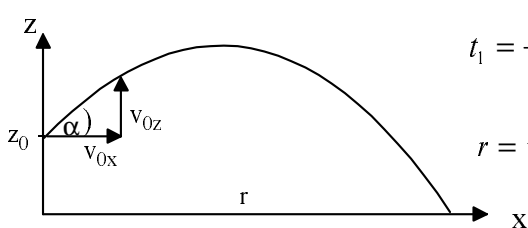
r maximális, ha

$$\sin 2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\frac{d}{d\alpha}(\sin 2\alpha) = 2\cos 2\alpha = 0$$

3.4. A kertész a talajtól mért $z_0 = 1,2 \text{ m}$ magasságban tartja az öntözőcső végét, a víz kifolyási sebessége $v_0 = 10 \text{ m/s}$. Sík terepen mekkora sugarú körben tud locsolni, ha a cső végét $35, 40, 41, 42, 43, 45, 50^\circ$ -os szögben tartja a vízszinteshez képest ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)?



$$t_1 = \frac{v_{0z}}{g}, \quad z_{\max} = z_0 + \frac{v_{0z}^2}{2g} = \frac{1}{2} g t_2^2, \quad t_2 = \sqrt{\frac{2z_{\max}}{g}}$$

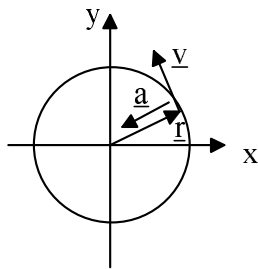
$$r = v_{0x} \cdot (t_1 + t_2) = v_0 \cos \alpha \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\frac{2z_0}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \right)$$

$$r = 10 \text{ m} \cdot \cos \alpha \left(1,019 \sin \alpha + \sqrt{0,2446 + 1,039 \sin^2 \alpha} \right)$$

α [°]	35	40	41	42	43	45	50
r [m]	11.06	11.31	11.32	11.33	11.32	11.28	10.96

Deriválással bonyodalmas lenne a maximumkeresés, a numerikus adatokból viszont egyszerűen megállapítható, hogy 42°-os szögben célszerű tartani a cső végét, ha a lehető legmesszebbre akarunk locsolni.

3.5. Igazoljuk, hogy egyenletes körmozgás esetén $\underline{a} = -\omega^2 \underline{r}$ és $\underline{v} \perp \underline{r}$!



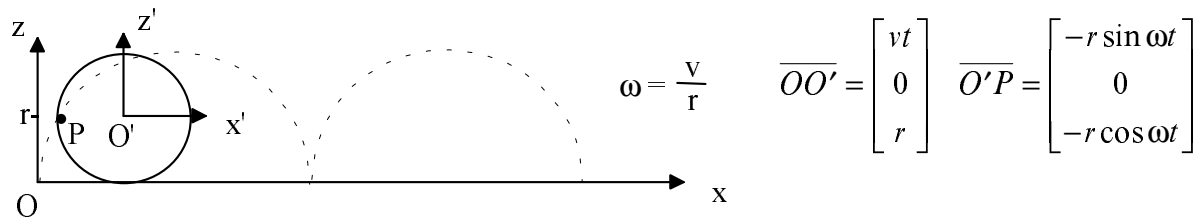
$$\underline{r} = \begin{bmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{v} = \dot{\underline{r}} = \begin{bmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ r\omega \cos \omega t \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{r}} = \begin{bmatrix} -r\omega^2 \cos \omega t \\ -r\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r} \cdot \underline{v} = -r^2 \omega \cos \omega t \sin \omega t + r^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t = 0$$

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} \quad \underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

Itt a gyorsulás kizárólag a sebesség irányának a megváltozásából származik, a neve centripetális gyorsulás.

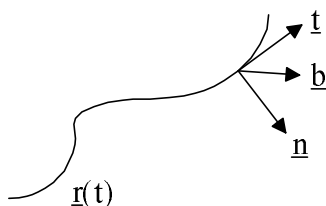
3.6. Egy mozdony kerekének peremén festékkal megjelölünk egy pontot. Írjuk fel a pályáját, sebességét és gyorsulását, ha a mozdony egyenes pályán, egyenletes v sebességgel halad, kerekének sugara pedig r !



$$\underline{r} = \overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'P} = \begin{bmatrix} vt - r \sin \omega t \\ 0 \\ r - r \cos \omega t \end{bmatrix} \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} v - r\omega \cos \omega t \\ 0 \\ r\omega \sin \omega t \end{bmatrix} \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} r\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \\ r\omega^2 \cos \omega t \end{bmatrix}$$

A pályagörbe neve ciklois. A $t = k \cdot 2\pi/\omega$ időpillanatokban $z = 0$ és $v = 0$, vagyis amikor a pont a sít érinti, pillanatnyilag nyugalomban van. Ebből következik, hogy a kereken gördülő járművek kereke és a talaj (pálya) között tapadási súrlódás van.

Térbeli mozgás esetén a pályagörbe minden egyes pontjához egy kísérő triádot rendelhetünk, ez három egységvektor, $\underline{t}$ (érintő), $\underline{n}$ (főnormális) és $\underline{b}$ (binormális), amelyek ebben a sorrendben jobbsodrású ortogonális rendszert alkotnak. Ha a görbét lokálisan körívvel közelítjük, akkor $\underline{t}$ érintőirányú, $\underline{n}$ sugárirányban kifelé mutat, $\underline{b}$ pedig merőleges a körív síkjára. A görbületi sugár $\underline{n}$ irányú, nagysága R . A gyorsulás mindig felbontható két komponensre, a tangenciális és a centripetális gyorsulás összegére, előbbi $\underline{t}$, utóbbi $-\underline{n}$ irányú.



$$\underline{t} = \frac{\underline{v}}{v} \quad \underline{b} = -\frac{\underline{v} \times \underline{a}}{|\underline{v} \times \underline{a}|} \quad \underline{n} = \underline{b} \times \underline{t} \quad R = \frac{v^3}{|\underline{v} \times \underline{a}|}$$

$$\underline{a} = \underline{a}_t + \underline{a}_{cp}$$

Egyenesvonalú mozgás esetén $\underline{v} \times \underline{a} = \underline{0}$, síkmozgás esetén $\underline{v} \times \underline{a} = \underline{b} \cdot f(t)$, a sík egyenlete pedig $(\underline{r} - \underline{r}_0) \cdot \underline{b} = 0$ ($\underline{b}$ állandó).

3.7. Igazoljuk, hogy egyenletes körmozgás esetén a kerületi sebesség állandó, és a görbületi sugár a kör sugara!

$$v = \sqrt{r^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + r^2 \omega^2 \cos^2 \omega t} = r \omega = \text{const.}$$

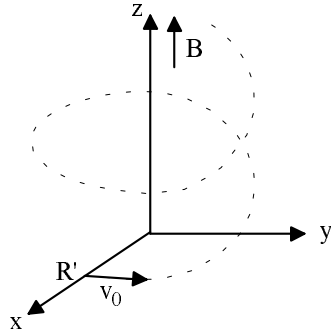
$$R = \frac{v^3}{|\underline{v} \times \underline{a}|} = \frac{v^3}{v \cdot a} = \frac{v^2}{a} = \frac{r^2 \omega^2}{r \omega^2} = r$$

3.8. Igazoljuk, hogy ha a gyorsulás állandó, a mozgás mindig síkmozgás!

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{a}t \quad \underline{v} \times \underline{a} = \underline{v}_0 \times \underline{a} + \underline{a} \times \underline{a}t = \underline{v}_0 \times \underline{a} = \text{const.}$$

4. A mozgásegyenlet megoldásai

4.1. Homogén mágneses térben a $t = 0$ pillanatban az $\underline{r}_0$ pontból $\underline{v}_0$ sebességgel elindul egy elektron (tömege m , töltése $-e$). Írjuk le a mozgását! A koordináta-rendszert úgy választottuk meg, hogy:



$$\underline{r}_0 = \begin{bmatrix} R' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{01} \\ v_{02} \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} \quad R' = \frac{mv_{01}}{eB}$$

A mozgásegyenlet (kis gyorsulások esetén jó közelítéssel):

$$\underline{F} = -e \cdot \underline{v} \times \underline{B} = m \cdot \underline{a}$$

$$\underline{v} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} v_y B \\ -v_x B \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} F_x &= -ev_y B = ma_x \\ F_y &= ev_x B = ma_y \\ F_z &= 0 = ma_z \quad a_z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{eB}{m} v_y & \frac{d^2 v_x}{dt^2} &= -\frac{eB}{m} \cdot \frac{dv_y}{dt} = -\frac{e^2 B^2}{m^2} v_x \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{eB}{m} v_x \end{aligned}$$

A megoldást keressük $v_x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ alakban, ahol A és φ integrációs állandók:

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\frac{e^2 B^2}{m^2} A \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \omega = \frac{eB}{m}, \quad \frac{v_{01}}{\omega} = R'$$

$$v_y = -\frac{m}{eB} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{m}{eB} A\omega \cos(\omega t + \varphi) = -A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$t = 0 : v_{01} > 0 \Rightarrow A \neq 0, \quad v_{0x} = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \quad v_{0y} = v_{01} \Rightarrow A = -v_{01}, \quad a_z = 0 \Rightarrow v_z = v_{02} = \text{const.}$$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} -v_{01} \sin \omega t \\ v_{01} \cos \omega t \\ v_{02} \end{bmatrix} \quad \underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \begin{bmatrix} -v_{01} \omega \cos \omega t \\ -v_{01} \omega \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{r} = \int \underline{v} dt = \begin{bmatrix} \frac{v_{01}}{\omega} \cos \omega t + x_0 \\ \frac{v_{01}}{\omega} \sin \omega t + y_0 \\ v_{02} t + z_0 \end{bmatrix}$$

$$t = 0 : x = R' = R' \cos \omega t + x_0 \Rightarrow x_0 = 0, \quad y = 0 \Rightarrow y_0 = 0, \quad z = 0 \Rightarrow z_0 = 0$$

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} R' \cos \omega t \\ R' \sin \omega t \\ v_{02} t \end{bmatrix} \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} -R' \omega \sin \omega t \\ R' \omega \cos \omega t \\ v_{02} \end{bmatrix} \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} -R' \omega^2 \cos \omega t \\ -R' \omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

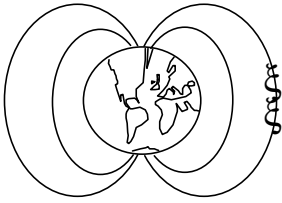
A pálya hélix alakú, a sebesség abszolút értéke állandó, a mozgás vetülete az xy síkra egyenletes körmozgás:

$$v_{xy} = \sqrt{v_{01}^2 \sin^2 \omega t + v_{01}^2 \cos^2 \omega t} = v_{01} = \text{const.} \quad v = \sqrt{v_{01}^2 + v_{02}^2} = \text{const.}$$

$$\underline{v} \perp \underline{a}: \underline{v} \cdot \underline{a} = v_{01} R' \omega^2 \sin \omega t \cos \omega t - v_{01} R' \omega^2 \cos \omega t \sin \omega t + 0 = 0 \Rightarrow \underline{a}_t = 0, \quad a_{cp} = v_{01} \omega = R' \omega^2$$

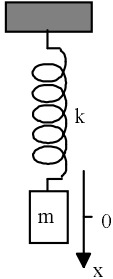
A görbületi sugár:

$$R = \frac{v^3}{|\underline{v} \times \underline{a}|} = \frac{v^3}{\left| -\frac{e}{m} \underline{v} \times (\underline{v} \times \underline{B}) \right|} = \frac{v^3}{\frac{e}{m} v \cdot v_{xy} \cdot B} = \frac{v^2 m}{e B v_{xy}} = \frac{m v_{01}}{e B} \cdot \frac{v_{01}^2 + v_{02}^2}{v_{01}^2} = R' \cdot \left(1 + \frac{v_{02}^2}{v_{01}^2} \right)$$



Ha a mágneses tér nem homogén, akkor a számítás nem ilyen egyszerű, de az eredmény hasonló: a töltött részecskék csavarvonalban mozognak a mágneses tér erővonalai körül. A Föld mágneses tere a Van Allen-övezetben csapdába ejti a világűrbeli érkező korpuszkuláris sugárzást, és a sarkvidékeken vezeti be a légkörbe. Ez okozza a sarki fényt.

4.2. Egy $m = 0.1 \text{ kg}$ tömegű testet $k = 90 \text{ N/m}$ állandójú rugóra függesztünk. A $t = 0$ pillanatban az egyensúlyi helyzethez képest $x(0) = 0.01 \text{ m}$ -rel lejjebb húzzuk, majd nyugalmi helyzetből elengedjük. Írjuk le a mozgását! A rugó tömegét és a súrlódásokat elhanyagolhatjuk.



$$F = ma$$

$$-kx = m \cdot \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

Az általános megoldást keressük $x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$ alakban, ahol A és φ integrációs állandók:

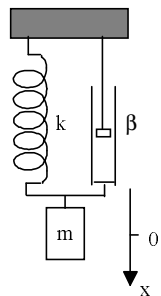
$$-A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k}{m} \cdot A \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 30 \frac{1}{s}$$

$$\left. \begin{aligned} x(0) = 0.01 \text{ m} &= A \cdot \cos(0 + \varphi) \\ \dot{x}(0) = 0 &= -A \omega_0 \sin(0 + \varphi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 0.01 \text{ m} \\ \varphi &= 0 \end{aligned} \quad v_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 4.77 \text{ Hz}$$

A mozgást konkrétan leíró partikuláris megoldás tehát:

$$x = 0.01 \text{ m} \cdot \cos 30 \frac{1}{s} t$$

4.3. Oldjuk meg az előbbi feladatot úgy, hogy vegyük figyelembe a súrlódást. Tegyük fel, hogy a rugó belső súrlódásából és a közegellenállásból származó fékezőerő arányos a pillanatnyi sebességgel, az arányossági tényező β . Mekkora t_1 idő alatt csillapul a kezdeti kitérés 1 mm alá, ha a) $\beta = 0.600 \text{ Ns/m}$; b) $\beta = 6.00 \text{ Ns/m}$; c) $\beta = 60.0 \text{ Ns/m}$?



$$F = ma$$

$$-kx - \beta \dot{x} = m \cdot \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

Keressünk partikuláris megoldásokat $e^{\lambda t}$ alakban!

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + \frac{\beta}{m} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} + \frac{k}{m} \cdot e^{\lambda t} = 0 \quad / : e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 + \frac{\beta}{m} \cdot \lambda + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

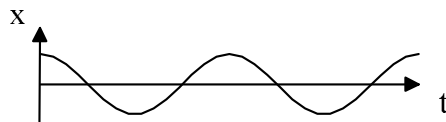
$$a) \quad \beta = 0.6 \frac{Ns}{m} \quad \lambda_{1,2} = -3 \frac{1}{s} \pm 29.8i \frac{1}{s} = -r \pm i\omega_c$$

Az általános megoldást két partikuláris megoldás lineáris kombinációjával állíthatjuk elő:

$$x = K_1 \cdot e^{(-r+i\omega_c)t} + K_2 \cdot e^{(-r-i\omega_c)t} = e^{-rt} (K_1 e^{i\omega_c t} + K_2 e^{-i\omega_c t}) = e^{-rt} [(K_1 + K_2) \cos \omega_c t + i(K_1 - K_2) \sin \omega_c t] = e^{-rt} (K_3 \cos \omega_c t + K_4 \sin \omega_c t) = A_0 e^{-rt} \cos(\omega_c t + \varphi_c)$$

A kezdeti feltételekből $A_0 = 0.01 \text{ m}$, $\varphi_c = 0$, a mozgást leíró partikuláris megoldás:

$$x = 0.01m \cdot e^{-3\frac{1}{s}t} \cdot \cos 29.8 \frac{1}{s} t$$



csillapítatlan rezgőmozgás



csillapított rezgőmozgás

$$0.01m \cdot e^{-3\frac{1}{s}t_1} = 0.001m \quad / \quad \ln$$

$$-3\frac{1}{s}t_1 = \ln 0.1 = -\ln 10 \Rightarrow t_1 = \frac{\ln 10}{3} = 0.768s \quad T = \frac{2\pi}{\omega_c} = 0.211s \quad \frac{t_1}{T} = 3.64$$

Tehát a kezdeti amplitúdó kb. 4 lengés alatt csillapul a tizedére.

$$b) \quad \beta = 6 \frac{Ns}{m} = \sqrt{4km} \quad \lambda_{1,2} = -r = -\sqrt{\frac{k}{m}} = -\omega_0 = -30 \frac{1}{s}$$

Ez az ún. aperiodikus határeset, ilyenkor az általános megoldás alakja:

$$x = K_1 e^{-rt} + K_2 t e^{-rt} \quad \dot{x} = -K_1 r e^{-rt} + K_2 e^{-rt} - K_2 r t e^{-rt}$$

A kezdeti feltételekből a partikuláris megoldás:

$$x(0) = 0.01m = K_1 e^0 \quad K_1 = 0.01m$$

$$\dot{x}(0) = 0 = -K_1 r e^0 + K_2 e^0 \quad K_2 = K_1 r = 0.3 \frac{m}{s} \quad x = 0.01m \cdot e^{-30\frac{1}{s}t} + 0.3 \frac{m}{s} \cdot t \cdot e^{-30\frac{1}{s}t}$$

Az $x(t_1) = 0.001 \text{ m}$ egyenletet csak numerikusan lehet megoldani, az eredmény $t_1 = 0.130 \text{ s}$.

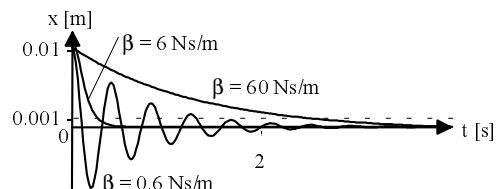
$$c) \quad \beta = 60 \frac{Ns}{m} \quad \lambda_1 = -r = -1.50 \frac{1}{s} \quad \lambda_2 = -598.5 \frac{1}{s} \quad x = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$x(0) = 0.01m = K_1 + K_2 \quad K_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} K_1 \quad K_1 = \frac{0.01m}{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = 0.01m \quad K_2 = -2.51 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s}$$

$$\dot{x}(0) = 0 = -K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2$$

$$x = 0.01m \cdot e^{-1.50\frac{1}{s}t} - 2.51 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s} \cdot e^{-598.5\frac{1}{s}t} \quad t_1 = 1.54s$$

$\beta \text{ [Ns/m]}$	0.01	0.6	6	60	100
$t_1 \text{ [s]}$	46.1	0.768	0.130	1.54	2.56
lengések	220	4	-	-	-



Tétel: a lengések az aperiodikus határesetnél csillapodnak a leggyorsabban, r itt a legnagyobb.

Bizonyítás: az állítás a $\beta \leq \sqrt{4km}$ tartományban triviális, ha viszont $\beta > \sqrt{4km}$, akkor

$$\frac{\beta}{2m} > \frac{\sqrt{4km}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \frac{\beta^2}{4m^2} > \frac{k}{m}, \quad \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} > 0$$

$$r = \frac{\beta}{2m} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} < \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{4m^2} - 2\frac{\beta}{2m}\sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} + \frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m} < \frac{k}{m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\frac{\beta}{2m}\sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} < 2\left(\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}\right) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} > 0$$

4.4. A 4.3. a) példában szereplő testre $F_k = F_0 \cos \omega_k t$ kényszererő hat. Írjuk le a mozgását ($F_0 = 1 \text{ N}$, $\omega_k = 50 \text{ s}^{-1}$)! A kezdeti feltételek a 4.2. példa szerintiek. Mikortól válik a tranziens tag amplitúdója kisebbé, mint a stacionárius tag amplitúdójának tizede?

$$F = ma$$

$$-kx - \beta \dot{x} + F_0 \cos \omega_k t = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_k t$$

Keressünk partikuláris megoldást $x = A_k \cos(\omega_k t - \varphi)$ alakban:

$$-A_k \omega_k^2 \cos(\omega_k t - \varphi) - \frac{\beta}{m} \omega_k A_k \sin(\omega_k t - \varphi) + \frac{k}{m} A_k \cos(\omega_k t - \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos \omega_k t$$

$$-A_k \omega_k^2 (\cos \omega_k t \cos \varphi + \sin \omega_k t \sin \varphi) - A_k \omega_k \frac{\beta}{m} (\sin \omega_k t \cos \varphi - \cos \omega_k t \sin \varphi) +$$

$$\frac{k}{m} A_k (\cos \omega_k t \cos \varphi + \sin \omega_k t \sin \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos \omega_k t$$

$$(-A_k \omega_k^2 \cos \varphi + A_k \omega_k \frac{\beta}{m} \sin \varphi + \frac{k}{m} A_k \cos \varphi) \cos \omega_k t +$$

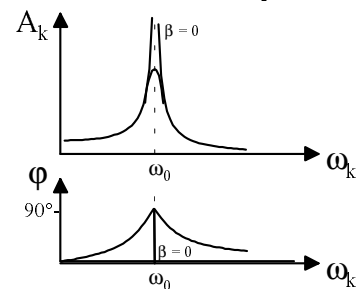
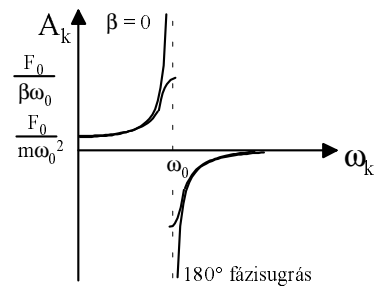
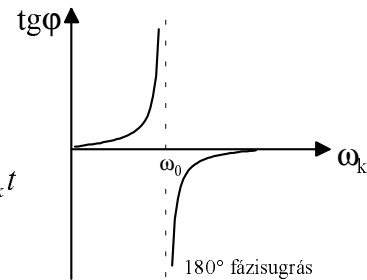
$$(-A_k \omega_k^2 \sin \varphi - A_k \omega_k \frac{\beta}{m} \cos \varphi + \frac{k}{m} A_k \sin \varphi) \sin \omega_k t = \frac{F_0}{m} \cos \omega_k t$$

$$-A_k \omega_k^2 \sin \varphi - A_k \omega_k \frac{\beta}{m} \cos \varphi + \frac{k}{m} A_k \sin \varphi = 0$$

$$-A_k \omega_k^2 \cos \varphi + A_k \omega_k \frac{\beta}{m} \sin \varphi + \frac{k}{m} A_k \cos \varphi = \frac{F_0}{m}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_k \frac{\beta}{m}}{\frac{k}{m} - \omega_k^2} = \frac{\omega_k \frac{\beta}{m}}{\omega_0^2 - \omega_k^2} \quad |\operatorname{tg} \varphi| \rightarrow \varphi$$

$$A_k = \frac{\frac{F_0}{m \cos \varphi}}{\frac{k}{m} - \omega_k^2 + \frac{\beta}{m} \operatorname{tg} \varphi \cdot \omega_k} = \left| \frac{\frac{F_0}{m \cos \varphi}}{\omega_0^2 - \omega_k^2 + \frac{\beta}{m} \operatorname{tg} \varphi \cdot \omega_k} \right|$$



Az általános megoldást a homogén egyenlet általános megoldásából és a fenti partikuláris megoldásból kapjuk:

$$x = \underbrace{A_{tr} e^{-rt} \cos(\omega_c t + \varphi_{tr})}_{\text{tranziens}} + \underbrace{A_k \cos(\omega_k t - \varphi)}_{\text{stacionárius}}$$

$$tg\varphi = \frac{50s^{-1} \cdot 0.6Nsm^{-1}}{900s^{-2} - 2500s^{-2}} = -0.1875 \quad \varphi = 0.1853 \quad (\approx 10^\circ)$$

$$A_k = \left| \frac{\frac{1N}{0.1kg \cdot 0.9829}}{900s^{-2} - 2500s^{-2} - 50s^{-1} \cdot \frac{0.6Nsm^{-1}}{0.1kg} \cdot 0.1875} \right| = 6.14 \cdot 10^{-3} m$$

$$x(0) = A_0 = A_{ir} \cos \varphi_{ir} + A_k \cos(-\varphi)$$

$$\dot{x}(0) = 0 = -r A_{ir} \cos \varphi_{ir} - \omega_c A_{ir} \sin \varphi_{ir} - \omega_k A_k \sin(-\varphi)$$

$$I: \quad r A_{ir} \cos \varphi_{ir} + \omega_c A_{ir} \sin \varphi_{ir} = \omega_k A_k \sin \varphi$$

$$II: \quad A_{ir} \cos \varphi_{ir} = A_0 - A_k \cos \varphi$$

$$I / II: \quad r + \omega_c tg\varphi_{ir} = \frac{\omega_k A_k \sin \varphi}{A_0 - A_k \cos \varphi}$$

$$tg\varphi_{ir} = -0.1184 \quad \varphi_{ir} = -0.1179 \quad A_{ir} = \frac{A_0 - A_k \cos \varphi}{\cos \varphi_{ir}} = 4.00 \cdot 10^{-3} m$$

Tehát a kezdeti feltételeket is kielégítő partikuláris megoldás:

$$x = 4.00 \cdot 10^{-3} m \cdot e^{-\frac{3}{s}t} \cdot \cos(29.8 \frac{1}{s}t - 0.1179) + 6.14 \cdot 10^{-3} m \cdot \cos(50 \frac{1}{s}t - 0.1853)$$

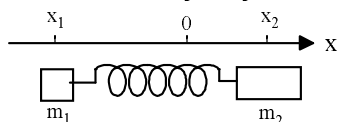
A tranziens rezgés amplitúdója akkor válik kisebbé, mint a stacionárius tag amplitúdójának tizede, amikor

$$t_1 \geq \frac{1}{3} \ln \frac{4.00}{0.1 \cdot 6.14} s = 0.625 s .$$

5. Pontrendszerek, kényszerek, ütközések

5.1. Egy m_1 és egy m_2 tömegű test súrlódásmentes alátámasztáson elhanyagolható tömegű, k állandójú rugóval van összekötve. A tömegeket szét húzzuk, majd elengedjük úgy, hogy a tömegközéppont nyugalomban maradjon. Írjuk le a testek mozgását!

A koordináta-rendszer origóját vegyük fel a tömegközéppontban, a nyugalmi koordinátákat jelöljük 0 indexszel:



$$x_2 - x_1 = l$$

$$x_{20} - x_{10} = l_0$$

Hook: $F = k \cdot (l - l_0)$

Newton III.: $F_1 = F$

$F_2 = -F$

Newton II.:

$$F = m_1 \ddot{x}_1 \quad (1)$$

$$-F = m_2 \ddot{x}_2 \quad (2)$$

$$-F \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \ddot{l} \quad (2)-(1)$$

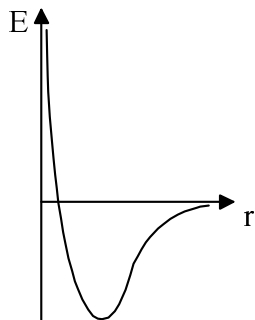
$$-k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} (l - l_0) = \frac{d^2}{dt^2} (l - l_0)$$

Ilyen egyenletet már egyszer megoldottunk, ez volt a harmonikus rezgőmozgás egyenlete. A megoldást közvetlenül felírhatjuk az $x \leftrightarrow l - l_0$, $m \leftrightarrow \mu$ helyettesítéssel, ahol μ a redukált tömeg:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

5.2. Számítsuk ki a kémiai kötések erőállandóit az észlelt IR rezgési hullámszámokból!



Kötés	ν^* [cm ⁻¹]	μ [u]	k [N/m]
H-F	3961	0.950	879
H-Cl	2886	0.972	478
H-Br	2558	0.988	382
H-I	2230	0.992	291
:C≡O:	2143	6.857	1858
:N≡O:	1877	7.467	1552

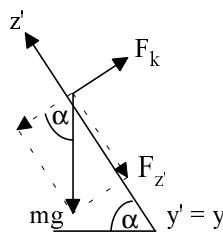
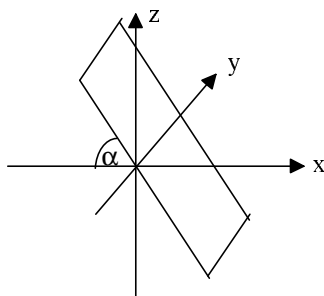
$$\nu^* = \frac{1}{\lambda} \quad c = \lambda \nu = \frac{\lambda}{T} \quad \omega = 2\pi \nu = 2\pi \frac{c}{\lambda} = 2\pi c \nu^*$$

$$k = \mu \omega^2 = 1.66 \cdot 10^{-27} \frac{kg}{u} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot 4\pi^2 \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot \frac{100 cm}{1 m} \right)^2 \cdot \nu^{*2}$$

5.3. Állapítsuk meg egyes rendszerek szabadsági fokait!

Rendszer	Szabadsági fokok száma	Példák
	3	v_x, v_y, v_z
	$3n$	v_{xi}, v_{yi}, v_{zi}
	6	$v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$
	3	He, Ne, Ar, Kr, Xe
	5	$H_2, N_2, O_2, HF, HCl, CO_2, HC\equiv CH, \dots$
	6	$H_2O, NH_3, CH_4, \dots$
	7	CH_3CH_3

5.4. Egy nagy kiterjedésű sík lejtő α szöget zár be a vízszintessel. Az esésvonal mentén fölfelé v_0 kezdősebességgel elindítunk egy testet. Mennyi idő múlva érkezik vissza, ha a súrlódás elhanyagolható?



$$F_k = mg \cdot \cos \alpha$$

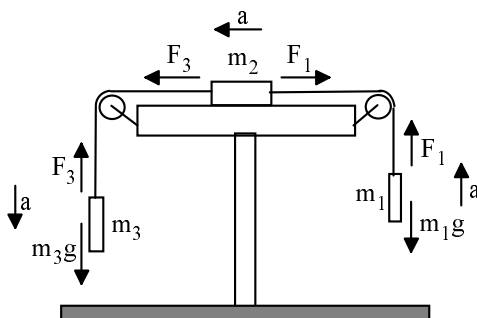
$$F_{z'} = mg \cdot \sin \alpha$$

$$F_{y'} = 0$$

$$t = \frac{2v_0}{g \sin \alpha}$$

A $z'y'$ síkban a "hajítások" hasonlóan zajlanak le, mint a zy síkban, az a különbség, hogy a "nehézségi gyorsulás" nem g , hanem $g \cdot \sin \alpha$.

5.5. Az ábrán három, kényszerekkel összekapcsolt tömegpont látható (a kötelek és a csigák tömege, valamint a súrlódás elhanyagolható). Határozzuk meg a gyorsulást, ha $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 10$ kg, $m_3 = 2$ kg és $g = 9.81$ m/s²!



$$F_1 - m_1 g = m_1 a$$

$$F_3 - F_1 = m_2 a$$

$$m_3 g - F_3 = m_3 a$$

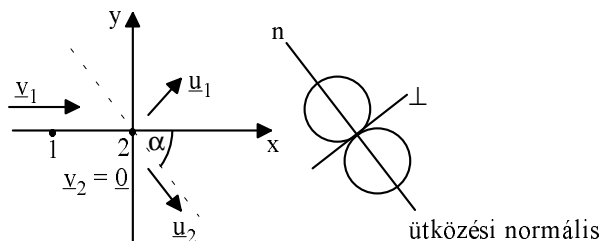
$$a = \frac{m_3 - m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot g$$

$$F_1 = m_1 \cdot (g + a)$$

$$F_3 = m_3 \cdot (g - a)$$

Figyelembe vettük, hogy a csiga megváltoztatja az erő irányát, de a kötélen végig ugyanakkora erő hat, a 2-es test súlyát tartja az asztal, végül az egész rendszer gyorsulása ugyanaz. $a = 0.75$ m/s², $F_1 = 10.6$ N, $F_3 = 18.1$ N.

5.6. Egy x tengely mentén haladó m_1 tömegű golyó súrlódásmentesen és tökéletesen rugalmasan nekiütközik egy m_2 tömegű, az origóban nyugvó másik golyónak. Az ütközési normális α szöget zár be az x tengellyel. Mi lesz a golyók sebessége az ütközés után?



$$\underline{I}_i = \underline{I}_{in} + \underline{I}_{i\perp} \quad \underline{I}_{i\perp} = \text{állandó}$$

$$\underline{F}_c \parallel \underline{n} \Rightarrow \int_c \underline{F}_c dt = \Delta \underline{I}_{1n} = -\Delta \underline{I}_{2n}$$

$$u_{2\perp} = v_{2\perp} = 0 \quad u_{1\perp} = v_{1\perp} = v_1 \sin \alpha$$

$$v_{1n} = v_1 \cos \alpha$$

Impulzus $\underline{n}$ irányban: $m_1 v_1 \cos \alpha = m_1 u_{1n} + m_2 u_{2n} \Rightarrow u_{2n} = \frac{m_1}{m_2} (v_1 \cos \alpha - u_{1n})$

Energia: $m_1 v_1^2 = m_1 (u_{1n}^2 + v_1^2 \sin^2 \alpha) + m_2 u_{2n}^2$

$$m_1 v_1^2 = m_1 u_{1n}^2 + m_1 v_1^2 \sin^2 \alpha + \frac{m_1^2}{m_2} v_1^2 \cos^2 \alpha - \frac{2m_1^2}{m_2} v_1 \cos \alpha \cdot u_{1n} + \frac{m_1^2}{m_2} u_{1n}^2$$

$$\frac{m_1}{m_2} (m_1 + m_2) u_{1n}^2 - \frac{2m_1^2}{m_2} v_1 \cos \alpha \cdot u_{1n} + \frac{m_1}{m_2} (m_1 - m_2) v_1^2 \cos^2 \alpha = 0$$

$$(m_1 + m_2) u_{1n}^2 - 2m_1 v_1 \cos \alpha \cdot u_{1n} + (m_1 - m_2) v_1^2 \cos^2 \alpha = 0$$

$$u_{1n} = \frac{2m_1 v_1 \cos \alpha \pm \sqrt{4m_1^2 v_1^2 \cos^2 \alpha - 4(m_1^2 - m_2^2) v_1^2 \cos^2 \alpha}}{2(m_1 + m_2)}$$

$$u_{1n} = v_1 \cos \alpha \cdot \frac{m_1 \pm m_2}{m_1 + m_2} \begin{cases} = v_1 \cos \alpha & \text{előtti} \\ = v_1 \cos \alpha \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} & \text{ütközés utáni} \end{cases}$$

$$u_{2n} = v_1 \cos \alpha \cdot \frac{m_1}{m_2} \left(1 - \frac{m_1 \pm m_2}{m_1 + m_2} \right) \begin{cases} = 0 & \text{előtti} \\ = v_1 \cos \alpha \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2} & \text{utáni} \end{cases}$$

Ha $\alpha = 0$, akkor az ütközés centrális. További speciális eset, ha $m_1 = m_2$. Azonos tömegek centrális ütközésekor sebesség-, impulzus- és energiacsere történik. Nem centrális ütközésekor az energia még azonos tömegek esetén is megoszlik a két test között, ezen alapszik az ekvipartíció-tétel.

Ajánlott irodalom

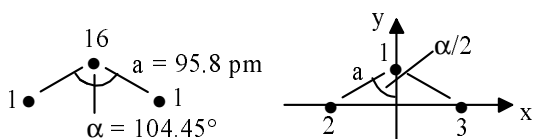
Fizikai kézikönyv műszakiaknak

6. Merev test, tömegközéppont, tehetetlenségi nyomaték, forgások

A **tömegközéppont** számítása diszkrét ponthalmaz ill. folytonos tömegeloszlás esetére:

$$\underline{r}_S = \frac{\sum m_i \underline{r}_i}{\sum m_i} \quad \underline{r}_S = \frac{\int_V \rho \underline{r} dV}{\int_V \rho dV}$$

6.1. Számítsuk ki a vízmolekula tömegközéppontját! A kötéshossz 95.8 pm, a kötésszög 104.45°.

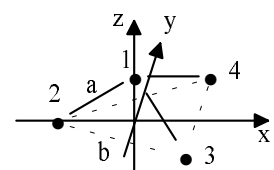


$$x_1 = 0, \quad x_2 = -a \cdot \sin \frac{\alpha}{2}, \quad x_3 = a \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$y_1 = a \cdot \cos \frac{\alpha}{2}, \quad y_2 = y_3 = 0$$

$$\underline{r}_S = \frac{16 \underline{r}_1 + \underline{r}_2 + \underline{r}_3}{18} = \begin{bmatrix} 0 \\ 52.2 \end{bmatrix} pm$$

6.2. Számítsuk ki az ammóniamolekula tömegközéppontját! A kötéshossz $a = 100.8$ pm, a kötésszög $\alpha = 107.3^\circ$.



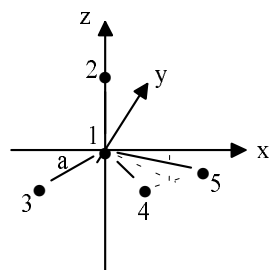
$$m_1 = 14, \quad m_2 = m_3 = m_4 = 1, \quad b = 2 \cdot a \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$x_1 = y_1 = y_2 = z_2 = z_3 = z_4 = 0, \quad x_2 = -b \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}, \quad x_3 = x_4 = b \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$y_3 = -\frac{b}{2}, \quad y_4 = \frac{b}{2}, \quad z_1 = \sqrt{a^2 - x_2^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{3}} = a \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\underline{r}_S = \frac{14 \underline{r}_1 + \underline{r}_2 + \underline{r}_3 + \underline{r}_4}{17} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30.5 \end{bmatrix} pm$$

6.3. Számítsuk ki a metánmolekula tömegközéppontját! A kötéshossz $a = 109.1$ pm, a kötésszög $\alpha = 109^\circ 28'$.



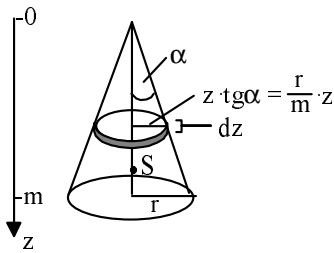
$$m_1 = 12, \quad m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 1$$

$$\beta = \arcsin \frac{\cos(180^\circ - \alpha)}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 35^\circ 15'$$

$$\underline{r}_1 = \underline{0}, \quad \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}, \quad \underline{r}_3 = \begin{bmatrix} -a \sin(180^\circ - \alpha) \\ 0 \\ -a \cos(180^\circ - \alpha) \end{bmatrix}, \quad \underline{r}_4 = \begin{bmatrix} a \cos \frac{\alpha}{2} \cos \beta \\ -a \sin \frac{\alpha}{2} \\ -a \cos(180^\circ - \alpha) \end{bmatrix}, \quad \underline{r}_5 = \begin{bmatrix} a \cos \frac{\alpha}{2} \cos \beta \\ a \sin \frac{\alpha}{2} \\ -a \cos(180^\circ - \alpha) \end{bmatrix}$$

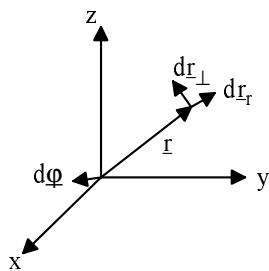
$$\underline{r}_S = \frac{12\underline{r}_1 + \underline{r}_2 + \underline{r}_3 + \underline{r}_4 + \underline{r}_5}{16} = \underline{0}$$

6.4. Számítsuk ki egy homogén anyagból készült egyenes kúp tömegközéppontját!



$$z_S = \frac{\int_0^m \rho \cdot z \cdot \frac{r^2}{m^2} z^2 \pi dz}{\int_0^m \rho \frac{r^2}{m^2} z^2 \pi dz} = \frac{\rho \frac{r^2 \pi}{m^2} \left[\frac{1}{4} z^4 \right]_0^m}{\rho \frac{r^2 \pi}{m^2} \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_0^m} = \frac{\rho r^2 \pi \frac{m^2}{4}}{\rho \cdot \frac{1}{3} m r^2 \pi} = \frac{3}{4} m$$

A forgómozgás tárgyalásához először tekintsük át a szögelfordulás, szögsebesség, szöggyorsulás, sebesség és gyorsulás kapcsolatát:



$$d\underline{r} = d\underline{r}_r + d\underline{r}_\perp, \quad d\underline{r}_\perp = d\underline{\phi} \times \underline{r}, \quad \underline{\omega} = \frac{d\underline{\phi}}{dt}, \quad \underline{\beta} = \frac{d\underline{\omega}}{dt}$$

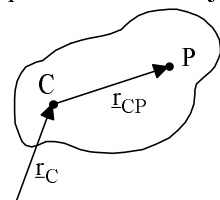
$$\underline{v} = \underline{v}_r + \underline{v}_\perp = \frac{d\underline{r}_r}{dt} + \frac{d\underline{r}_\perp}{dt} = \underline{e}_r \frac{dr}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r}$$

$$\underline{a} = \underline{e}_r \frac{d^2 r}{dt^2} + \underline{\omega} \times \underline{e}_r \cdot \frac{dr}{dt} + \underline{\beta} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times (\underline{e}_r \frac{dr}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r})$$

Gömbmozgás esetén r állandó:

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}, \quad \underline{a} = \underline{\beta} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$$

Ha egy merev test gömbmozgást végez egy C pont körül, akkor a C pontra vonatkozó $\underline{\omega}$ és $\underline{\beta}$ a merev test minden pontjára ugyanaz, r_{CP} időben állandó. A merev test általános mozgása a C pont translációja és a C pont körüli rotáció eredőjeként írható le:



$$\underline{r}_P = \underline{r}_C + \underline{r}_{CP}$$

$$\underline{v}_P = \underline{v}_C + \underline{v}_{CP} = \underline{v}_C + \underline{\omega} \times \underline{r}_{CP}$$

$$\underline{a}_P = \underline{a}_C + \underline{\beta} \times \underline{r}_{CP} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{CP})$$

A merev test translációjának impulzusa:

$$\underline{I} = \int_V \rho \underline{v}_P dV = m \cdot \underline{v}_S$$

A C pontra vonatkozó impulzusnyomaték:

$$\underline{L}_C = \int_V \rho \underline{r}_{CP} \times \underline{v}_P dV = \int_V \rho \underline{r}_{CP} \times (\underline{v}_C + \underline{\omega} \times \underline{r}_{CP}) dV =$$

$$= \int_V \rho \underline{r}_{CP} dV \times \underline{v}_C + \int_V \rho \underline{r}_{CP} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{CP}) dV = m \cdot \underline{r}_{CS} \times \underline{v}_C + \int_V \rho (E r_{CP}^2 - \underline{r}_{CP} \circ \underline{r}_{CP}) dV \cdot \underline{\omega}$$

Az átalakításokkal az volt a célunk, hogy a test geometriai jellemzőit elválasszuk a mozgás jellemzőitől. Az utolsó lépésben kihasználtuk a kifejtési tételt és a kapott képletet a komponensekkel bizonyítjuk:

$$\underline{r} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = r^2 \underline{\omega} - (\underline{r} \cdot \underline{\omega}) \underline{r} = \begin{bmatrix} r^2 \omega_x - (r_x \omega_x + r_y \omega_y + r_z \omega_z) r_x \\ r^2 \omega_y - (r_x \omega_x + r_y \omega_y + r_z \omega_z) r_y \\ r^2 \omega_z - (r_x \omega_x + r_y \omega_y + r_z \omega_z) r_z \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} r^2 \omega_x - (r_x r_x \omega_x + r_x r_y \omega_y + r_x r_z \omega_z) \\ r^2 \omega_y - (r_y r_x \omega_x + r_y r_y \omega_y + r_y r_z \omega_z) \\ r^2 \omega_z - (r_z r_x \omega_x + r_z r_y \omega_y + r_z r_z \omega_z) \end{bmatrix} = r^2 \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\omega} - (\underline{r} \circ \underline{r}) \cdot \underline{\omega}$$

A kijelölt térfogati integrál a merev test jellemzője, a neve tehetetlenségi tenzor:

$$\underline{\underline{\Theta}}_C = \int_V \rho (\underline{\underline{E}} r_{CP}^2 - \underline{r}_{CP} \circ \underline{r}_{CP}) dV$$

A C pontra vonatkozó impulzusnyomaték tehát:

$$\underline{L}_C = m \underline{r}_{CS} \times \underline{v}_C + \underline{\underline{\Theta}}_C \cdot \underline{\omega}$$

Speciális esetek:

Zérus transláció: $\underline{v}_C = \underline{0}$

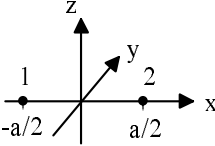
Szabad forgás: $C \equiv S$

$$\underline{L}_C = \underline{\underline{\Theta}}_C \cdot \underline{\omega}$$

$$\underline{L}_S = \underline{\underline{\Theta}}_S \cdot \underline{\omega}$$

A definícióból következik, hogy a tehetetlenségi tenzor szimmetrikus, ezért sajátvektorai ortogonálisak. A merev test ún. főtehetetlenségi tengelyei egymást a tömegközéppontban metszik, irányukat a sajátvektorok adják. A sajátértékek a főtehetetlenségi tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok. Az impulzusnyomaték nem párhuzamos a szögsebességgel, kivéve, ha a forgástengely párhuzamos valamelyik tehetetlenségi tengellyel.

6.5. Számítsuk ki néhány kétatomos elemmolekula tehetetlenségi tenzorát az ábra szerinti koordináta-rendszerben! ($1 \text{ u} = 1.6605655 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$)



$$\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_1^2 = r_2^2 = \frac{a^2}{4}, \quad \underline{r}_1 \circ \underline{r}_1 = \underline{r}_2 \circ \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$m_1 = m_2 = m$$

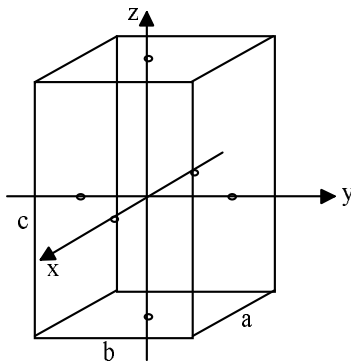
$$\underline{\underline{E}} r_1^2 - \underline{r}_1 \circ \underline{r}_1 = \underline{\underline{E}} r_2^2 - \underline{r}_2 \circ \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{4} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\Theta}} = \sum m_i (\underline{\underline{E}} r_i^2 - \underline{r}_i \circ \underline{r}_i) = \frac{m}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

A sajátirányok: x, y, z

A sajátértékek: $\Theta_x = 0, \quad \Theta_y = \Theta_z = \frac{m}{2} a^2$

Molekula	a [pm]	m [u]	$\Theta_v = \Theta_z$ [10^{-48} kgm^2]
H ₂	74.611	1.007825	4.6582
D ₂	74.164	2.0140	9.1975
N ₂	109.75	14.003074	140.04
O ₂	120.8	15.994915	193.8
F ₂	141.7	18.998403	316.7
³⁵ Cl ₂	198.8	34.968852	1147
³⁷ Cl ₂	198.8	36.965903	1213
⁷⁹ Br ₂	229.0	78.918336	3436
⁸¹ Br ₂	229.0	80.916289	3523
I ₂	266.2	126.904473	7467

6.6. Számítsuk ki az ábrán látható m tömegű, homogén ρ sűrűségű téglatest tehetetlenségi tenzorát az origóra vonatkoztatva!



$$\underline{\underline{\Theta}} = \int_V (\underline{E}r^2 - \underline{r} \circ \underline{r}) \rho dV \quad m = abc\rho$$

$$\Theta_{xx} = \int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + y^2 + z^2 - x^2) \rho dx dy dz =$$

$$\int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[y^2 x + z^2 x \right]_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho dy dz = \int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (ay^2 + az^2) \rho dy dz =$$

$$\int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \left[\frac{a}{3} y^3 + az^2 y \right]_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho dz = \int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \left(\frac{ab^3}{12} + abz^2 \right) \rho dz = \left[\frac{ab^3}{12} z + \frac{ab}{3} z^3 \right]_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \rho = \left(\frac{ab^3 c}{12} + \frac{abc^3}{12} \right) \rho =$$

$$= \frac{m}{12} (b^2 + c^2)$$

$$\Theta_{yy} = \frac{m}{12} (a^2 + c^2) \quad \Theta_{zz} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$$

$$\Theta_{xy} = \Theta_{yx} = \int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (-xy) \rho dx dy dz = - \int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy dz = 0$$

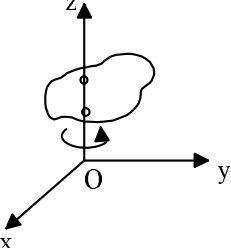
$$\Theta_{xz} = \Theta_{zx} = 0 \quad \Theta_{yz} = \Theta_{zy} = 0$$

Összefoglalva, a tehetetlenségi tenzor, a sajátértékek és a sajátvektorok:

$$\underline{\underline{\Theta}} = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\Theta}} \cdot \underline{\omega}_i = \Theta_i \underline{\omega}_i$$

$$\Theta_1 = \frac{m}{12} (b^2 + c^2), \quad \underline{\omega}_1 = \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_2 = \frac{m}{12} (a^2 + c^2), \quad \underline{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_3 = \frac{m}{12} (a^2 + b^2), \quad \underline{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

Fontos speciális eset a rögzített tengely körüli forgás. A z tengelyt vegyük fel a forgástengelyen, ekkor:



$$C \equiv O$$

$$\underline{v}_C = 0$$

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\underline{L} = \underline{0} + \underline{\Theta} \cdot \underline{\omega} = \begin{bmatrix} \Theta_{xz} \omega_z \\ \Theta_{yz} \omega_z \\ \Theta_{zz} \omega_z \end{bmatrix} \quad L_z = \Theta_{zz} \omega_z$$

$$\Theta_{zz} = \int_V (x^2 + y^2) \rho dV = \int_V r'^2 \rho dV$$

A merev testre ható külső erők eredője megszabja a tömegközéppont gyorsulását és egyenlő az impulzus időderiváltjával:

$$\underline{F} = \int_V \underline{f} dV = \int_V \rho \underline{a} dV = m \underline{a}_S = \frac{d\underline{L}}{dt}$$

A külső forgatónyomatékok eredője:

$$\underline{M}_C = \int_V \underline{r}_{CP} \times \underline{f} dV = \int_V \underline{r}_{CP} \times \underline{a}_P \rho dV = \int_V \underline{r}_{CP} \times (\underline{a}_C + \underline{\beta} \times \underline{r}_{CP} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{CP})) \rho dV =$$

$$= m \underline{r}_{CS} \times \underline{a}_C + \underline{\Theta}_C \cdot \underline{\beta} + \underline{\omega} \times (\underline{\Theta}_C \cdot \underline{\omega})$$

Az utolsó tag integrálásánál figyelembe vettük, hogy:

$$\underline{r} \times (\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})) = \underline{\omega} \times (\underline{r} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}))$$

$$\underline{r} \times (\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})) = \underline{r} \times ((\underline{\omega} \cdot \underline{r}) \underline{\omega} - \omega^2 \underline{r}) = (\underline{\omega} \cdot \underline{r}) \underline{r} \times \underline{\omega}$$

$$\underline{\omega} \times (\underline{r} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})) = \underline{\omega} \times (r^2 \underline{\omega} - (\underline{r} \cdot \underline{\omega}) \underline{r}) = -(\underline{r} \cdot \underline{\omega}) \underline{\omega} \times \underline{r} = (\underline{\omega} \cdot \underline{r}) \underline{r} \times \underline{\omega}$$

Másrésről az impulzusnyomaték idő szerinti deriváltja:

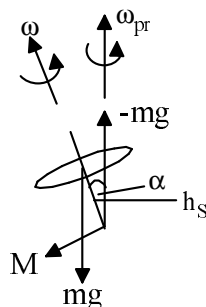
$$\underline{\dot{L}}_C = \frac{d}{dt} \int_V \underline{r}_{CP} \times \underline{v}_P \rho dV = \int_V (\underline{\omega} \times \underline{r}_{CP}) \times \underline{v}_P \rho dV + \int_V \underline{r}_{CP} \times \underline{a}_P \rho dV = m(\underline{\omega} \times \underline{r}_{CS}) \times \underline{v}_C + \underline{M}_C$$

A forgásokra vonatkozó mozgásegyenlet nemlineáris (ω -ban másodfokú), ezért általános esetben a megoldása nem könnyű. Ha rögzített tengelyű forgás esetén a forgástengely nem esik egybe valamelyik tehetetlenségi tengellyel, a csapágyakban erők ébrednek ($\underline{M}_C$ kifejezésében az első és harmadik tag). Mindez alapvető a centrifugák üzembiztos működtetése szempontjából. Egyenletes szabad forgás ($\underline{M}_C = \underline{0}$, $\underline{r}_{CS} = \underline{0}$, $\underline{\beta} = \underline{0}$) csak valamelyik főtehetetlenségi tengely körül lehetséges. A legkisebb és a legnagyobb tehetetlenségi nyomatékhoz tartozó tengely körül a forgás stabil, a középsőhöz tartozó körül instabil (l. giroszkóp ill. bukácsolva repülő szabálytalan alakú tárgyak).

6.7. A precesszióra az alábbi közelítő egyenlet érvényes, feltéve, hogy a precesszióból származó impulzusnyomaték lényegesen kisebb a teljes impulzusnyomatéknál:

$$\underline{M} = \underline{\omega}_{pr} \times \underline{L}$$

Értelmezzük a tételt egy bűgőcsigára és fejezzük ki a precesszió szögsebességét!



$$M = mgh_S \sin \alpha = \omega_{pr} \cdot \Theta \omega \cdot \sin \alpha$$

$$\omega_{pr} = \frac{mgh_S}{\Theta \omega}$$

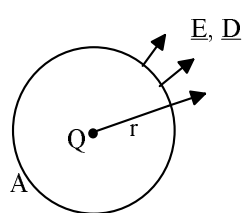
7. Elektrodinamika

A Maxwell-egyenletek:

Alapegyenletek:	Lorentz-erő:	Anyagi egyenletek:
$\nabla \cdot \underline{D} = \rho$ $\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \underline{B} = 0$ $\nabla \times \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$	$\underline{F} \approx Q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$ $\underline{f} \approx \rho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B}$	$\underline{D} = \epsilon \underline{E}$ $\underline{B} = \mu \underline{H}$ $\underline{j} = \sigma \underline{E}$

7.1. Számítsuk ki egy ponttöltés elektrosztatikus terét homogén izotróp szigetelő közegben! Adjuk meg a potenciált is!

Alapfeltevésünk, hogy az elektrosztatikus tér gömbszimmetrikus lesz, a Gauss-tételhez zárt felületként egy gömböt veszünk fel:



$$\underline{D} = \epsilon \underline{E}$$

$$\nabla \cdot \underline{D} = \rho$$

$$\oint_A \underline{D} \cdot d\underline{A} = \int_V \rho dV$$

$$4r^2 \pi D = Q$$

$$D = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Coulomb:

$$\underline{F} = Q' \underline{E} =$$

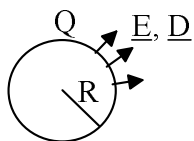
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{QQ'}{r^2} \cdot \underline{e}_r$$

$$U_{AB} = \phi(A) - \phi(B) = \int_A^B \underline{E} dr = \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{-1}{r} \right]_A^B = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

$$\phi(\infty) = 0, \quad \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r}, \quad \underline{E} = -\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \underline{e}_r$$

7.2. Egy R sugarú vezető gömbre Q töltést viszünk fel. Számítsuk ki a terét homogén izotróp közegben, adjuk meg a potenciált is!

A vezetőn a töltés egyenletesen oszlik el, a tér gömbszimmetrikus:

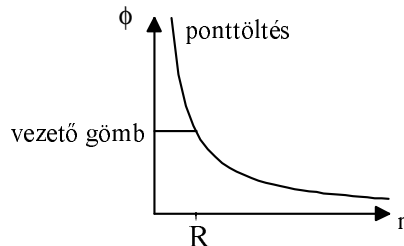


$$\text{Ha } r < R, \quad D = E = 0$$

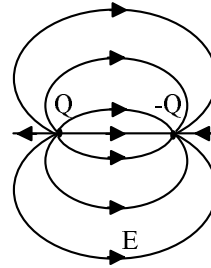
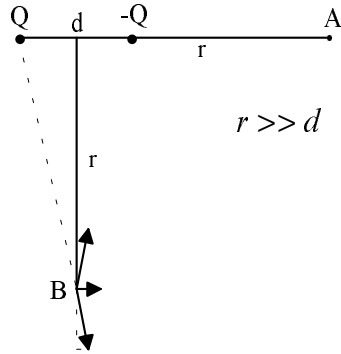
$$r \geq R, \quad D = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

$$\oint_A \underline{D} \cdot d\underline{A} = \int_V \rho dV$$



7.3. Számítsuk ki egy dipólus terét a dipólustól nagy távolságra lévő A és B pontokban!



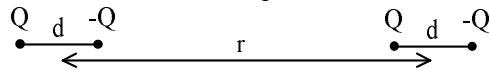
$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{-Q}{\left(r - \frac{d}{2}\right)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{+Q}{\left(r + \frac{d}{2}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \left(\frac{-1}{1 - \frac{d}{r} + \frac{d^2}{4r^2}} + \frac{1}{1 + \frac{d}{r} + \frac{d^2}{4r^2}} \right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \left(-1 - \frac{d}{r} + \frac{d^2}{4r^2} + 1 - \frac{d}{r} - \frac{d^2}{4r^2} \right) = -\frac{1}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{Qd}{r^3}$$

$$E_B = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r^2 + \frac{d^2}{4}} \cdot \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{d^2}{4r^2}} \cdot \frac{d}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d^2}{4r^2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Qd}{r^3} \cdot \left(1 + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Qd}{r^3}$$

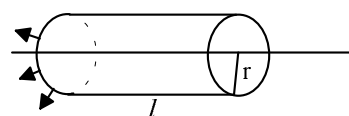
7.4. Mekkora erő lép fel az ábra szerinti elrendezésben a két dipólus között?



$$F = E_1 Q - E_2 Q = \frac{Q^2 d}{2\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{-1}{\left(r - \frac{d}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(r + \frac{d}{2}\right)^3} \right) = \frac{Q^2 d}{2\pi\epsilon r^3} \cdot \left(\frac{-1}{1 - \frac{3d}{2r} + \frac{3d^2}{4r^2} - \frac{d^3}{8r^3}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1 + \frac{3d}{2r} + \frac{3d^2}{4r^2} + \frac{d^3}{8r^3}} \right) \approx \frac{Q^2 d}{2\pi\epsilon r^3} \cdot \left(-1 - \frac{3d}{2r} + 1 - \frac{3d}{2r} \right) = \frac{-3}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{(Qd)^2}{r^4}$$

7.5. Végtelen hosszú egyenes vezetőn hosszegységenként q töltés van. Milyen az elektrosztatikus tér?



$$q = \frac{dQ}{dl}$$

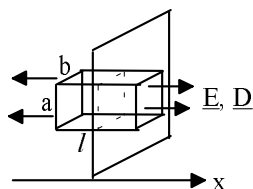
$$\oint_A \underline{D} \cdot d\underline{A} = \int_V \rho dV \quad D \cdot 2r\pi \cdot l = q \cdot l$$

$$D = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{q}{r}, \quad E = \frac{1}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{r}, \quad U_{AB} = \int_A^B E dr = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_B}{r_A}, \quad \phi(r_0) := 0, \quad \phi = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_0}{r}$$

A tér hengersizmetrikus. Ebben az esetben nem oldható meg, hogy $\phi(\infty) = 0$ legyen.

7.6. Végtelen kiterjedésű vezető síklemezen felületegységenként q töltés van. Milyen az elektrosztatikus tér?

A síklemezre merőleges homogén tér alakul ki:



$$q = \frac{dQ}{dA}$$

$$2D \cdot ab = q \cdot ab$$

$$E = \frac{1}{2\epsilon} \cdot q$$

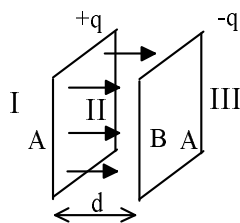
$$\oint_A \underline{D} \cdot d\underline{A} = \int_V \rho dV$$

$$D = \frac{q}{2}$$

$$\phi = -\int E dx = \phi_0 - \frac{q}{2\epsilon} x$$

7.7. A síkkondenzátorban két párhuzamos fémllemezen azonos nagyságú, de ellentétes előjelű töltés található. Határozzuk meg az elektrosztatikus teret, és vezessünk le képletet a kapacitásra!

A számítást lényegesen leegyszerűsíti, ha a véges méretű lemezeket végtelen síklemezként közelítjük:



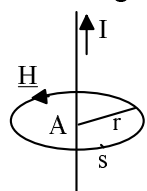
$$\text{I, III: } E = \frac{1}{2\epsilon} q - \frac{1}{2\epsilon} q = 0$$

$$\text{II: } E = \frac{1}{2\epsilon} q + \frac{1}{2\epsilon} q = \frac{1}{\epsilon} q = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{Q}{A}$$

$$U_{AB} = \int_A^B E dx = Ed = \frac{d}{\epsilon A} \cdot Q, \quad C = \frac{\epsilon A}{d}, \quad Q = U \cdot C$$

7.8. Végtelen hosszú egyenes huzalban I erősségű áram folyik. Milyen lesz a mágneses tere?

A probléma hengersizmetrikus, a mágneses tér erővonalai gyűrűk lesznek a huzal mint tengely körül:

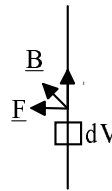


$$\oint_s \underline{H} \cdot d\underline{s} = \int_A \underline{j} \cdot d\underline{A}$$

$$H = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

$$H \cdot 2r\pi = I$$

$$B = \mu H = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$



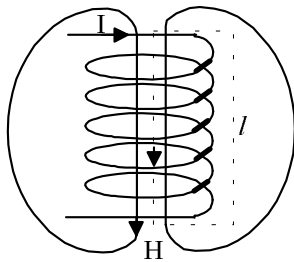
Ha az iménti vezető terébe egy másik, vele párhuzamos áramjárta huzalt helyezünk, megegyező áramirány esetén vonzó, ellentétes áramirány esetén taszító erőhatás lép fel:

$$d\underline{F} = \underline{f} dV = \underline{j} \times \underline{B} dA dl$$

$$\frac{dF}{dl} = I_2 B_1 = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{r}$$

7.9. Határozzuk meg egy hosszú tekercs (szolenoid) mágneses terét! Vezessünk le képletet az önindukciós együtthatóra!

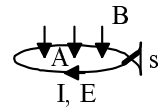
Közelítésképpen a tekercset végtelen hosszúnak tekintjük és föltesszük, hogy a tekercs belsejében a tér homogén, kívül pedig elhanyagolható.



$$\oint_s \underline{H} \cdot d\underline{s} = \int_A \underline{j} \cdot d\underline{A}$$

$$H \cdot l = I \cdot N$$

$$B = \mu \cdot \frac{I \cdot N}{l}$$



$$H = \frac{I \cdot N}{l}$$

$$\oint_s \underline{E} \cdot d\underline{s} = - \int_A \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \cdot d\underline{A}$$

$$U_1 = -\mu \frac{AN}{l} \cdot \frac{dI}{dt}, \quad U_i = N \cdot U_1 = -\mu \frac{AN^2}{l} \cdot \frac{dI}{dt} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

A fogyasztói előjelkonvenció szerint a feszültségesést tekintjük pozitívnak:

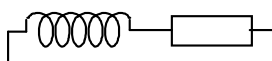
$$U = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Az atommagokat felfoghatjuk, mint parányi rúd-mágneseket, amelyeket $\underline{\mu}_m$ mágneses nyomaték jellemez. Ha ezeket külső $\underline{B}$ mágneses térbe helyezzük, spinjüktől függően különböző irányokba állhatnak be a térhez képest, az ebből származó energia $\underline{\mu}_m \cdot \underline{B}$. Ha egy rádiófrekvenciás foton $h\nu$ energiája éppen megfelel két állapot energiakülönbségének, át tudja fordítani a magot és elnyelődik. Ezen alapszik a magmágneses rezonanciaspektroszkópia (Nuclear Magnetic Resonance, NMR), amely az egyik legfontosabb szerkezetvizsgáló módszer.

7.10. A Varian Gemini 200 MHz-es NMR készülék szupravezető mágnesének adatai: a térerő $B = 4.698 \text{ T}$, az áramerősség $I = 39.33 \text{ A}$, a tekercs induktivitása $L = 70 \text{ H}$, a tekercs hossza $l = 200 \text{ mm}$, a drift (az üzemi frekvencia csökkenése) 2 Hz/h . Mekkora a tekercs menetszáma, átmérője és formális ellenállása?

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l} \Rightarrow N = \frac{lB}{\mu_0 I} = \frac{0.2 \text{ m} \cdot 4.698 \text{ T}}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 39.33 \text{ A}} = 19011$$

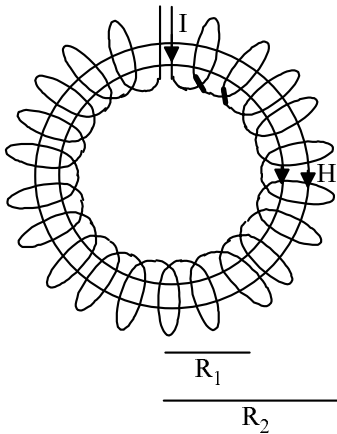
$$L = \mu_0 \frac{AN^2}{l} \Rightarrow A = \frac{Ll}{\mu_0 N^2} = \frac{L\mu_0 I^2}{lB^2} = \frac{d^2 \pi}{4} \Rightarrow d = \frac{I}{B} \cdot \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{L\mu_0}{l}} = 0.198 \text{ m}$$



$$L \cdot \frac{dI}{dt} + I \cdot R = 0 \quad (B \sim I, \nu_0 \sim B)$$

$$R = -\frac{L}{I} \cdot \frac{dI}{dt} \approx -\frac{L}{\nu_0} \cdot \frac{\Delta \nu}{\Delta t} = \frac{70 \text{ H}}{3600 \text{ s}} \cdot \frac{2 \text{ Hz}}{200 \text{ MHz}} = 1.94 \cdot 10^{-10} \Omega$$

7.11. Határozzuk meg a toroid terét és önindukcióját!



$$\oint_s \underline{H} \cdot d\underline{s} = \int_A \underline{j} \cdot d\underline{A}$$

$$H = \frac{N}{2r\pi} \cdot I$$

$$H \cdot 2r\pi = \begin{cases} 0, & \text{ha } r < R_1 \\ IN, & \text{ha } R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0, & \text{ha } r > R_2 \end{cases} \quad B = \mu \cdot \frac{N}{2r\pi} \cdot I$$

Keskeny toroid: $R_1 \approx R_2 = R$

$$L = \mu \cdot \frac{AN^2}{2R\pi}$$

7.13. Vezessük le a töltésmegmaradás törvényét a Maxwell-egyenletekből!

$$\text{Div Rot } \underline{H} = 0 = \nabla \cdot \underline{j} + \nabla \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \underline{j} + \frac{\partial \nabla \cdot \underline{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

7.14. Vezessük le a Kirchhoff-törvényeket a Maxwell-egyenletekből:

A csomóponti törvényt a töltésmegmaradásból kapjuk, hozzátéve, hogy a csomópontban töltés nem halmozódhat fel ill. nem fogyatkozhat meg:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \underline{j} = 0, \quad \int_V \nabla \cdot \underline{j} dV = \int_A \underline{j} \cdot d\underline{A} = \sum_i I_i = 0$$

A huroktörvény teljesülésének előfeltétele, hogy az áramkör ne mozogjon mágneses térben ill. ne legyen jelen változó mágneses tér:

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \underline{E} = 0, \quad \int_A (\nabla \times \underline{E}) \cdot d\underline{A} = \oint_s \underline{E} \cdot d\underline{s} = \sum_i U_i = 0$$

7.15. Vezessünk le hullámeqyenleteket a Maxwell-egyenletekből homogén izotróp közeget feltételezve!

$$\text{Grad Div } \underline{E} = \nabla^2 \underline{E} + \nabla \times \nabla \times \underline{E} = \frac{\nabla \rho}{\epsilon}$$

$$\nabla^2 \underline{E} - \mu \frac{\partial \underline{j}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = \frac{\nabla \rho}{\epsilon} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

$$\nabla^2 \underline{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \underline{j}}{\partial t}$$

Másrésről:

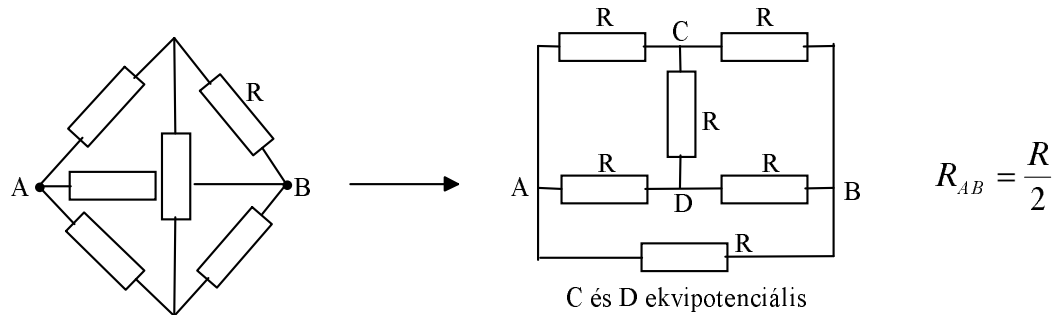
$$\text{Grad Div } \underline{B} = \nabla^2 \underline{B} + \nabla \times \nabla \times \underline{B} = 0$$

$$\nabla^2 \underline{B} + \mu \nabla \times \underline{j} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \underline{B} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2} = -\mu \nabla \times \underline{j}$$

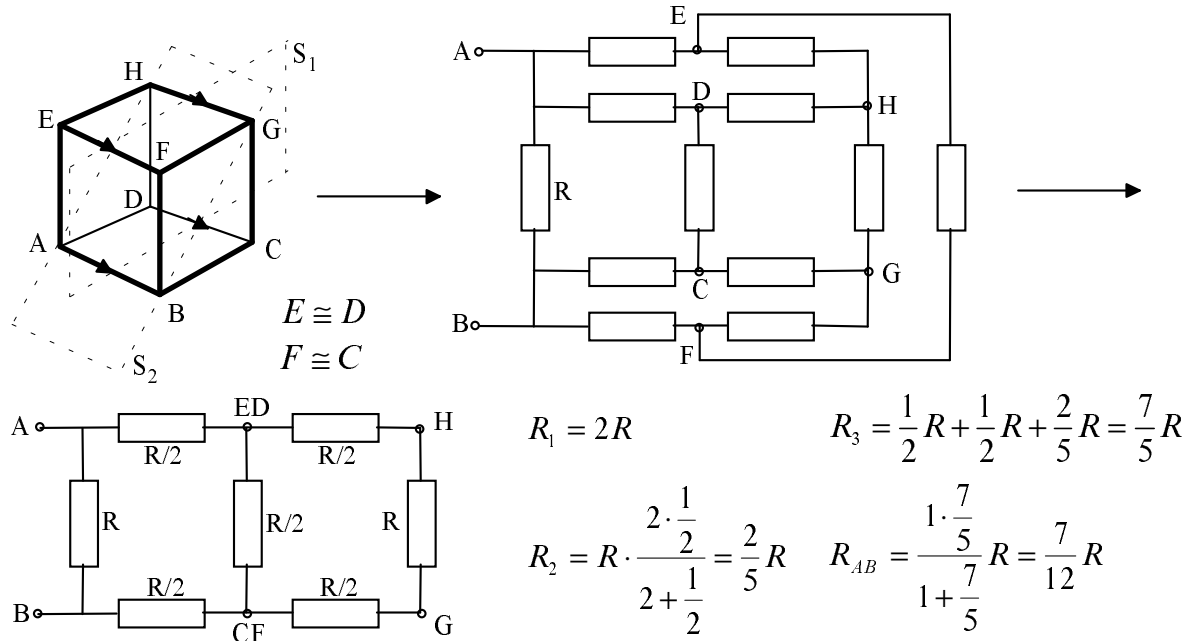
8. Hálózatok

8.1. Mekkora az eredő ellenállás egy R ellenállású rudakból összeállított tetraéder két csúcsa között?

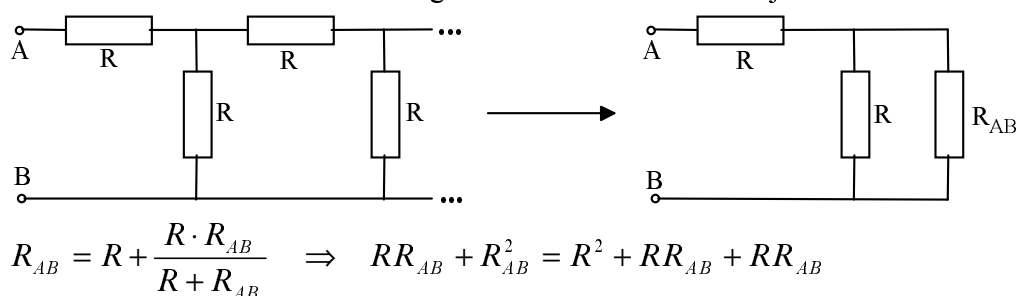


8.2. Mekkora az eredő ellenállás egy R ellenállású rudakból összeállított kocka két szomszédos csúcsa között?

A feladat lebontogatással megoldható, ha találunk egy megfelelő szimmetriasíkot, és kihasználjuk, hogy két-két csúcs ekvipotenciális. A szimmetriasíkra az áramirányoknak is szimmetrikusnak kell lenniük, ezért S_1 nem megfelelő, S_2 viszont igen.

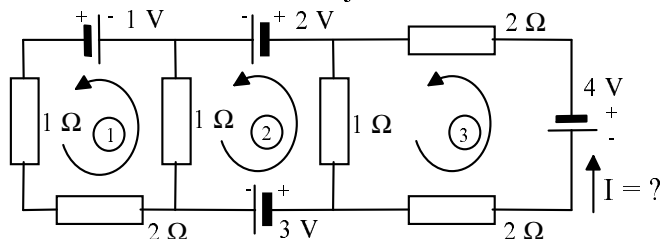


8.3. Mekkora az ábrán látható végtelen ellenálláslánc eredője?



$$R_{AB}^2 - RR_{AB} - R^2 = 0 \Rightarrow R_{AB} = \frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4} + R^2} = R \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.62R$$

8.4. Mekkora az ábrába bejelölt I áram?



A feladatot a hurokáramok módszerével fogjuk megoldani, a hurokegyenletekben feszültségeséseket összegzünk:

$$1: -1V + 1\Omega \cdot I_1 + 2\Omega \cdot I_1 + 1\Omega \cdot (I_1 - I_2) = 0$$

$$2: 2V + 1\Omega \cdot (I_2 - I_1) - 3V + 1\Omega \cdot (I_2 - I_3) = 0$$

$$3: 2\Omega \cdot I_3 + 1\Omega \cdot (I_3 - I_2) + 2\Omega \cdot I_3 - 4V = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 4I_1 - I_2 = 1A \\ -I_1 + 2I_2 - I_3 = 1A \\ -I_2 + 5I_3 = 4A \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7I_2 - 4I_3 = 5A \\ -I_2 + 5I_3 = 4A \end{array} \right\} \Rightarrow 31I_3 = 33A \Rightarrow I = I_3 = \frac{33}{31}A = 1.06A$$

8.5. A kondenzátoron a $t = 0$ időpillanatban Q_0 töltés van, amikor zárjuk az áramkört. Hogyan változnak az egyes mennyiségek az időben?

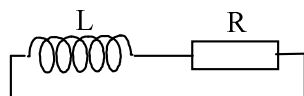


$$\frac{Q}{C} + IR = 0$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q = 0$$

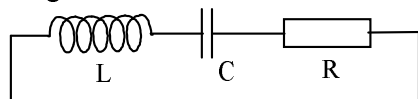
$$Q = Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}, \quad U = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}, \quad I = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t}, \quad U_0 = \frac{Q_0}{C}, \quad I_0 = -\frac{Q_0}{RC}$$

8.6. A $t = 0$ pillanatban indukciós gerjesztéssel I_0 áramot hozunk létre a tekercsben, majd magára hagyjuk a rendszert. Hogyan csökken az áram az idő függvényében?



$$L \frac{dI}{dt} + IR = 0, \quad I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

8.7. Írjuk fel a huroktörvényt az alábbi áramkörre! Értelmezzük az analógiákat a mechanikai rezgésekkel!



$$L \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + I \cdot R = 0$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot I = 0$$

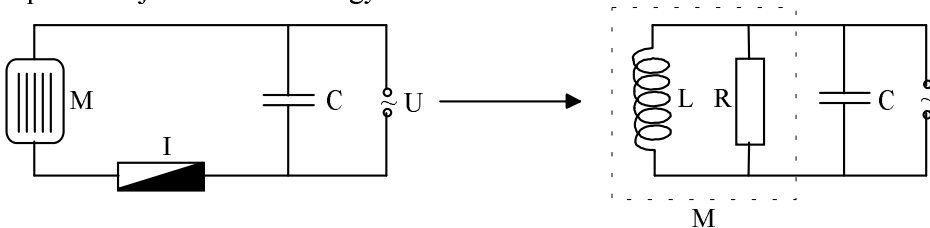
Ez egy csillapított rezgés egyenlete. Az analóg mennyiségek:

$$\frac{\beta}{m} \leftrightarrow \frac{R}{L}, \quad \frac{k}{m} \leftrightarrow \frac{1}{LC}$$

$$\begin{aligned}\hat{Z}_{LR_1} &= \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\hat{X}_L}} = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{i}} k\Omega = \frac{1}{1-i} k\Omega = \frac{1+i}{2} k\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} k\Omega = 0.7071 \cdot e^{i0.7854} k\Omega \\ \hat{Z}_{CR_2} &= \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\hat{X}_C}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{-i}} k\Omega = \frac{1}{0.5+i} k\Omega = \frac{0.5-i}{1.25} k\Omega = 0.8944 \cdot e^{-i1.1071} k\Omega \\ \hat{Z} &= \hat{Z}_{LR_1} + \hat{Z}_{CR_2} = \left(\frac{1+i}{2} + \frac{0.5-i}{1.25} \right) k\Omega = \frac{1.25+1.25i+1-2i}{2.5} k\Omega = \frac{2.25-0.75i}{2.5} k\Omega = \frac{3(3-i)}{10} k\Omega = \\ &= \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot e^{-i\arctg\frac{1}{3}} k\Omega = 0.9489 \cdot e^{-i0.3217} k\Omega \\ \hat{I} &= \frac{\hat{U}_g}{\hat{Z}} = \frac{12V}{0.9489 \cdot e^{-i0.3217} k\Omega} = 12.65 \cdot e^{i0.3217} mA \\ \hat{U}_{LR_1} &= \hat{I} \cdot \hat{Z}_{LR_1} = 12.65 \cdot e^{i0.3217} mA \cdot 0.7071 \cdot e^{i0.7854} k\Omega = 8.945 \cdot e^{i1.1071} V \\ \hat{U}_{CR_2} &= \hat{I} \cdot \hat{Z}_{CR_2} = 12.65 \cdot e^{i0.3217} mA \cdot 0.8944 \cdot e^{-i1.1071} k\Omega = 11.31 \cdot e^{-i0.7854} V \\ \hat{I}_L &= \frac{\hat{U}_{LR_1}}{\hat{X}_L} = \frac{8.945 \cdot e^{i1.1071} V}{i k\Omega} = \frac{8.945 \cdot e^{i1.1071}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} mA = 8.945 \cdot e^{-i0.4637} mA \\ \hat{I}_C &= \frac{\hat{U}_{CR_2}}{\hat{X}_C} = \frac{11.31 \cdot e^{-i0.7854} V}{-i k\Omega} = \frac{11.31 \cdot e^{-i0.7854}}{e^{-i\frac{\pi}{2}}} mA = 11.31 \cdot e^{i0.7854} mA \\ \hat{I}_{R_1} &= \frac{\hat{U}_{LR_1}}{R_1} = 8.945 \cdot e^{i1.1071} mA & \hat{I}_{R_2} &= \frac{\hat{U}_{CR_2}}{R_2} = 5.655 \cdot e^{-i0.7854} mA \\ P_g &= U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos \varphi_Z = 12V \cdot 12.65mA \cdot \cos(-0.3217) = 144mW \\ P_L &= U_{LR_1} \cdot I_L \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0 & P_C &= U_{CR_2} \cdot I_C \cdot \cos \frac{-\pi}{2} = 0 \\ P_{R_1} &= U_{LR_1} \cdot I_{R_1} \cdot \cos 0 = 8.945V \cdot 8.945mA = 80mW \\ P_{R_2} &= U_{CR_2} \cdot I_{R_2} \cdot \cos 0 = 11.31V \cdot 5.655mA = 64mW\end{aligned}$$

8.11. Egy villanymotor adatai: 220 V, 50 Hz, 1 kW, $\cos \varphi = 0.85$, motorvédő kapcsolóval és fázisjavító kondenzátorral kell ellátnunk. Hogyan méretezzük ezeket?

A motorvédő kapcsoló egyfajta biztosítékkal egybeépített kapcsoló, amely a túláramtól védi a motort, bizonyos határok között egy áramértékre lehet beállítani. A fázisjavító kondenzátort úgy kell a motorhoz csatlakoztatni, hogy az eredő kétpólus impedanciájának fázisa 0 legyen.



$$P_h = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos \varphi \Rightarrow I_{eff} = \frac{P_h}{U_{eff} \cdot \cos \varphi} = \frac{1kW}{220V \cdot 0.85} = 5.35 A$$

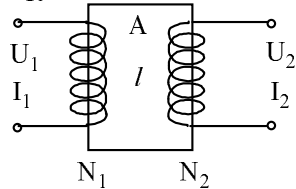
$$Z_M = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_{eff}^2 \cdot \cos \varphi}{P_h} = 41.1 \Omega \quad \hat{Y}_M = \frac{1}{\hat{Z}_M} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} = \frac{1}{R} - \frac{i}{\omega L} \quad \varphi_Y = -\varphi_Z$$

$$\text{Im } \hat{Y}_M = -\frac{1}{\omega L} = \frac{1}{Z_M} \cdot \sin(-\varphi) \quad \hat{Y}_{jav} = \frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\frac{1}{\omega L} = \frac{\sin \varphi}{Z_M} = \omega C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\sin \varphi}{\omega Z_M} = \frac{P \cdot \tan \varphi}{\omega \cdot U_{eff}^2} = 40.8 \mu F$$

8.12. Z impedanciájú, φ fázisú fogyasztót működtetünk U_2 váltófeszültségen és ω körfrekvencián. Az energiát U_1 nagyfeszültségű távvezetéken juttatjuk el a fogyasztóhoz egy reális transzformátor közbeiktatásával. A távvezeték ohmikus ellenállása R (ebbe beleszámítjuk a transzformátor vasvesztését is). Mekkora áramok folynak az egyes körökben és mekkora a veszteségi teljesítmény?

Két egymás közelében levő áramjárta tekercs a mágneses téren keresztül hat egymásra, ez a kölcsönös indukció. A fluxusok és indukált feszültségek előjelei a geometriai elrendezéstől függenek (pl. a tekercselés iránya). Az L_{ij} konstansok neve kölcsönös indukciós együttható:



$$H = \frac{IN}{l}, \quad B = \mu H, \quad \Phi = BA, \quad U = N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \mu \cdot \frac{N_1 A}{l} \cdot I_1 + \mu \cdot \frac{N_2 A}{l} \cdot I_2$$

$$U_1 = \mu \cdot \frac{N_1^2 A}{l} \cdot \frac{dI_1}{dt} + \mu \cdot \frac{N_1 N_2 A}{l} \cdot \frac{dI_2}{dt} = L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \cdot \frac{dI_2}{dt}$$

$$U_2 = \mu \cdot \frac{N_2 N_1 A}{l} \cdot \frac{dI_1}{dt} + \mu \cdot \frac{N_2^2 A}{l} \cdot \frac{dI_2}{dt} = L_{21} \cdot \frac{dI_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt}$$

$$|L_{12}| = |L_{21}| = \frac{N_2}{N_1} \cdot L_1 = \frac{N_1}{N_2} \cdot L_2$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$$



$$\hat{U}_1 = i\omega L_1 \hat{I}_1 + i\omega L_{12} \hat{I}_2$$

$$\hat{Z} = Z(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\hat{U}_2 = \hat{I}_2 \cdot \hat{Z} = \frac{N_2}{N_1} \cdot \hat{U}_1 \quad \Rightarrow \quad \hat{I}_2 = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}}$$

$$\hat{U}_1 = i\omega L_1 \hat{I}_1 - i\omega \frac{N_2}{N_1} L_1 \cdot \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}} \quad (\text{a negatív előjel a Lenz-törvény következménye})$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1}{i\omega L_1} + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \cdot \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}} = \hat{U}_1 \cdot \left[\underbrace{\frac{\cos \varphi}{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z}}_{\text{hasznos}} - i \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\omega L_1} + \frac{\sin \varphi}{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z} \right)}_{\text{meddő}} \right]$$

$$P_v = R \cdot I_1^2 = R \cdot (I_h^2 + I_m^2)$$

Jól működő reális transzformátor és távvezeték:

$$\varphi \approx 0, \quad Z \cdot \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \gg R > 0, \quad L_1 \gg \frac{Z}{\omega} \cdot \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2, \quad N_1 \gg N_2 \Leftrightarrow U_1 \gg U_2$$

Ideális transzformátor és távvezeték:

$$R = 0, \quad L_1 = \infty \quad \Rightarrow \quad \hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \hat{Z}}, \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}, \quad P_v = 0, \quad P_1 = P_2$$

Ajánlott irodalom:

Farkas-Sobor: Fizika példatár

BME Vegyészmérnöki Kar, Fizika laboratóriumi jegyzet, III. Példák

9. Gyakorló feladatok

9.1. Ön a Honfoglaláskori Kalandozásügyi Hivatal közbeszerzési előadója, íjakat kell vásárolnia a sereg számára. A harcosok az íjat legfeljebb 600 N erővel és legfeljebb 1 m-re tudják kifeszíteni. Két ajánlatot kapott, az egyik fajta íj karakterisztikája:

$$F = -1200 \frac{N}{m} \cdot x,$$

a másiké:

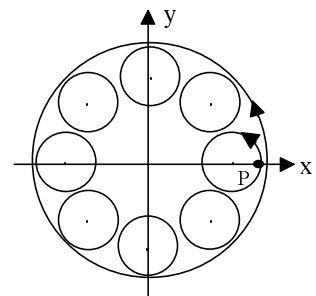
$$\text{ha } x > 0, \quad F = -600 \frac{N}{m} (x + 0.2 \text{ m}),$$

$$x \leq 0, \quad F = 0$$

ahol F az íj által kifejtett erő, x a kifeszítés távolsága. Melyiket javasolja rendszeresítésre?

9.2. Egy 25 kg-os gyermeket kell egy 5 kg-os szánkón felhúznunk a hegy lábánál lévő A pontból a hegyoldalban 100 m-rel magasabban lévő B pontba. Két út áll rendelkezésre, az egyik 300 m hosszú és nyílegyenes, a másik egy szerpentin, amelynek meredeksége az út egynegyedén 5 %-os, felén 10 %-os és a maradék egynegyedén 15 %-os. A csúszási súrlódási együttható $\mu = 0,12$, a nehézségi gyorsulás $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Mennyivel nő a szánkós gyermek helyzeti energiája, mire felérünk a B pontba? Mennyi munkát végzünk, ha az egyenes utat választjuk? Mennyi munkát végzünk a szerpentinben?

9.3. A "Keringő" nevű vidámparki játék két körmozgás eredőjét valósítja meg. Egy nagy, ω_1 szögsebességgel forgó dobon négyületes gondolák vannak, amelyek szintén forognak a saját tengelyük körül ω_2 szögsebességgel. A gondolák sugara R_2 , tengelyük távolsága a dob középpontjától R_1 . A $t = 0$ pillanatban ülésünk, a P pont, az ábrán látható helyzetben van. Írjuk fel a P pont helyzetét, sebességét és gyorsulását az idő függvényében! Melyik helyzetekben érezzük a legnagyobb és a legkisebb gyorsulást?



9.4. Az origóban nyugvó 1 kg tömegű golyónak nekiütközik egy másik, szintén 1 kg tömegű, az x tengely mentén 1 m/s sebességgel haladó golyó. Az ütközési normális az xy síkban fekszik, irányszöge -30° , az ütközés tökéletesen rugalmas és súrlódásmentes. Határozzuk meg az ütközés utáni sebességek koordinátáit!

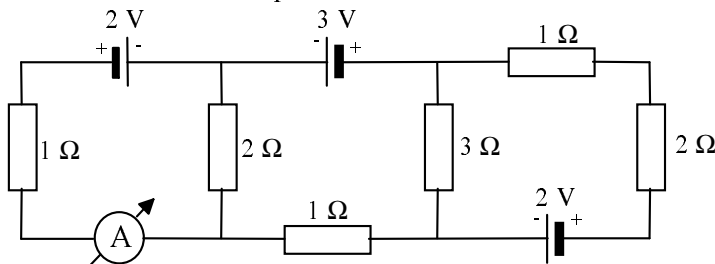
9.5. Határozzuk meg a szén-dioxid molekulának ($^{12}\text{C}^{16}\text{O}_2$) a tömegközéppontjára vonatkozó tehetetlenségi tenzorát:

$$\underline{\underline{\Theta}} = \sum m_i (\underline{\underline{E}} r_i^2 - r_i \circ r_i)$$

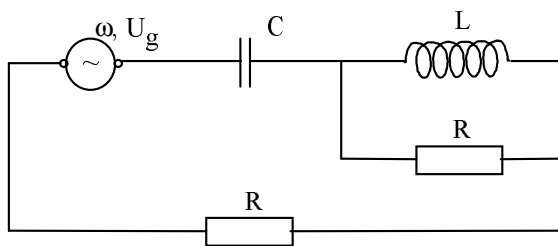
A molekulát fektessük az x tengelyre úgy, hogy a szénatom kerüljön az origóba! A kötéshossz $a = 116,42 \text{ pm}$, $m_{\text{C}} = 12,00000 \text{ u}$, $m_{\text{O}} = 15,99492 \text{ u}$, $1 \text{ u} = 1,6605655 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

9.6. Egy gömbkondenzátor két koncentrikus, vékony fémlemezből készült gömbből áll. A belsőnek a sugara $R_1 = 0,5$ m, a külsőé $R_2 = 1$ m, a köztük $\epsilon_r = 38$ relatív permittivitású dielektrikum található. A belső gömbön $+1$ C, a külsőn -1 C töltést helyeztünk el. Írjuk fel az elektromos térerősséget, határozzuk meg a két gömb közötti feszültséget és a gömbkondenzátor kapacitását! $\epsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12}$ F/m.

9.7. Mit mutat az ampermérő?

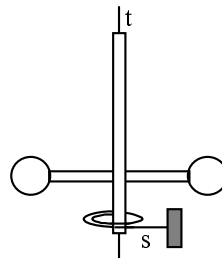


9.8. Határozzuk meg az egyes áramkörti elemeken mérhető áramok és feszültségek effektív értékét és fázisát!



$$\begin{aligned}\omega &= 1000 \text{ 1/s} \\ U_g &= 10 \text{ V} \\ L &= 1 \text{ H} \\ C &= 1 \mu\text{F} \\ R &= 1 \text{ k}\Omega\end{aligned}$$

9.9. Az ábrán látható merev test a t tengely mentén van csapágyazva. Az s spirálrugó az egyensúlyi helyzettől számított ϕ elfordulás esetén $M_1 = -a\phi$ forgatónyomatékokat fejt ki. A test tehetetlenségi nyomatéka a t tengelyre Θ . Tegyük fel, hogy a csapágysúrlódás és a közegellenállás a szögsebességgel arányos: $M_2 = -b\omega$.



a) Írjuk fel a mozgás differenciálegyenletét!

b) Számítsuk ki a torziós inga periódusidejét, ha $a = 6,32 \cdot 10^{-4}$ Nm, $\Theta = 1,60 \cdot 10^{-5}$ Nm² és $b \approx 0$.

9.10.

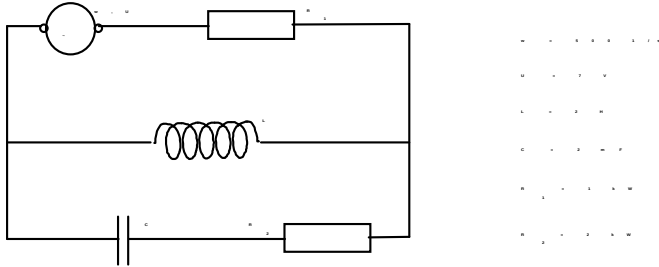
a) Döntsük el, hogy az $\underline{F}$ erőterhez rendelhető-e olyan ϕ potenciál, hogy $\underline{F} = -\nabla\phi$ legyen! Adjuk meg a potenciált!

b) Mekkora munkát végez az erőter, míg egy testet az x tengely mentén az $x_1 = 10$ m pontból az $x_2 = 1$ m pontba mozgat? $a = 1$ Nm².

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \frac{-ax}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{-ay}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{-az}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix}$$

9.11. Egy koaxiális kábel belső ere 0,5 mm átmérőjű huzalból készült, az árnyékolás 3 mm átmérőjű, a kettő között $\epsilon_r = 2$ relatív permittivitású műanyag szigetelő található. Számítsuk ki egy 1 m hosszú kábeldarab kapacitását! $\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$.

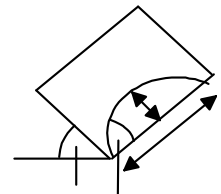
9.12. Adjuk meg a hálózatban szereplő áramokat és feszültségeket komplex alakban!



9.13. Adott az $\underline{E}$ erőter. Döntsük el, hogy megadható-e hozzá potenciál, és ha igen, akkor számítsuk is ki!

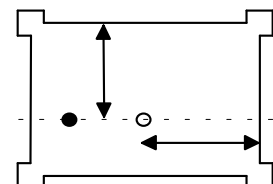


9.14. Egy súrlódásmentes, nagy kiterjedésű sík lejtő a vízszintessel α szöget zár be. A lejtőn a vízszinteshez képest 45° -os szögben $v_0 = 10 \text{ m/s}$ kezdősebességgel elindítunk egy testet a lejtő aljáról. A lejtő aljától számítva mekkora lesz a legnagyobb a távolsága és az indítás helyétől mekkora r távolságra fog visszatérni a lejtő aljára, ha $g = 9,81 \text{ m/s}^2$,



- a) $\alpha = 15^\circ$
- b) $\alpha = 30^\circ$
- c) $\alpha = 60^\circ$
- d) $\alpha = 90^\circ$

9.15. Egy 3 m · 2 m-es biliárdasztalon a fekete golyóval a fehér golyót a B lyukba szeretnénk belökni. A két golyót összekötő e egyenes párhuzamos a 3 m-es oldalakkal és 1,2 m-re van a CD éltől. A két golyó tömege egyforma, mindkettő 350 g. Hanyagoljuk el a súrlódást, a golyók forgását és kiterjedését, tekintsük az ütközéseket tökéletesen rugalmasnak! Milyen szöget zárjon be az ütközési normális az e egyenessel? Hol ütközik először az asztal szélén a fekete golyó?

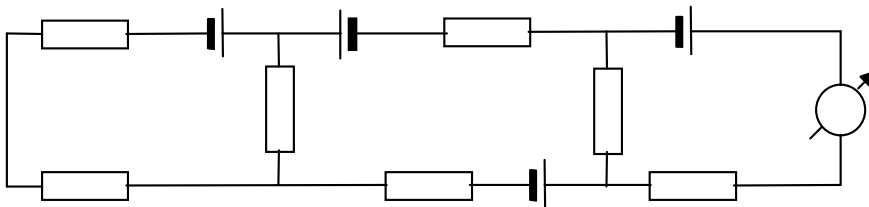


9.16. Egy 7,62 mm kaliberű géppisztolyból 7,9 g tömegű ólomgolyót lőnek ki. A lőszerben az elsütés után 1 g 4300 K hőmérsékletű gáz képződik, amelynek átlagos relatív molekulatömege 26,9, Poisson-együtthatója $\kappa = 1,2$, kezdeti térfogata 1 cm^3 . A fegyver csövének teljes belső térfogata 30 cm^3 . Az elsütés folyamata nagyon gyors, ezért a gáz kiterjedését adiabatikusnak vehetjük (l. a képletet). Tekintsük a gázt tökéletesnek, $R = 8,314 \text{ J/molK}$. A külső légnyomás 1013 hPa. Mekkora lesz a golyó sebessége a fegyver torkolatánál?

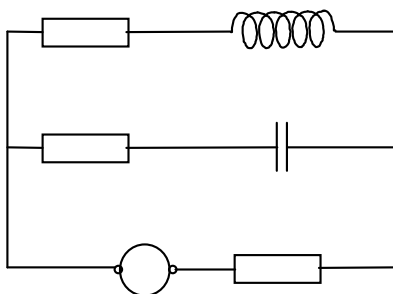
9.17. Adjuk meg az ábra szerinti kvadrupólus terét az A és B pontokban! Igazoljuk, hogy ha $r \gg d$, akkor a B pontban $E \sim r^{-4}$!



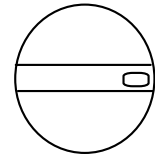
9.18. Mit mutat az ampermérő?



9.19. Mekkora az áramkörben az egyes áramok ill. feszültségek effektív értéke és fázisa? Mekkora teljesítmény disszipálódik az egyes elemeken?



9.20. Egy fantasztikus regényben átfúrják a Földet két áttellenes pontja között, az alagútból kiszivattyúzzák a levegőt, és így közlekednek benne a zárt utasszállító járművek. Milyen mozgást végez egy ilyen jármű, ha nincs önálló meghajtása? Mennyi idő alatt teszi meg az utat a Föld két áttellenes pontja között?

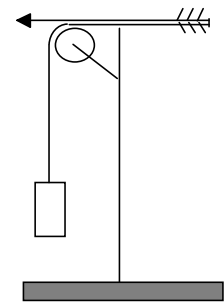


Útmutatás: A gravitációra is érvényes a Gauss-tétel. A Földet tekintsük tökéletes gömbnek, a sűrűségét vegyük egyenletesnek, $r_F = 6368 \text{ km}$, $m_F = 5,9763 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $\gamma = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$. A súrlódást hanyagoljuk el, és feltehetjük, hogy az alagút fala felveszi a Coriolis-erőt.

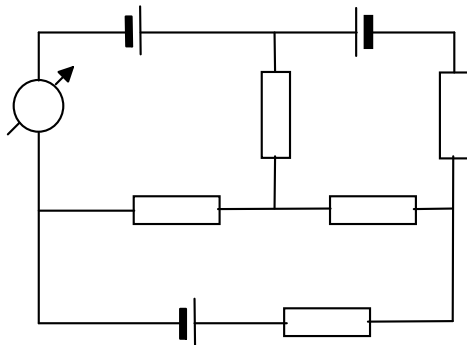
9.21. Ön az Árpádkori Találmányi Hivatal előadója. Elbírálásra kap egy találmányt, amely a következőképpen szól:

"A hagyományos külhoni gyártmányú íjak fő hiányossága, hogy $F = -1000 \text{ Nm}^{-1} \cdot x$ változó erőt fejtenek ki, így az $F_{\text{max}} = 500 \text{ N}$ erejű harcosok csak 0.5 m -re tudják kifeszíteni, az ellövésakor pedig az ideg egyre csökkenő erővel löki a 100 g tömegű nyílveszőt. A jelen találmány tárgyát képező fegyver a mellékelt elrendezés szerint állandó 500 N erőt fejt ki a nyílveszőre, és 1 m hosszon is ki lehet feszíteni, így sokkal messzebbre lehet vele löni."

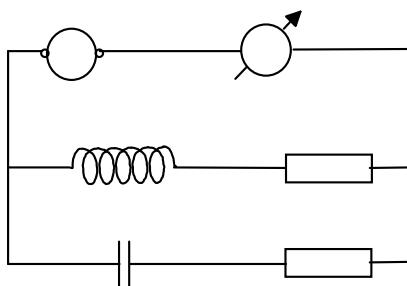
Mi az Ön szakvéleménye? (A zsineg tömege és a súrlódás elhanyagolható, $g = 10 \text{ m/s}^2$).



9.22. Mennyi az ismeretlen telep E_x elektromotoros ereje, ha az ampermérő $+2 \text{ mA}$ -t mutat?



9.23. Mit mutat a megadott üzemi körülmények között az ampermérő? A generátor a múltkor meghibásodott, egy ideig egyenfeszültséget ($\omega = 0$), azután meg igen nagy frekvenciájú feszültséget ($\omega = \infty$) szolgáltatott. Mit mutatott ekkor az ampermérő?



1. Házi dolgozat feladat

A Föld az elhanyagolható vastagságú szilárd kérget leszámítva folyékony anyagból áll. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy ez összenyomhatatlan és homogén, más szóval tekintsük a sűrűségét állandónak. Közelítsük továbbá bolygónk alakját szabályos gömbnek! Hogyan változik a p nyomás az r sugár mentén? Mekkora lesz a nyomás a Föld középpontjában? A Föld sugara $r_F = 6368$ km, tömege $m_F = 5.9763 \cdot 10^{24}$ kg, a gravitációs állandó $\gamma = 6.6720 \cdot 10^{-11}$ Nm²kg⁻², a tengerszintre átszámított légnyomás $p_0 = 1.013 \cdot 10^5$ Pa.

Útmutatás: a gravitációra is érvényes a Gauss-tétel (vö. a **9.20.** feladattal).

Beadandó:

- kézzel írt részletes levezetés
- a $p(r)$ függvény paraméteres és numerikus alakban
- a kért nyomás paraméterekkel kifejezve illetve számszerűen
- a $p(r)$ grafikon milliméterpapíron (nem elég az elvi vázlat).

2. Házidolgozat feladat

A 9.20. feladatban szereplő alagútba a fantasztikus regény egyik folytatásában beszökik a levegő. A "vonat" megreked a Föld középpontjában, onnan kell az utasokat kimenteni. A termosztát szerencsére működik, a hőmérséklet mindenütt 27°C . Hogyan változik a légnyomás az alagútban? Mekkora lesz a légnyomás a Föld középpontjában? A Földet tekintjük tökéletes gömbnek, a sűrűségét vegyük egyenletesnek, hasonlóképpen a levegő összetételét is tekintjük állandónak. A Föld sugara $r_F = 6368 \text{ km}$, tömege $m_F = 5.9763 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, a gravitációs állandó $\gamma = 6.6720 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$, a tengerszintre átszámított légnyomás $p_0 = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, a levegő átlagos molekulatömege $M = 28.964 \text{ g/mol}$, a gázállandó $R = 8.31441 \text{ J/molK}$.

Útmutatás: Ha a barometrikus formula levezetésekor alkalmazott gondolatmenetet követjük, és az általános gáztörvényt használjuk, akkor irreálisan nagy nyomások jönnek ki. Ennek az az oka, hogy a tökéletes gáz modellje elhanyagolja a molekulák saját térfogatát, következésképpen a tökéletes gáz minden határon túl komprimálható. A valóság ezzel szemben az, hogy még a permanens gázokat is csak addig lehet összenyomni, ameddig a molekulák össze nem érnek, ezután a gáz a folyadékokhoz hasonlóan összenyomhatatlanná válik. A folyékony levegő sűrűsége $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$, számítsuk ki az ehhez a sűrűséghez tartozó p_h nyomást a gáztörvényből. Ez alatt a nyomás alatt közelítsük a levegőt tökéletes gázként, előlött pedig összenyomhatatlan folyadékként.

Beadandó:

- kézzel írt részletes levezetés
- a p_h határnyomás és a hozzá tartozó r_h sugár
- a $p(r)$ függvények az r_h határsugár fölött és alatt
- a nyomás a Föld középpontjában

3. Házidolgozat feladat

A 2.2 feladat eredményét felhasználva és az ott szereplő feltételeket figyelembevéve számítsuk ki a földi légkör össztömegét! A szükséges adatok: a Föld sugara $r_F = 6368$ km, tömege $m_F = 5.9763 \cdot 10^{24}$ kg, a gravitációs állandó $\gamma = 6.6720 \cdot 10^{-11}$ Nm²kg⁻², a tengerszintre átszámított légnyomás $p_0 = 1.013 \cdot 10^5$ Pa, a levegő átlagos molekulatömege $M = 28.964$ g/mol, a gázállandó $R = 8.31441$ J/molK, a levegő hőmérsékletét mindenütt vegyük $T = 300$ K-nek.

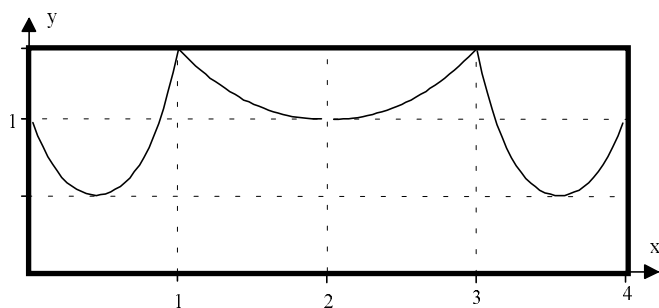
Útmutatás: A térfogati integrált analitikusan nem lenne könnyű kiértékelni, inkább írjunk számítógépes programot az integrál kiszámítására (tetszőleges programnyelv választható). Javasoljuk a Simpson-formula használatát:

$$\int_{x_0}^{x_0+2\Delta x} f(x) dx \approx (f(x_0) + 4f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 + 2\Delta x)) \cdot \frac{\Delta x}{3}$$

Beadandó:

- kézzel írt részletes levezetés
- a légkör össztömege
- forráslista
- a végrehajtható program floppy-n

4. Házidolgozat feladat



A Tiffany ékszerüzlet egyik, 4 m széles és 1.5 m magas kirakatát 14 karátos, 250 g/m tömegű aranylánccal akarják díszíteni az ábra szerint. Adjuk meg a görbék egyenleteit! Mekkora és milyen irányú erő fogja terhelni a felfüggesztési pontokat? Milyen hosszú láncra lesz szükség? Mennyibe fog kerülni? $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, a lánc ára 20.83 \$/g.

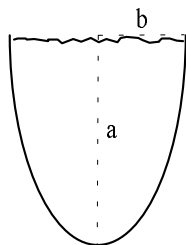
Útmutatás: Használjuk fel a 2.3. feladat eredményét. A nemlineáris egyenletek megoldására alkalmazhatjuk pl. a *regula falsi* algoritmust:

- keressünk az $f(x) = 0$ egyenlethez két olyan x_1, x_2 értéket, hogy közöttük $f(x)$ előjelet váltson
- számítsuk ki az $x_3 = (x_1 + x_2)/2$ közbenső értéket
- vizsgáljuk meg, hogy $f(x)$ x_1 és x_3 vagy x_3 és x_2 között vált előjelet
- ismételjük az utolsó két lépést a kívánt pontosság eléréséig

Beadandó:

- kézzel írt részletes levezetés
- ábra milliméterpapíron
- a kért adatok számszerűen

5. Házidolgozat feladat



A bergengóc főcsatorna fél ellipszis keresztmetszetű, a tengelyek $a = 8$ m, $b = 3$ m. A tavaszi áradáskor a csatorna rendszerint színültig megtelik, a zsilipkapukat erre az esetre méretezték. A kapuk a csatorna teljes keresztmetszetét elzáró síklapok. Mekkora erőnek kell a zsilipeknek ellenállniuk, és hová kellett a fő megtámasztást elhelyezni? A víz sűrűsége $\rho = 1000$ kg/m³, $g = 9.81$ m/s².

Útmutatás: Kihhasználva, hogy itt sík felületről és párhuzamos erőrendszerről van szó, a kiterjedt felületen ható erőt ill. támadáspontját az

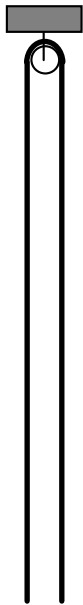
$$F = \int_A p dA, \quad \underline{r}_T = \frac{\int_A \underline{r} p dA}{\int_A p dA}$$

képletek definiálják. Az integrálok kikereshetők az integráltáblázatból, de legyünk óvatosak, mert sajtóhiba előfordulhat.

Beadandó:

- kézzel írt részletes levezetés
- a kért adatok paraméteresen és számszerűen

6. Házi dolgozat feladat



Kicsi, súlytalan és súrlódásmentes csigán átvetve $L = 10$ m hosszú kötél lóg az ábra szerinti helyzetben, magasan a talaj fölött. Egy kis fuvallat kibillenti az egyensúlyi helyzetből. Mennyi idő alatt esik le a csigáról? ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Útmutatás: A probléma

$$y'' = f(y)$$

alakú hiányos másodrendű differenciálegyenletet eredményez, amelyet

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

új ismeretlen bevezetésével szétválasztható változójúra lehet visszavezetni. Az integrálás után kapott függvényt elég az időre explicit alakban megadni.

Beadandó:

- kézzel írt részletes levezetés
- a kért adatok paraméteresen és számszerűen

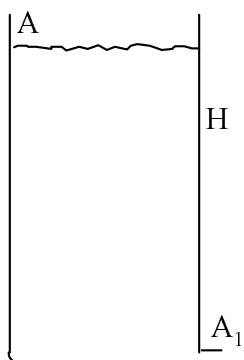
7. Házidolgozat feladat

Egy rakéta tömege $m_1 = 1000$ kg, tartályaiban m_2 tömegű üzemanyag van, amely kémiai reakció után $v_0 = 1000$ m/s sebességgel hagyja el a rakéta fúvókáját (a rakétához képest). Állítsunk fel összefüggést a rakéta elért sebessége és az elhasznált üzemanyag tömege között arra az esetre, amikor a rakéta nyugalmi helyzetből indul! Mennyi üzemanyagra lenne szükség az első kozmikus sebesség (a Föld körüli pályára állításhoz szükséges minimális sebesség, 8 km/s) eléréséhez? Technikailag reális az eredmény? Tervezzünk egy háromfokozatú rakétát (természetesen csak nagy vonalakban) 1 t hasznos teher Föld körüli pályára állítására, tegyünk ésszerű feltevéseket a tartályok és az üzemanyag tömegarányára. Néhány alapadat: az üzemanyag sűrűsége 800 kg/m^3 (pl. $\text{O}_2 + \text{H}_2\text{N-NH}_2$), a rakéta szerkezeti anyagának sűrűsége 3000 kg/m^3 (pl. Ti-Al ötvözet), szilárdságát vehetjük a legjobb acélokkal egyenértékűnek.

Beadandó:

- kézzel írt részletes levezetés
- az m_2 tömeg képletben és számszerűen
- a tervezett rakéta vázlatos rajza és számszerű adatai

8. Házidolgozat feladat

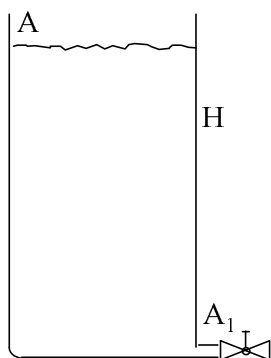


A MOL Rt N.-i telephelyén egy $H = 10.0$ m magasságú, $A = 2.00$ m² keresztmetszetű, felül levegőztetett hengeres tartályban $\rho = 800$ kg/m³ sűrűségű szuperbenzint tároltak, a tartály eredetileg színültig tele volt. Lelkiismeretlen tolvajok a tartály alján egy $A_1 = 5.00$ cm² keresztmetszetű lyukat fúrtak és egy kis kifolyócsövet illesztettek hozzá, amelyen a benzin súrlódásmentesen tudott kifolyni. Teletöltötték az autójukat, majd kereket oldottak. Mennyi idő alatt folyt el a benzin ($g = 9.81$ m/s²)?

Beadandó:

- kézzel írt részletes levezetés
- a kért adatok paraméteresen és számszerűen
- a folyadékszint ábrázolva az idő függvényében, milliméterpapíron (nem elég az elvi vázlat)

9. Házidolgozat feladat



Az N.-i robbanóanyaggyárban az ábrán látható felül levegőztetett hengeres tartályban glicerint tárolnak, a tartály magassága $H = 10.0$ m, keresztmetszete $A = 2.00$ m². A tartály alján egy $d = 100$ mm névleges átmérőjű, $\alpha = 0.00932$ átfolyási tényezőjű szelep található, a gyári adatok szerint a szelep nyomásvesztése

$$p_v = \frac{v\eta}{\alpha d},$$

ahol v az átáramló folyadék átlagsebessége és η a viszkozitása. A glicerín sűrűsége $\rho = 1261$ kg/m³, viszkozitása $\eta = 1.490$ kg/ms, a nehézségi gyorsulás $g = 9.81$ m/s². Mennyi idő alatt lehet kiüríteni a tele tartályt (pontosabban a kezdeti mennyiség mondjuk 99 %-át kiereszteni)?

Útmutatás: A kifolyási sebességet a veszteséges Bernoulli-egyenletből határozhatjuk meg:

$$\frac{\rho}{2} v_1^2 + p_1 + \rho g h_1 = \frac{\rho}{2} v_2^2 + p_2 + \rho g h_2 + p_v,$$

ahol a nyomásvesztés gyakorlatilag a szelep nyomásvesztésével egyenlő. A sebesség ismeretében már fel tudjuk írni a megoldás differenciálegyenletét, amely a változók szétválasztásával integrálható (hasznos segítség egy integráltáblázat). A kapott függvényt elég az időre explicit alakban megadni.

Beadandó:

- kézzel írt részletes levezetés
- a kért adatok paraméteresen és számszerűen
- a folyadékszint ábrázolva az idő függvényében, milliméterpapíron

10. Házidolgozat feladat

Vizsgáljuk egy merev test szabad forgását, az általános

$$\underline{M}_C = m \underline{r}_{CS} \times \underline{a}_C + \underline{\Theta}_C \cdot \underline{\beta} + \underline{\omega} \times (\underline{\Theta}_C \cdot \underline{\omega})$$

egyenlet az $\underline{M}_C = \underline{0}$, $\underline{r}_{CS} = \underline{0}$ helyettesítéssel a

$$\underline{\beta} = -\underline{\Theta}_S^{-1} \cdot (\underline{\omega} \times (\underline{\Theta}_S \cdot \underline{\omega}))$$

alakra egyszerűsödik. A tehetetlenségi tenzor legyen diagonális alakban adott, ekkor inverze egyszerűen számítható:

$$\underline{\Theta}_S = \begin{bmatrix} \Theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_y & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_z \end{bmatrix} \quad \underline{\Theta}_S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\Theta_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/\Theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/\Theta_z \end{bmatrix}$$

Ezzel a mozgásegyenlet komponensekben kiírva:

$$\beta_x = \omega_y \omega_z \cdot \frac{\Theta_y - \Theta_z}{\Theta_x}$$

$$\beta_y = \omega_x \omega_z \cdot \frac{\Theta_z - \Theta_x}{\Theta_y}$$

$$\beta_z = \omega_x \omega_y \cdot \frac{\Theta_x - \Theta_y}{\Theta_z}$$

Legyen $\Theta_x = 3 \text{ kgm}^2$, $\Theta_y = 2 \text{ kgm}^2$, $\Theta_z = 1 \text{ kgm}^2$, $\omega(0) = 100 \text{ s}^{-1}$. Írjunk számítógépes programot a mozgás modellezésére (tetszőleges programnyelv választható). Végezzünk hat modellszámítást, indítsuk az $\underline{\omega}$ vektort rendre az x , y , z irányokból, illetve kicsivel ezek mellől, és ábrázoljuk a szögsebesség komponenseit az idő függvényében!

Útmutatás: A differenciálegyenlet-rendszer megoldására használhatjuk a legegyszerűbb gépi algoritmust, az Euler-módszert:

$$\underline{\omega}(t_1) \rightarrow \underline{\beta}(t_1) \rightarrow \Delta \underline{\omega} = \underline{\beta} \Delta t \rightarrow t_2 = t_1 + \Delta t, \underline{\omega}(t_2) = \underline{\omega}(t_1) + \Delta \underline{\omega} \rightarrow \dots$$

Beadandó:

- forráslista
- a program által rajzolt ábrák
- rövid szöveges értékelés (3-10 sor)
- a végrehajtható program floppy-n

11. Házidolgozat feladat

Az égi mechanika tárgya pontszerűnek tekinthető nagytömegű testek súrlódásmentes mozgása egymás gravitációs terében. Az egytest- (tömegpont mozgása centrális erőterben) és kéttest-probléma még analitikusan megoldható, a három- és többtest-probléma már bizonyítottan nem. Számítógépesen viszont egyszerűen modellezhető a rendszer. Írjunk számítógépes programot (tetszőleges programnyelv választható) három tömegpont egy közös síkban zajló mozgásának modellezésére. Az adatokat és a kezdeti feltételeket úgy válasszuk meg, hogy a tömegek legyenek azonos nagyságrendűek, de különbözőek, a kezdeti helykoordináták legyenek különbözőek és ne essenek egy egyenesre, a kezdősebességek pedig legyenek eltérő irányúak és nagyságúak.

Útmutatás: A Newton-féle egyenletek a következők:

$$F_{ij} = \gamma \frac{m_i m_j}{(\underline{r}_i - \underline{r}_j)^2} \quad \underline{F}_i = \sum_j \frac{\underline{r}_j - \underline{r}_i}{|\underline{r}_j - \underline{r}_i|} F_{ij} \quad \underline{F}_i = m_i \underline{a}_i$$

A differenciálegyenlet-rendszer megoldására használhatjuk a legegyszerűbb gépi algoritmust, az Euler-módszert:

$$\underline{r}_1(t_1), \dots, \underline{r}_n(t_1) \rightarrow \underline{F}_i(t_1) \rightarrow \underline{a}_i(t_1) \rightarrow \Delta \underline{v}_i = \underline{a}_i \Delta t, \Delta \underline{r}_i = \underline{v}_i \Delta t \rightarrow \\ t_2 = t_1 + \Delta t, \underline{v}_i(t_2) = \underline{v}_i(t_1) + \Delta \underline{v}_i, \underline{r}_i(t_2) = \underline{r}_i(t_1) + \Delta \underline{r}_i \rightarrow \dots$$

Beadandó:

- forráslista
- a program által rajzolt ábrák
- a végrehajtható program floppy-n

12. Házi dolgozat feladat

A Nyudíjas Olasz Fizikusok Egyesülete hajókirándulást szervezett az Adriai-tengeren. A résztvevők éppen az Itáliában oly népszerű golyójátékkal mulatták az időt, amikor egyikük véletlenül beleejtette kedvenc vasgolyóját a tengerbe. Valaki fölvetette, hogy számítsák ki a golyó mozgását a tenger fenekéig, azonban rögtön parázs vita bontakozott ki. Az egyik párt szerint a vízben v sebességgel süllyedő r sugarú golyóra a Stokes-féle közegellenállási törvényt kell alkalmazni, mert a viszonyok jó közelítéssel laminárisak:

$$F = 6\pi\eta r v$$

(F a közegellenállási erő, η a víz viszkozitása). A másik párt szerint viszont a viszonyok turbulensek és a Newton-féle közegellenállási törvénnyel kell számolni:

$$F = kA\rho v^2$$

(k a gömb alaki tényezője, $A = r^2\pi$ a keresztmetszete, ρ a víz sűrűsége). Kövessük a példájukat! Számítsuk ki a golyó mozgását a felszín felett $h_1 = 3$ m magasan lévő fedélzettől a $h_2 = 200$ m mély tengerfenéig mind a két módon, és döntsük el, melyik pártnak volt igaza! (Mindkét modell korrektül megoldható, a döntést a fizikai érzékünk alapján kell meghoznunk!) Az adatok: $r = 3$ cm, $\rho_{\text{Fe}} = 7800$ kg/m³, gömbre $k = 0.5$, a tengervíz sűrűsége $\rho_v = 1060$ kg/m³, viszkozitása $\eta = 1.002 \cdot 10^{-3}$ kg/ms.

Útmutatás: A levegőben a vasgolyó mozgását szabadesésnek tekinthetjük. A vízben történő süllyedés mindkét modell alapján szétválasztható változójú differenciálegyenletre vezet.

Beadandó:

- kézzel írt részletes levezetés
- a golyó sebessége ábrázolva az idő függvényében mindkét modell szerint, közös grafikonon, milliméterpapíron (nem elég az elvi vázlat)

13. Házidolgozat feladat

Ön, mint a Haditengerészet tüzértisztje, azt a feladatot kapja, hogy az Ön hajójától (pozíciója északi szélesség $35^{\circ}21'$, keleti hosszúság $2^{\circ}12'$) pontosan 50 km-re északra elhelyezkedő ellenséges cirkálót kilője. A hajóágyúból $d = 340$ mm átmérőjű, $m = 91$ kg tömegű lövedék lőhető ki $v_0 = 1500$ m/s kezdősebességgel. A szükséges adatok: a lövedék elsőrendű alaki tényezője $k_1 = 1.95$, másodrendű alaki tényezője $k_2 = 0.64$, a levegő sűrűsége $\rho = 1.20$ kg/m³, viszkozitása $\eta = 1.83 \cdot 10^{-5}$ kg/ms, a nehézségi gyorsulás $g = 9.81$ m/s². Írjunk számítógépes programot (tetszőleges programnyelv választható) a lövedék mozgásának modellezésére! Határozzuk meg a löelemeket (az ágyúcső irányát megadó szögeket)! Adjuk meg az útmutatásban részletezett egyes effektusok nagyságrendjét, vagyis azt, hogy hány m találati hibát okozna a figyelmen kívül hagyásuk!

Útmutatás: Ha előbb akarjuk eltalálni az ellenséges hajót, mint ahogy az süllyesztene el minket, akkor néhány effektust figyelembe kell vennünk a számítás során:

- A Föld felszíne nem sík, hanem gömb (a Föld sugara $r_F = 6368$ km)
- A Földhöz rögzített koordináta-rendszer nem inerciarendszer, mert a Föld forog. Ha a mozgást egy ilyen rendszerben kívánjuk leírni, ún. tehetetlenségi erőket kell figyelembe vennünk a vizsgált testre ható erők között, az egyik az $\underline{F}_{cf}$ centrifugális erő, a másik az $\underline{F}_C$ Coriolis-erő. Mivel ezek a tömeggel arányosak, gyorsulásként is figyelembe vehetők. A földi rendszerben a centrifugális gyorsulást a g nehézségi gyorsulás tapasztalati értéke már tartalmazza.

$$\underline{F}_{cf} = m\omega^2 \underline{r}$$

$$\underline{F}_C = -2m\omega \times \underline{v}$$

Itt ω a forgó rendszernek egy inerciarendszerhez képest mérhető szögsebessége, $\underline{r}$ a test helyvektora, $\underline{v}$ a sebessége a forgó rendszerben, m a tömege.

- A közegellenállás jó közelítéssel az alábbi képlettel írható le a forgástest alakú lövedék esetén:

$$\underline{F}_k = \frac{-\underline{v}}{v} \cdot \left(k_1 \cdot 3\pi d \eta v + k_2 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot \rho v^2 \right)$$

Itt v a test sebessége a közeghez képest, ρ a közeg sűrűsége, η a viszkozitása, k_1 és k_2 alaki tényezők. Az első tag a közegellenállás lamináris, a második a turbulens része.

- A mozgásegyenlet megoldására használhatjuk a legegyszerűbb gépi algoritmust, az Euler-módszert:

$$\underline{r}(t_1), \underline{v}(t_1) \rightarrow \underline{F}(t_1) \rightarrow \underline{a}(t_1) \rightarrow \Delta \underline{v} = \underline{a} \Delta t, \Delta \underline{r} = \underline{v} \Delta t \rightarrow \\ t_2 = t_1 + \Delta t, \underline{v}(t_2) = \underline{v}(t_1) + \Delta \underline{v}, \underline{r}(t_2) = \underline{r}(t_1) + \Delta \underline{r} \rightarrow \dots$$

Beadandó:

- kézzel írt részletes levezetés
- elvi ábra
- forráslista
- a kért adatok
- a végrehajtható program floppy-n

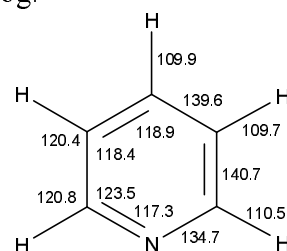
14. Házidolgozat feladat

Egy merev lineáris molekula lehetséges forgási energiái a kvantummechanika szerint:

$$E_{rot} = \frac{h^2}{8\pi^2\Theta} \cdot J \cdot (J+1) \quad J = 0, 1, 2, \dots \quad \Delta J = \pm 1$$

ahol $h = 6.626176 \cdot 10^{-34}$ Js a Planck-állandó, Θ a molekula tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontján átmenő és a kötésegyenesre merőleges tengelyre vonatkoztatva, J pedig a forgási kvantumszám. A kiválasztási szabályok szerint átmenet csak a szomszédos nívók között lehetséges és elsősorban azok a forgások gerjeszthetők, ahol egy dipólus forog.

Számítsuk ki a piridin tehetetlenségi tenzorát! Bár az ún. aszimmetrikus pörgettyűkre (ahol a három főtehetetlenségi nyomaték különbözik) a fenti képlet nem érvényes, első közelítésként induljunk ki ebből és jósoljuk meg a piridin forgási spektrumát! A mellékelt ábrán a kötéshosszak pm-ben, a kötésszögek °-ban vannak megadva.



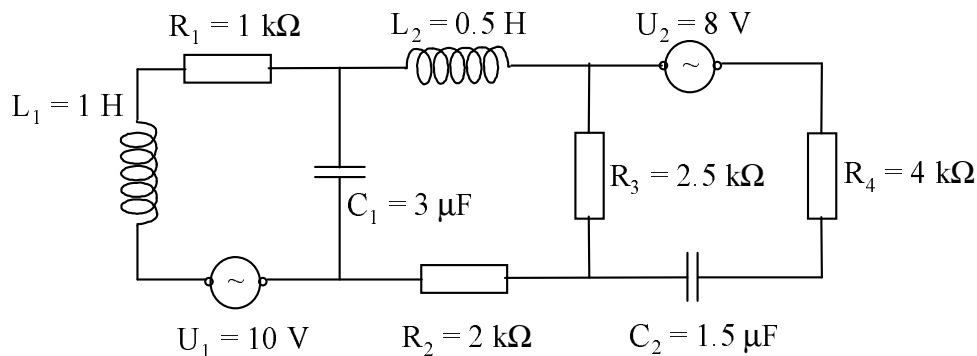
Útmutatás: Alkalmazzuk a **6.5.** feladatban vázolt módszert. Ha a koordinátatengelyeket a molekula szimmetriaelemeihez illeszkedve vesszük fel, bízhatunk abban, hogy a tehetetlenségi tenzor közvetlenül diagonálisnak adódik. A forgási energia képletébe az egyes főtehetetlenségi nyomatékokat helyettesítsük be.

Beadandó:

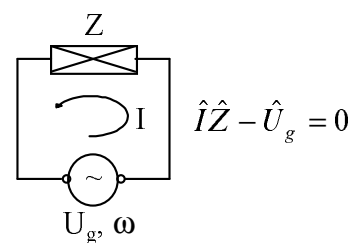
- kézzel írt részletes levezetés
- a spektrumvonalak frekvenciája általános képletben és az első három-három számszerűen

15. Házidolgozat feladat

Az ábrán látható áramkör üzemi frekvenciája $\nu = 1000$ Hz, a generátorok azonos fázisban vannak. Adjuk meg az egyes ágakban folyó áramokat és az egyes kapcsolási pontok között fellépő feszültségeket nagyság és fázis szerint!



Útmutatás: Alkalmazzuk az egyenáramú hálózatokra megismert megoldási technikák valamelyikét a komplex számítási módszerrel kombinálva. A generátorok azonos fázisa azt jelenti, hogy a hurokegyenletekben azonos körüljárási irány mellett az elektromotoros erőket azonos előjellel kell figyelembe venni. A probléma komplex együtthatós lineáris egyenletrendszerre vezet. Ez utóbbi megoldására írhatunk számítógépes programot is.

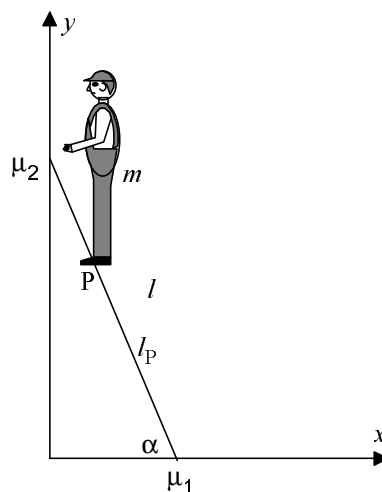


Beadandó:

- kézzel írt részletes levezetés
- a kért adatok számszerűen
- forráslista és a végrehajtható program floppy-n (ha van)

16. Házidolgozat feladat

Pechvogel Jenő kisiparos az ábra szerinti helyzetben állt a létráján, amikor az megcsúszott. Számítsuk ki, milyen szögben állt a létra a megcsúszás pillanatában és mekkora sebességgel ütődött a földnek a balszerencsés vállalkozó! A létra hossza $l = 3$ m, tömege elhanyagolható, Pechvogel úr tömege $m = 70$ kg, a számítás során egyszerűsítésképpen vegyük pontszerűnek és a létrán a P pontban rögzítettnek, helyzete a létra alsó végétől $l_p = 2$ m, a súrlódási együtthatók a létra és a padló ill. a létra és a fal között $\mu_1 = 0.20$ és $\mu_2 = 0.25$.



Útmutatás: Ez az egyszerűnek tűnő kényszerprobléma olyan bonyolult differenciálegyenletre vezet, amelynek megoldása analitikusan reménytelen. Ezzel szemben numerikus módszerrel, számítógépes modellezéssel kezelhető.

- Vegyük fel az erőket x és y irányú komponensekben, vegyük figyelembe, hogy csúszási súrlódásnál $F_s = \mu \cdot F_{ny}$, írjuk fel Newton II. törvényét ($F = m \cdot a$) az x és y komponensekre, valamint a forgatónyomatékot a $P(x,y)$ pontra (M_P). Közelítésünk értelmében a P-re vonatkozó tehetetlenségi nyomaték nulla, ezért végig a mozgás folyamán $M_P = 0$ lesz.
- $a = 0$ helyettesítéssel kapjuk a megcsúszási határesetet, az egyenletrendszerből $\tan \alpha$ kifejezhető.
- Valamennyi geometriai paraméter, sebesség és gyorsulás kifejezhető az egyik koordináta, mondjuk y segítségével. Az egyenletekből kiküszöbölve a kényszererőket egy

$$\ddot{y} = f(y, \dot{y})$$

alakú differenciálegyenletre jutunk, amelynek Runge-Kutta-típusú megoldási algoritmus:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \dot{y}(t) \cdot \Delta t + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3) \cdot \Delta t, \quad \dot{y}(t + \Delta t) = \dot{y}(t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(y(t), \dot{y}(t)) \cdot \Delta t, \quad k_2 = f\left(y(t) + \dot{y}(t) \frac{\Delta t}{2}, \dot{y}(t) + \frac{1}{2} k_1\right) \cdot \Delta t,$$

$$k_3 = f\left(y(t) + \dot{y}(t) \frac{\Delta t}{2} + \frac{1}{4} k_1 \Delta t, \dot{y}(t) + \frac{1}{2} k_2\right) \cdot \Delta t, \quad k_4 = f\left(y(t) + \dot{y}(t) \Delta t + \frac{1}{2} k_2 \Delta t, \dot{y}(t) + k_3\right) \cdot \Delta t$$

- Tetszőleges programnyelvet lehet választani.

Beadandó:

- kézzel írt részletes levezetés
- forráslista
- a kért adatok
- a végrehajtható program floppy-n